

**Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев**

# **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Допущено  
Министерством образования Российской Федерации  
в качестве учебника  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности «Прикладная математика»  
направления подготовки дипломированных специалистов  
«Прикладная математика»



**URSS**

**МОСКВА**

**Ивченко Григорий Иванович,  
Медведев Юрий Иванович**

**Математическая статистика:** Учебник. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. — 352 с.

В основу книги положены материалы курса лекций и спецкурсов, читавшихся авторами в течение ряда лет на факультете прикладной математики в Московском институте электроники и математики и в Институте криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России. Представленный в книге материал полностью отвечает программе по математической статистике учебного плана ГОС по специальности «Прикладная математика». Изложение материала ведется на уровне, доступном студентам технических вузов; для его понимания достаточно знания основ классического математического анализа, линейной алгебры и теории вероятностей, читаемых на начальных семестрах вузовской программы по математике.

Излагаются основные элементы современной статистической теории; акцент делается на исследовании вопросов оптимальности соответствующих статистических процедур и их практической реализации с использованием компьютерной техники. Все разделы книги снабжены задачами.

Материал книги может быть использован для формирования специальных курсов по математической статистике, индивидуальной работы со студентами и самообразования. Книга может быть полезна также студентам университетов естественных специальностей, аспирантам и научным работникам, применяющим в своих исследованиях вероятностные и статистические методы.

**Рецензенты:**

зав. кафедрой математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. *Ю. В. Прохоров*;  
член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. *Б. А. Севастьянов*

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»». 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 22. Зак. №

Отпечатано в ГУП Чувашской Республики «ИПК «Чувашия» Мининформполитики Чувашии.  
428019, г. Чебоксары, пр-т И. Яковлева, 13.

**ISBN 978-5-397-04141-6**

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013

13778 ID 170278



9 785397 041416

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

# Содержание

<b>Предисловие</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>Введение</b> . . . . .	<b>12</b>
1. Вероятностно-статистическая модель и задачи математической статистики . . . . .	12
2. Терминология и обозначения . . . . .	15
3. Некоторые типичные статистические модели . . . . .	18
<b>Глава 1. Основные понятия и элементы выборочной теории</b> . . . . .	<b>23</b>
§ 1.1. Вариационный ряд выборки и эмпирическая функция распределения . . . . .	23
1. Порядковые статистики и вариационный ряд выборки . . . . .	23
2. Эмпирическая функция распределения . . . . .	24
3. Дальнейшие свойства э.ф.р. . . . .	26
4. Гистограмма и полигон частот . . . . .	29
§ 1.2. Выборочные характеристики . . . . .	31
1. Выборочные моменты . . . . .	31
2. Моменты выборочного среднего и выборочной дисперсии . . . . .	33
§ 1.3. Асимптотическое поведение выборочных моментов . . . . .	34
1. Сходимость по вероятности выборочных моментов и функций от них . . . . .	34
2. Асимптотическая нормальность выборочных моментов . . . . .	36
§ 1.4. Порядковые статистики . . . . .	38
1. Распределение порядковых статистик . . . . .	38
2. Выборочные квантили и их асимптотическая нормальность . . . . .	39
3. Предельные распределения крайних членов вариационного ряда . . . . .	42
§ 1.5. Распределения некоторых функций от нормальных случайных величин . . . . .	44
1. Распределение хи-квадрат . . . . .	45

2. Квадратичные и линейные формы от нормальных случайных величин . . . . .	46
3. Распределения квадратичных форм от нормальных случайных величин . . . . .	49
4. Распределение Стьюдента . . . . .	51
5. Распределение Снедекора . . . . .	53
§ 1.6. Статистическое моделирование . . . . .	54
1. Моделирование распределения Бернулли $Bi(1, p)$ . . . . .	55
2. Моделирование полиномиальных испытаний . . . . .	56
3. Моделирование распределения Пуассона . . . . .	56
4. Моделирование непрерывных распределений . . . . .	57
5. Моделирование нормальных случайных чисел . . . . .	57
Задачи . . . . .	58
<b>Глава 2. Оценивание неизвестных параметров распределений . . . . .</b>	<b>66</b>
§ 2.1. Статистические оценки и общие требования к ним. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией . . . . .	66
1. Понятие статистической оценки . . . . .	66
2. Несмещенные оценки . . . . .	68
3. Оптимальные оценки . . . . .	71
§ 2.2. Критерии оптимальности оценок, основанные на неравенстве Рао—Крамера и его обобщениях . . . . .	76
1. Понятия функции правдоподобия, вклада выборки, функции информации . . . . .	76
2. Неравенство Рао—Крамера и эффективные оценки . . . . .	78
3. Экспоненциальная модель . . . . .	80
4. Критерий Бхаттачария оптимальности оценки . . . . .	81
5. Критерии оптимальности в случае векторного параметра . . . . .	83
§ 2.3. Принцип достаточности и оптимальные оценки . . . . .	87
1. Достаточные статистики . . . . .	87
2. Достаточные статистики и оптимальные оценки . . . . .	91
3. Экспоненциальные семейства и достаточные статистики . . . . .	94
4. Примеры применения достаточных статистик . . . . .	95
§ 2.4. Оценки максимального правдоподобия . . . . .	101
1. Определение и примеры оценок максимального правдоподобия . . . . .	102
2. Принцип инвариантности для о. м. п. . . . .	106
3. Метод накопления для приближенного вычисления о. м. п. . . . .	108
4. Асимптотические свойства о. м. п. . . . .	110

