1. Докажите, что уравнение
$$\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}u\xi}\right] = 0,$$
где ξ - случайная величина, имеющая безгранично делимое распределение, не имеет решений (т.е. характеристическая функция любого безгранично делимого распределения не обращается в ноль).

2. Докажите, что составной пуассоновский процесс имеет независимые и стационарные приращения.

3. Пусть (X_t, Y_t) - двумерный процесс Леви, не имеющий гауссовской части, т.е. тройка Леви этого процесса имеет вид $\left(\vec{b}, 0, \nu\right)$. Докажите, что если X_t и Y_t - два независимых процесса, то
$$\operatorname{supp}(\nu) \subset \Big\{(x,y): \; xy = 0\Big\},$$
и в этом случае для любого множества $A \subset \mathbb{R}^2$ выполнено
$$\nu(A) = \nu_X(A_X) + \nu_Y(A_Y),$$
где
$$A_X = \Big\{x \in \mathbb{R}: \; (x,0) \in A\Big\}, \qquad A_Y = \Big\{y \in \mathbb{R}: \; (0,y) \in A\Big\}.$$

4. Пусть X_t - одномерный процесс Леви с кумулянтой $\psi(u)$. Докажите, что если X_t - процесс ограниченной вариации, то

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\tilde{\psi}(u)}{u}=0,$$

где $\tilde{\psi}(u)=\left(\psi(u)+\psi(-u)\right)/2$.

5. Пусть X_t - одномерный процесс Леви с кумулянтой $\psi(u)$. Докажите, что если X_t - не имеет гауссовской части, т.е. тройка Леви процесса X_t имеет вид $(b,0,\nu)$, то

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\tilde{\psi}(u)}{u^2}=0,$$

где $\tilde{\psi}(u)=\left(\psi(u)+\psi(-u)\right)/2$.

6. Докажите, что решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t=\Big(a(t)-b(t)X_t\Big)dt+c(t)dW_t,\qquad \text{где}\quad c(t)>0$$

задаётся в виде

$$X_t=g(t)\Big(X_0+\int_0^t\frac{a(s)}{g(s)}ds+\int_0^t\frac{c(s)}{g(s)}ds\Big),$$

где $g(t)=\exp\left\{-\int_0^t b(s)ds\right\}$.

7. Пусть $X_t = \mu t + \sigma W_t$ - броуновское движение со сдвигом ($\sigma > 0$), а T_s - гамма -процесс, независимый от процесса X_t. Докажите, что процесс X_{T_s}, называемый variance gamma process, может быть представлен как разность двух независимых гамма процессов, т.е.

$$X_{T_s} \stackrel{d}{=} G_s^{(1)} - G_s^{(2)},$$

где $G_s^{(i)}$ имеет гамма распределение с параметрами $sa > 0$ и $b_i > 0$, $i = 1, 2$.

8. Двумерная случайная величина $\vec{Z} = (Z_1, Z_2)$ задана следующим образом:

$$(Z_1, Z_2) = \begin{cases} (\xi, |\eta|), & \text{если } \xi > 0; \\ (\xi, -|\eta|), & \text{если } \xi < 0, \end{cases}$$

где ξ и η - 2 независимые стандартные нормальные величины. Докажите, что Z_1 и Z_2 являются стандартными нормальными величинами, но вектор $\vec{Z}$ не является гауссовским.

9. Пусть (X_t, Y_t) - двумерный процесс Леви с тройкой Леви $\left(\vec{b}, C, \nu\right)$, где $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $C = (c_{ij})$ - 2×2 - матрица , ν - мера Леви. Докажите, что одномерный процесс Леви X_t имеет тройку (b_X, c_X, ν_X), задаваемую следующими равенствами:

$$\begin{cases} b_X = b_1 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} x \left(I\{|x| \le 1\} - I\{x^2 + y^2 \le 1\}\right) \nu\,(dx \times dy)\,, \\ \\ c_X = c_{11}, \\ \\ \nu_X(D) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \nu(D, dy), \quad \forall\, D \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

10. Пусть $\tilde{W}_t^{(1)}$ и $\tilde{W}_t^{(2)}$ - два броуновских движения со сдвигом, т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t^{(1)} &:= b_1 t + \sigma_1 W_t^{(1)}, \\ \tilde{W}_t^{(2)} &:= b_2 t + \sigma_2 W_t^{(2)}, \end{aligned}$$

где $W_t^{(1)}$ и $W_t^{(2)}$ - два стандартных броуновских движения, причём $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\mathrm{cor}(W_1^{(1)}, W_1^{(2)}) = \rho$. Переменная времени t в обоих процессах заменена на один и тот же случайный процесс T_s, независимый от процессов $W_t^{(1)}$ и $W_t^{(2)}$:

$$Y_s^{(1)} := \tilde{W}_{T_s}^{(1)}, \qquad Y_s^{(2)} := \tilde{W}_{T_s}^{(2)}.$$

Выразите $\mathrm{cor}(Y_s^{(1)}, Y_s^{(2)})$ через параметры процессов $\tilde{W}_t^{(1)}$, $\tilde{W}_t^{(2)}$ и первые два момента распределения T_s.