

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

УДК: 517  
№ госрегистрации: 01201362559  
Инв.№:

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор НИУ ВШЭ, к.э.н.

М.М. Юдкевич

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ НОВЫХ МЕТОДОВ И ПОДХОДОВ  
В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ДИЗАЙНА МЕХАНИЗМОВ  
В СОЦИАЛЬНОЙ, ЭКОНОМИЧЕСКОЙ И ПОЛИТИЧЕСКОЙ СФЕРАХ

(заключительный)

Шифр: Т3-93

Руководители темы:

зав. МНУЛ анализа и выбора решений,  
д.техн.н.

Ф.Т. Алескеров

гл.н.с. МНУЛ анализа и выбора решений, д.н., PhD

Э. Маскин

Москва 2013

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Соруководители темы:

Зав. лабораторией, д.т.н., зав. каф., проф.	Ф.Т. Алескеров	введение, заключение
Гл. науч. сотр., PhD	Э. Маскин	пункт 2.1.1

Исполнители темы:

Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.	А.С. Беленький	пункты 2.1.3–2.1.4
Ст.-исследователь, студент	Ю.А. Веселова	пункт 1.2.1
Лаборант	Т.Е. Грунина	пункты 3.2.4–3.2.5
Ст.-исследователь, студент	Д.А. Давыдов	пункты 1.4.2–1.4.3
Мл. науч. сотр., преподава- тель, аспирант	Л.Г. Егорова	пункт 1.4.1
Ст.-исследователь, студент	А.А. Иванов	пункт 1.2.2
Лаборант	А.В. Калистратова	пункты 1.7.2–1.7.3
Ст.-исследователь, студент	Е.О. Калугина	пункт 3.2.2
Ст.-исследователь, преподава- тель, аспирант	Р.У. Камалова	пункт 3.2.1
Науч. сотр., к.э.н., доцент	Д.С. Карабекян	пункт 1.5.1
Науч. сотр., к.э.н., доцент	А.В. Карпов	подраздел 2.2
Ст.-исследователь, студент	Е.С. Катаева	пункт 1.6.3
Мл. науч. сотр., преподава- тель, аспирант	С.Г. Кисельгоф	пункт 2.4.1
Лаборант	Е.С. Корнева	пункт 1.2.3
Лаборант	Н.В. Косилова	пункт 1.2.4
Ст.-исследователь, студент	В.А. Костомаров	пункт 3.2.3
Вед. науч. сотр., д.ф.-м.н., проф.	А.А. Лазарев	пункт 2.1.2
Науч. сотр., к.т.н.	А.С. Лебедев	пункт 4.2.3

Ст.-исследователь, студент		О.Н. Лебедева	пункт 4.2.4
Ст.-исследователь, аспирант		Н.В. Левицкий	пункты 3.3.6–3.3.7
Зам. зав. лаб., д.ф.-м.н., проф.		А.Е. Лепский	пункты 4.3.1, 4.4.1
Ст.-исследователь, студент		Д.Ф. Миришли	пункты 1.6.4–1.6.5
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.		Б.Г. Миркин	пункт 4.1.1
Ст.-исследователь, студент		А.И. Моховиков	пункт 1.6.2
Ст.-исследователь, аспирант		А.Л. Мячин	пункт 1.3.1
Ст.-исследователь, студент		В.В. Олейник	пункты 3.3.1–3.3.5
Ст.-исследователь, аспирант		М.А. Орлов	пункты 4.2.5–4.2.7
Ст. науч. сотр., к.э.н., доцент		Г.И. Пеникас	пункт 1.5.2
Ст.-исследователь, студент		В.В. Петрущенко	пункт 1.3.2
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.		В.В. Подиновский	подраздел 1.1
Ст. науч. сотр., к.т.н., доцент		А.А. Рубчинский	пункты 4.2.1–4.2.2
Науч. сотр., к.ф.-м.н., доцент		Т.Ф. Савина	пункты 3.1.4–3.1.5
Ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., доц.		К.С. Сорокин	пункты 2.4.2–2.4.3
Лаборант		А.А. Стafeев	пункты 3.3.8–3.3.9
Ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., доц.		А.Н. Субочев	пункт 1.6.1
Ст.-исследователь, студент		Д.Н. Тверской	пункты 4.3.2–4.3.5
Лаборант		М.Н. Ушаков	пункты 2.3.4–2.3.5
Ст.-исследователь, студент		Б.Д. Цвелиховский	пункты 4.4.2–4.4.4
Мл. науч. сотр., аспирант		Е.Л. Черняк	пункты 4.1.3–4.1.4
Мл. науч. сотр., преподаватель		Д.А. Шварц	пункты 2.3.1–2.3.3, пункты 3.1.1–3.1.3
Ст.-исследователь, студент		С.В. Швыдун	пункт 1.7.1
Ст.-исследователь, студент		А.В. Шестаков	пункт 4.1.2