§ 2.5. Метод моментов, группированные данные, цензурирование . . . . .	119
1. Метод моментов . . . . .	119
2. Группировка наблюдений и метод минимума хи-квадрат . . . . .	120
3. Мультиномиальные оценки максимального правдоподобия . . . . .	122
4. Цензурирование . . . . .	123
§ 2.6. Интервальное оценивание . . . . .	125
1. Понятие доверительного интервала . . . . .	125
2. Построение доверительного интервала с помощью центральной статистики . . . . .	126
3. Построение доверительного интервала с использованием распределения точечной оценки параметра . . . . .	134
4. Асимптотические доверительные интервалы . . . . .	136
5. Доверительные области для многомерного параметра . . . . .	140
§ 2.7. Оценивание при выборе из конечной совокупности . . . . .	143
1. Оценивание среднего совокупности . . . . .	143
2. Оценивание состава совокупности . . . . .	147
Задачи . . . . .	152
<b>Глава 3. Проверка статистических гипотез . . . . .</b>	<b>162</b>
§ 3.1. Понятие статистической гипотезы и статистического критерия . . . . .	162
1. Статистические гипотезы . . . . .	162
2. Критерии проверки гипотез . . . . .	165
3. Общий принцип выбора критической области критерия . . . . .	166
§ 3.2. Проверка гипотезы о виде распределения . . . . .	169
1. Критерий согласия Колмогорова . . . . .	169
2. Критерий согласия хи-квадрат К. Пирсона . . . . .	171
3. Критерий согласия хи-квадрат для сложной гипотезы . . . . .	177
4. Критерий квантилей . . . . .	182
§ 3.3. Симметрические критерии в схеме группировки с растущим числом интервалов. Критерий пустых ящиков . . . . .	183
1. Критерий согласия $\chi^2$ для непрерывных распределений, вопросы его состоятельности . . . . .	183
2. Симметрические статистики в схеме группировки . . . . .	185
3. Критерий пустых ящиков . . . . .	186
4. Асимптотическое поведение мощности критерия пустых ящиков . . . . .	188
5. Общие симметрические критерии . . . . .	190

§ 3.4. Гипотеза однородности . . . . .	190
1. Критерий однородности Смирнова . . . . .	191
2. Критерий однородности $\chi^2$ . . . . .	192
3. Другие критерии однородности для двух выборок из непрерывных распределений . . . . .	194
§ 3.5. Гипотеза независимости . . . . .	198
1. Критерий независимости $\chi^2$ . . . . .	198
2. Критерий Спирмена . . . . .	201
3. Критерий Кендалла . . . . .	202
§ 3.6. Гипотеза случайности . . . . .	203
Задачи . . . . .	205
<b>Глава 4. Параметрические гипотезы . . . . .</b>	<b>209</b>
§ 4.1. Общие положения . . . . .	209
1. Понятие параметрической гипотезы . . . . .	209
2. Равномерно наиболее мощные критерии . . . . .	210
§ 4.2. Выбор из двух простых гипотез. Критерий Неймана—Пирсона . . . . .	211
1. Постановка задачи . . . . .	211
2. Критерий Неймана—Пирсона в случае абсолютно непрерывных распределений . . . . .	212
3. Критерий Неймана—Пирсона в случае дискретных распределений . . . . .	215
4. Примеры применения критерия Неймана—Пирсона . . . . .	217
§ 4.3. Выбор из двух простых гипотез. Понятие о последовательном анализе . . . . .	221
1. Определение критерия Вальда . . . . .	221
2. О числе испытаний до момента остановки в критерии Вальда . . . . .	222
3. О выборе границ в критерии Вальда . . . . .	224
4. О среднем числе наблюдений в критерии Вальда . . . . .	225
5. Пример «экономичности» последовательного критерия . . . . .	227
§ 4.4. Сложные гипотезы . . . . .	228
1. Р. н. м. критерии против сложных альтернатив. Модели с монотонным отношением правдоподобия . . . . .	229
2. Проверка простой гипотезы против двусторонней альтернативы, р. н. м. несмещенные критерии . . . . .	233
3. Локальные наиболее мощные критерии . . . . .	237
4. Проверка гипотез и доверительное оценивание . . . . .	240
§ 4.5. Критерий отношения правдоподобия . . . . .	243

