



**Правительство Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

Факультет бизнес-информатики  
Отделение прикладной математики и информатики

**Программа дисциплины «Кооперативные игры, решения и приложения»**

для направления 010400.62 Прикладная математика и информатика  
подготовки бакалавра

Автор программы:

Хмельницкая А.Б., к.ф.-м.н., доцент, [a.khmelnitskaya@utwente.nl](mailto:a.khmelnitskaya@utwente.nl)

Одобрена на заседании кафедры высшей математики факультета экономики  
«\_\_»\_\_\_\_\_ 20 г

Зав. кафедрой Алескеров Ф.Т.

Рекомендована секцией УМС

«\_\_»\_\_\_\_\_ 20 г  
Председатель

Утверждена УС факультета

«\_\_»\_\_\_\_\_ 20 г.

Ученый секретарь

\_\_\_\_\_ [подпись]

Москва, 2013

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями  
университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



## 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов бакалавриата направления 010400.62 «Прикладная математика и информатика», изучающих дисциплину «Кооперативные игры, решения и приложения».

Программа разработана в соответствии с:

- образовательным стандартом НИУ ВШЭ по направлению 010400.62 «Прикладная математика и информатика», уровень подготовки: бакалавр
- образовательной программой 010400.62, направление «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра
- Рабочим учебным планом университета по направлению 010400.62 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра, утвержденным в 2013 г.

## 2 Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Кооперативные игры, решения и приложения» является ознакомление студентов с основными понятиями и утверждениями теории кооперативных игр и некоторыми ее приложениями.

## 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные понятия и методы теории кооперативных игр и некоторые ее приложения;
- Уметь применять модели и методы теории кооперативных игр для формализации и решения прикладных задач;

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Общенаучная	ОНК-1	Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-2	Способность перейти от проблемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-3	Способность использовать методы критического анализа, развития научных теорий, опровержения и фальсификации, оценить качество исследований в	Стандартные (лекционно-семинарские)



Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
		некоторой предметной области	
Общенаучная	ОНК-4	Готовность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при работе в какой-либо предметной области	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-5	Готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий аппарат дисциплины	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-6	Способность приобретать новые знания с использованием научной методологии и современных образовательных и информационных технологий	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-7	Способность порождать новые идеи (креативность)	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-1	Способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-2	Способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат	Стандартные (лекционно-семинарские)

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественнонаучных дисциплин, является базовой для подготовки бакалавра по направлению 010400.62 «Прикладная математика и информатика».

Изучение данной дисциплины базируется на следующих курсах:



- Математический анализ
- Линейная алгебра
- Дискретная математика
- Методы оптимизации
- Теория вероятности
- Начальное знакомство с теорией некооперативных игр

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- Знаниями основных математических кусков в объеме бакалавриата;
- Навыками решения типовых математических задач в объеме бакалавриата;
- Умением строго доказательства математических утверждений;
- Пониманием основ теории множеств, теории графов, комбинаторики и методов оптимизации;
- Знанием определения равновесия по Нэшу и умением его нахождения в не-сложных задачах.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Методы принятия решений
- Механизмы принятия решений в экономических системах
- Теория индивидуального и коллективного выбора

## 5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции и	Семинары	Практические занятия	
1	Кооперативные игры с трансферабельными полезностями и их свойства	10	2	2	-	6
2	Основные понятия решения	50	12	8	-	30
3	Классы игр с непустым $S$ -ядром	15	4	2	-	9
4	Модели игр с ограниченной кооперацией и их решения	15	4	2	-	9
<b>Итого</b>		90	22	14	-	54

## 6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	Параметры
Итоговый	Экзамен	Письменная работа на 180 минут по всем разделам курса. Включает 12-15 задач и теоретических вопросов разного уровня сложности.



## 6.1 Критерии оценки знаний, навыков

При выполнении экзаменационной письменной работы студент должен продемонстрировать знание основных понятий, определений и утверждений теории кооперативных игр и некоторых её приложений, понимание и умение строго доказательства основных математических утверждения и умение применения полученных теоретических знаний для решения задач. Компетенции СК-М1, СК-М6.

## 6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале. Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

- $0 \leq K \leq 3$  - неудовлетворительно,
- $4 \leq K \leq 5$  - удовлетворительно,
- $6 \leq K \leq 7$  - хорошо,
- $8 \leq K \leq 10$  -отлично.

## 7 Содержание дисциплины

### 1. Кооперативные игры с трансферабельными полезностями и их интерпретация.

Построение кооперативной игры по заданной некооперативной игре в нормальной форме. Характеристическая функция игры, игры накопления и игры затрат, типы кооперативных игр (аддитивные игры, супераддитивные игры, выпуклые (вогнутые) игры, монотонные игры, простые игры). Стратегическая эквивалентность кооперативных игр. Разложение кооперативной игры по базису простейших игр, дивиденды Харшаньи.

Примеры кооперативных игр: игра перчаток, игра «помещик-батраки», игра аэропорта, игра банкротства, игра взвешенного мажоритарного большинства, игры рынка, игры с вето игроками, игры о назначениях (assignment games), игры большого босса (big boss games).

### 2. Основные понятия решения.

Множество дележей.

Доминирование дележей, решения по фон Нейману-Моргенштерну.

$C$ -ядро, сбалансированные игры, необходимые и достаточные условия непустоты  $C$ -ядра, totally сбалансированные игры.  $\varepsilon$ - $C$ -ядро и наименьшее  $C$ -ядро (the least core). Всегда непустые оболочки  $C$ -ядра (core catchers), в частности, множество Вебера.

$M$  и  $M_1^i$ -устойчивые множества и  $K$ -ядро, их свойства.