## РЕФЕРАТ

Отчет 544 с., 1 ч., 98 рис., 81 табл., 451 источник.

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, ДИЗАЙН МЕХАНИЗМОВ, ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА, ТЕОРИЯ ИГР, НЕТОЧНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ, АНАЛИЗ ДАННЫХ.

Объектом исследования были модели и методы принятия решений, дизайна механизмов и интеллектуального анализа данных.

Цель работы – исследование новых методов и подходов в области математического моделирования и дизайна механизмов в социальной, экономической и политической сферах.

В частности, целями исследований были:

- модели распределения влияния в группах;
- иерархические модели выбора;
- обобщенные паросочетания, в которых предпочтения индивидуумов задаются бинарными отношениями более общего вида, чем полупорядки;
- оценки точности моделей агрегирования;
- коалиционное манипулирование в задаче коллективного выбора;
- модели агрегирования в финансовой сфере;
- оценка сложности иерархических моделей выбора;
- экономические механизмы, стимулирующие государственно–частное партнерство трех потенциальных его участников при осуществлении крупномасштабных проектов государственного значения;
- модели описания неопределенности в рамках теории неаддитивных мер и их применение в задачах анализа данных и принятия решений;
- новые методы анализа данных и их применение к задачам анализа и интерпретации текстов, сетевых ресурсов;
- модели избирательного процесса при сложных функциях полезности избирателей;

- модели этнополитической напряженности;
- новые решающие правила для многокритериальных задач в рамках теории важности критериев.

Проект направлен на решение как фундаментальных, так и прикладных проблем. Методологической основой исследований были теория индивидуального и коллективного выбора, теория игр, теория многокритериального принятия решений, теория интеллектуального анализа данных. Основными средствами и методами исследований были численные и комбинаторные методы, методы статистического и кластерного анализа данных, процедуры оптимизации, методы теории вероятностей и др.

Техническим средством исследования были информационно-вычислительные системы. Для прикладных исследований использовались интернет-данные, базы данных социально-экономического и общественно-политического характера, базы данных приемной кампании в вузы и др.

В результате выполнения проекта получены следующие результаты:

- в рамках теории важности критериев найдены три аналитических решающих правила в матричном виде – одно для случая, когда шкала критериев является порядковой, и два для случая, когда шкала критериев является шкалой первой порядковой метрики с замедляющимся или ускоряющимся ростом предпочтений вдоль шкалы;
- разработан общий подход к построению двойственных решающих правил в рамках теории важности критериев и приведено оптимизационное решающее правило для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида и аналитическое решающее правило для случая критериев с порядковой шкалой; разработаны аналитические решающие правила для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида;
- предложена модификация индекса Нитцана–Келли для оценки коалиционной манипулируемости правил коллективного выбора; произведен расчет индексов коалиционной манипулируемости для ряда правил и для различных ограничений на

размер коалиции; найден предел максимальной разности индексов манипулируемости в моделях IC и IANC, IAC и IANC при бесконечном увеличении числа избирателей или числа альтернатив;