---

1. Метод отношения правдоподобия проверки общих гипотез . . .	243
2. К. о. п. для больших выборок . . . . .	245
3. Асимптотические свойства к. о. п. . . . .	248
4. Асимптотические свойства к. о. п. (сложная нулевая гипотеза) . . . . .	251
5. Доверительные области максимального правдоподобия . . . . .	254
§ 4.6. Статистические выводы для конечных цепей Маркова . . . . .	256
Задачи . . . . .	259
<b>Глава 5. Линейная регрессия и метод наименьших квадратов . . . . .</b>	<b>265</b>
§ 5.1. Модель линейной регрессии . . . . .	265
§ 5.2. Оценивание неизвестных параметров модели . . . . .	267
1. Метод наименьших квадратов . . . . .	267
2. Оптимальность оценок наименьших квадратов . . . . .	269
3. Оценивание остаточной дисперсии . . . . .	270
4. Обобщенные о. н. к. . . . .	271
5. Оптимальный выбор матрицы плана . . . . .	273
6. Примеры применения метода наименьших квадратов . . . . .	274
7. Ортогональные многочлены Чебышева . . . . .	277
§ 5.3. Нормальная регрессия. Интервальное оценивание . . . . .	281
1. Основная теорема . . . . .	283
2. Доверительное оценивание параметров нормальной регрессии . . . . .	285
3. Доверительная область для линейных комбинаций параметров $\beta_1, \dots, \beta_k$ . . . . .	287
4. Совместные доверительные интервалы . . . . .	289
§ 5.4. Общая линейная гипотеза нормальной регрессии . . . . .	290
1. Понятие линейной гипотезы . . . . .	290
2. F-критерий проверки линейной гипотезы . . . . .	291
§ 5.5. Применение теории линейной регрессии . . . . .	293
1. Гипотеза о параллельности линий регрессии . . . . .	294
2. Критерий однородности . . . . .	296
3. Двойная классификация . . . . .	299
§ 5.6. Элементы теории статистической регрессии и корреляции . . . . .	305
1. Задачи статистического прогноза . . . . .	305
2. Оптимальный предиктор и его свойства . . . . .	305
3. Прогнозирование в случае линейной функции регрессии . . . . .	309
4. Линейное прогнозирование . . . . .	310

5. Использование дополнительной информации . . . . .	311
6. Эмпирические предикторы . . . . .	312
7. Прогнозирование стационарных последовательностей . . . . .	312
Задачи . . . . .	316
<b>Глава 6. Элементы теории решений. Дискриминантный анализ . . . . .</b>	<b>320</b>
§ 6.1. Статистические решающие функции. Байесовское и минимаксное решения . . . . .	320
1. Понятие решающей функции . . . . .	320
2. Функция риска и допустимые решающие правила . . . . .	321
3. Байесовское решение . . . . .	322
4. Минимаксное решение . . . . .	323
5. Оценивание параметров и проверка гипотез с позиций теории решений . . . . .	325
§ 6.2. Задача классификации наблюдений . . . . .	327
1. Постановка задачи классификации . . . . .	327
2. Функция риска в задаче классификации . . . . .	328
3. Байесовское решение . . . . .	329
4. Минимаксное решение . . . . .	330
§ 6.3. Классификация наблюдений в случае двух нормальных классов . . . . .	331
1. Байесовский подход . . . . .	331
2. Минимаксный подход . . . . .	332
§ 6.4. Классификация нормальных наблюдений. Общий случай . . .	333
1. Байесовский подход . . . . .	333
2. Минимаксный подход . . . . .	334
3. Классификация наблюдений при наличии неизвестных параметров . . . . .	335
Задачи . . . . .	336
<b>Литература . . . . .</b>	<b>342</b>



Математическая статистика является наукой о методах количественного анализа массовых явлений, учитывающей одновременно и качественное своеобразие этих явлений.

*Б. В. Гнеденко*

Книга человечнее, честнее, долговечней и ответственней любого другого источника информации.

*В. А. Садовничий*

## Предисловие

Учебным планом государственного образовательного стандарта по специальности «Прикладная математика» предусматривается чтение двухсеместрового курса «Теория вероятностей и математическая статистика». Первая часть этой дисциплины, относящаяся к теории вероятностей, на сегодня в достаточной степени обеспечена соответствующей учебной литературой, отвечающей современному уровню достижений этой науки и и практике ее преподавания в вузах. Прежде всего, по нашему мнению, — это учебник для технических вузов В. П. Чистякова «Курс теории вероятностей» [39], посвященный изложению основ и методов теории вероятностей, но лишь частично затрагивающий проблемы математической статистики.

