Листок 1

Говорят, что квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем K ненулевой характеристики представляет $\alpha \in K$, если найдется такой ненулевой набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha$.

Задача 1. Докажите, что всякая невырожденная квадратичная форма над $\mathbb{F}_q$ эквивалентна форме вида $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \varepsilon x_n^2$, где ε — либо 1, либо квадратичный невычет в поле $\mathbb{F}_q$.

Задача 2. Выведите из предыдущей задачи, что при $n \geq 0$ всякая квадратичная форма над полем $\mathbb{F}_p$, где $p \neq 2$, представляет нуль.

Задача 3. Докажите, что если квадратичная форма над любым полем представляет нуль, то она представляет и все элементы поля K.

Задача 4. Представляет ли нуль форма $f(x, y) = (1 + \sin t)x^2 + 2(\operatorname{tg} t)xy + (\cos t)y^2$ над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[t]]$?

Задача 5. Найдите число решений уравнения $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$ над $\mathbb{F}_7$.

Задача 6 (Теорема Шевалле–Варнинга). Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — однородный многочлен степени $d < n$ над $\mathbb{F}_p$. Докажите, что число решений уравнения $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в $\mathbb{F}_p^n$ делится на p (а, следовательно, среди этих решений есть нетривиальные).

Задача 7. Придумайте однородный многочлен от трех переменных степени 5, который не представляет 0 над $\mathbb{F}_3$ нетривиальным образом.

Сопоставим каждому связному неориентированному графу Γ с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ квадратичную функцию $q_\Gamma(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$, положив

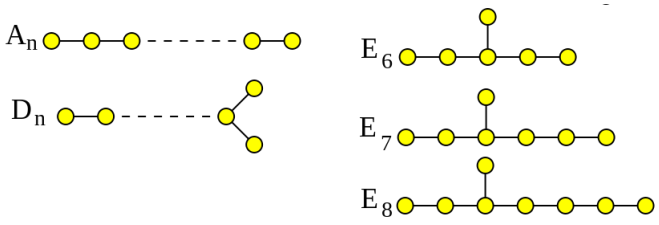
$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если } i = j; \\ -1, & \text{если } i \neq j \text{ и между вершинами } i \text{ и } j \text{ есть ребро;} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Цель следующих трех задач — выяснить, для каких графов форма q_Γ положительно определена (обозначение: $q_\Gamma > 0$).

Задача 8. Докажите, что для всех графов на рисунке верно, что $q_\Gamma > 0$.

Задача 9. Докажите, что если $q_\Gamma > 0$, то граф Γ ацикличен и содержит не более одной вершины степени 3.

Задача 10. Докажите, что на рисунке изображен полный список графов, для которых $q_\Gamma > 0$.



Решения нужно сдавать устно на математическом практикуме. Рекомендуется предварительно записывать решения, чтобы ничего не забыть.