$n$ -ядро, существование и единственность, характеристика посредством сбалансированности (теорема Колберга).

Вектор Шепли, различные представления и интерпретация. Аксиоматическое обоснование: аксиоматика Шепли и аксиоматика Янга. Представление вектора Шепли через потенциал. Свойство сохранения значений после ухода нулевого игрока и некоторые другие свойства. Вектор Шепли в простых играх, индексы власти, индекс Шепли-Шубика, индекс Банзафа.

Несимметричные расширения вектора Шепли -- вероятностные значения, значения случайного порядка, взвешенный вектор Шепли.

Применение различных решений для отдельных классов содержательных игр.

### 3. Классы игр с непустым $C$ -ядром: выпуклые игры и одно-выпуклые (1-convex/1-concave) игры.



Необходимые и достаточные условия выпуклости игры, лемма Шепли и теорема Ичииси.  
Одно-выпуклые и одно-вогнутые игры и их свойства, одно-вогнутый базис в пространстве всех ТП игр.

Прикладные модели одно-выпуклых и одно-вогнутых игр : библиотечная игра, игра обмена данными, игра совместного страхования больших рисков.

#### 4. Модели игр с ограниченной кооперацией и их решения.

Игры с ограниченной кооперацией, заданной в виде априорных союзов. Решение Аумана-Дреза и решение Оуэна.

Игры с ограниченной кооперацией, заданной ненаправленным коммуникационным графом. Решение Майерсона и его эффективная модификация, усредненное решение по дереву (the average tree solution).

Игры с ограниченной кооперацией, заданной направленным коммуникационным графом и их решения для частного случая коммуникационного графа, являющегося лесом.

Игры, наделенные двумя структурами ограничений - коалиционной структурой и коммуникационной структурой, заданной посредством графа.

Приложения: индекс общественного капитала; задача распределение водных ресурсов реки.

## 8 Образовательные технологии

Лекции и семинары.

## 9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 9.1 Основная литература

#### Учебники, монографии:

M. Maschler, E. Solan, and S. Zamir, *Game theory*, Cambridge University Press, 2013.

V. Peleg and P. Sudhölter, *Introduction to the theory of cooperative games*, Springer, 2003 (1st ed.), 2007 (2nd ed.).

H. Peters, *Game theory. A multi-leveled approach*, Springer, 2008.

H. Moulin, *Axioms of cooperative decision making*, 1988 (русский перевод – Э. Мулен.

Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.)

С.Л. Печерский и Е.Б. Яновская, *Кооперативные игры: решения и аксиомы*, Европейский Университет в СПб. 2004.

*The Shapley value. Essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Edited by Alvin E. Roth, Cambridge University Press, 1988.

G. Owen, *Game theory*, 3rd edition. *Academic Press, Inc., San Diego, CA*, 1995 (русский перевод 2-го изд. -- Г. Оуэн. *Теория игр*. Издание 2-е. Б.: Едиториал УРСС, 2004, 216 с.)

T.S.H. Driessen, *Cooperative games, solutions and applications*, Kluwer Academic Publishers, 1988.

### 9.2 Дополнительная литература

#### Журнальные публикации:

Ambec, S., Y. Sprumont (2002), Sharing a river, *Journal of Economic Theory*, 107, 453–462.

Aumann, R.J., M. Maschler (1985), *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*, *Journal of Economic Theory*, 36, 195–213.

Brink, R. van den, G. van der Laan, and V. Vasil'ev (2007), *Component efficient solutions in line-graph games with applications*, *Economic Theory*, 33, 349–364.

Brink, R. van den, A. Khmel'nitskaya, and G. van der Laan (2012), *An efficient and fair solution for communication graph games*, *Economic Letters*, 117, 786–789.



- Driessen T.S.H., V. Fragnelli, I.V. Katsev, and A.B. Khmelnitskaya (2011), *On 1-convexity and nucleolus of co-insurance games*, Insurance: Mathematics & Economics, 48, 217-225.
- Driessen T.S.H., A.B. Khmelnitskaya, and J. Sales (2012), *1-concave basis for TU games and the library game*, TOP, 20, 578-591.
- Gonzalez-Aranguena, E., A. Khmelnitskaya, C. Manuel, and M. del Pozo (2011), *A social capital index*, mimeo.
- Herings, P. J. J., G. van der Laan, and A. J. J. Talman (2008), *The average tree solution for cycle-free graph games*, Games and Economic Behavior, 62, 77–92.
- Herings, P. J. J., G. van der Laan, A. J. J. Talman, and Z. Yang (2010), *The average tree solution for cooperative games with communication structure*, Games and Economic Behavior, 68, 626–633.
- Khmelnitskaya, A. (2010), *Values for rooted-tree and sink-tree digraph games and sharing a river*, Theory and Decision, 69, 657–669.
- Khmelnitskaya, A. (2013), *Values for games with two-level communication structures*, Discrete Applied Mathematics, doi:10.1016/j.dam.2013.10.019.
- Khmelnitskaya A. and E. Yanovskaya (2007), *Owen coalitional value without additivity axiom*, Mathematical Methods of Operations Research, 66, 255-261.
- Myerson, R. B. (1977), *Graphs and cooperation in games*, Mathematics of Operations Research, 2, 225–229.
- Owen, G. (1977), *Values of games with a priori unions*, in: Essays in mathematical economics and game theory (Henn R, Moeschlin O, eds.), Springer-Verlag, Berlin, pp. 76–88.
- Vazquez-Brage, M., I. Garcia-Jurado, and F. Carreras (1996), *The Owen value applied to games with graph-restricted communication*, Games and Economic Behavior, 12, 42–53.
- Young, H.P. (1985), *Monotonic solutions of cooperative games*, International Journal of Game Theory, 14, 65-72.