За последние годы издан целый ряд новых книг как по теории вероятностей, в которые составной частью входят элементы математической статистики, так и посвященные изложению собственно теории математической статистики. Однако, большинство из них адресовано студентам-математикам университетов и аспирантам и потому могут быть рекомендованы студентам технических вузов лишь в отдельных случаях для самостоятельного и более глубокого изучения отдельных вопросов. Предлагаемая книга, в которой акцент сделан именно на изложении современного состояния теории и приложений математической статистики, восполняет пробел в учебной литературе по данному направлению подготовки специалистов высших технических учебных заведений.

Авторы ставили перед собой задачу изложить в доступной для первоначального изучения форме элементы основных направлений современной статистической теории. При изложении материала акцент делается на исследование вопросов оптимальности соответствующих статистиче-

ских процедур и их практической реализации. Особенностью книги является широкое использование в ней асимптотических методов теории вероятностей, существенное внимание уделяется вопросам прикладной интерпретации решаемых задач и получаемых результатов. При этом авторы стремились избегать громоздких математических выкладок и доказательств и в то же время сохранить и подчеркнуть теоретико-вероятностную и статистическую сущность рассматриваемых вопросов. Изложение материала ведется на уровне, доступном студентам технических вузов; авторы стремились опираться только на знание студентами основ классического математического анализа, линейной алгебры и теории вероятностей, читаемых на первых семестрах вузовской программы по высшей математике.

Книга написана на базе учебного пособия авторов «Математическая статистика» [14], которое прошло достаточную апробацию в учебном процессе вузов широкого профиля. Изложенный в ней материал полностью обеспечивает программу по математической статистике для технических вузов, может быть использован преподавателями при формировании дополнительных курсов и индивидуальной работе со студентами, а также для самообразования. Книга может быть также полезной студентам университетов, обучающимся на факультетах прикладной математики и кибернетики, аспирантам и инженерам, применяющим в своих исследованиях вероятностные и статистические методы (по крайней мере, как введение в соответствующие разделы статистической теории).

Теперь несколько слов для преподавателей (*как говорили древние: docendo discimus (лат.) — уча, учимся сами*). Одной из основных задач при преподавании курса математической статистики является выработка у студентов навыков обработки реальных данных по соответствующим алгоритмам с привлечением компьютерной техники при решении конкретных учебных задач. В настоящее время глубокое изучение теории математической статистики в отрыве от практики ее компьютерной реализации вообще невозможно. В то же время сам характер этой дисциплины доставляет большой простор преподавателю для организации практической работы студентов с привлечением компьютеров. Ключевым моментом при этом является моделирование на компьютере выборок из соответствующих распределений. Фактически на основе любой «теоретической» задачи, в которой речь идет о том или ином статистическом алгоритме анализа данных, преподаватель может поставить (и притом в неограниченном числе вариантов, варьируя конкретные значения параметров модели) соответствующую «практическую» задачу, формулируя в качестве предварительного этапа задание смоделировать исходные данные с использованием либо готовых таблиц случайных чисел, либо получаемых с помощью специальных программ. В дальнейшем, обрабатывая эти «экспериментальные» данные

по соответствующему статистическому алгоритму, студент получает возможность сравнить предсказание теории с известными ему исходными параметрами, при которых моделировалась выборка. Подобный «игровой» элемент в организации практической работы по курсу повышает интерес студентов к изучению теории. Вопросам статистического моделирования уделяется в книге существенное внимание.

В тексте имеется большое число интересных и тщательно подобранных примеров, иллюстрирующих, а в ряде случаев и дополняющих излагаемую теорию: «*при изучении наук примеры полезнее правил*» (И. Ньютон). В конце каждой главы приводится достаточно большой список задач, которые могут служить материалом для практических занятий по курсу, а также заданий по учебно-исследовательским и курсовым работам. Однако авторы рекомендуют использовать также задачник [15] и книгу [16], в которых можно найти детали решений задач, соответствующие методические указания и ответы.

В конце книги приведен достаточно обширный список как учебной, так и монографической литературы, в которой более полно и глубоко освещены различные аспекты статистической теории и ее приложений; эта литература может быть использована для самостоятельного и углубленного изучения отдельных вопросов.

В книге принята двойная нумерация параграфов, теорем и формул: первое число — номер главы, второе — порядковый номер соответствующего объекта в данной главе, например, (1.11) — 11-я формула в 1-й главе. Знаки ◀ и ▶ в тексте означают соответственно начало и окончание доказательства.

Авторы пользуются здесь случаем поблагодарить академика Ю. В. Прохорова, членов-корреспондентов В. Я. Козлова и Б. А. Севастьянова и действительного члена Академии криптографии РФ В. П. Чистякова за идею издания данной книги и полезные советы по ее структуре и содержанию.

*Авторы*