- показано, что правило порогового агрегирования является в то же время правилом подсчета очков; найдены значения вектора весов, при которых простое правило подсчета очков дает тот же результат, что и правило порогового агрегирования;
- методом анализа паттернов показателей социально-экономического развития решена задача определения регионов РФ со схожей структурой развития, выявлены устойчивые динамические группы регионов, характеризуемые схожей реакцией на изменения внешней среды и одинаковой стратегией развития;
- предложен и исследован новый подход в оболочечном анализе данных в случае неоднородной выборки, основанный на предположении, что неоднородность возникает из-за разницы в приоритетах оцениваемых альтернатив; найдены условия эффективности этого подхода;
- в рамках исследования поведенческой модели биржи была проведена серия экспериментов, которая показала, что существует критический уровень опыта (или удачливости) агентов, такой что агенты, имеющие показатель успешности распознавания движения цен, превышающий этот критический уровень, почти наверняка «выживут» на рынке; если агент не использует возможности маржинальной торговли и заключает сделки только на собственный капитал, то такой критический уровень располагается чуть выше  $\frac{1}{2}$ ; если же трейдер торгует с использованием заемных средств, то критическое значение будет намного выше и для успешной долговременной торговли на рынке потребуется высокая вероятность принятия верных решений;
- в рамках анализа эффективности функционирования финансового сектора экономики было проведено моделирование оптимального хеджирующего соотношения с учетом междневного и внутридневного рисков торговых позиций; показано, что средняя междневная доходность значимо больше средней внутридневной, а дисперсия междневной доходности значимо меньше дисперсии внутридневной;

- на основе разработанной ранее теоретико-игровой модели стратегического взаимодействия банков проанализирован выбор стратегии банком в условиях регулирования системно значимых банков и в зависимости от выбранных параметров регулирования; подтвержден вывод о том, что регулирование может негативно скажаться на уровне кредитования в экономике, и определены основные факторы, влияющие на величину издержек введения регулирования;
- в рамках применения методов теории коллективного выбора для построения ранжирований в различных прикладных задачах, с помощью ординальных методов агрегирования известных библиометрических показателей были построены пять новых (агрегированных) рейтингов научных журналов по экономике, менеджменту и политологии; корреляционный анализ этих ранжирований показал, что они являются более эффективными с точки зрения их согласованности между собой, чем отдельные библиометрические показатели, а также обладают различным уровнем устойчивости;
- исследованы простые и суперпозиционные (двухступенчатые) процедуры коллективного выбора на предмет выполнения для них условий рациональности, монотонности и пороговой некомпенсируемости;
- в рамках разработки организационных моделей и механизмов исследована задача нахождения оптимального объема производства электроэнергии генератором, конкурентоспособность возобновляемых источников энергии, а также конкурентоспособность систем хранения электроэнергии;
- исследована обобщенная проблема банкротства, которая ближе к реальной экономической практике, чем классическая постановка; показано существование ядра в ассоциированной с проблемой игре и построено одноточечное решение (пренуклеолус), гарантирующее отсутствие дальнейших банкротств;
- предложен и исследован новый способ анализа формирования картельных соглашений как некооперативной игры, в которой стратегиями игроков являются коалиции, к которым эти игроки (фирмы) желают примкнуть; предложен и проанали-

- зирован набор аксиом относительно функции, которая определяет зависимость итоговой коалиционной структуры от стратегий игроков;
- в рамках исследования обобщенных паросочетаний доказано, что в случае, когда предпочтения заданы интервальными порядками, существует устойчивое паросочетание;
  - показана связь между устойчивыми обобщенными паросочетаниями и системами проходных баллов, используемыми при распределении абитуриентов по вузам и других прикладных задачах; показано существование устойчивого паросочетания в случае применения политики «одинакового результата» для абитуриентов, набравших одинаковое число баллов;
  - аксиоматически введены и исследованы обобщенные индексы влияния, зависящие от предпочтения участников; показана их взаимосвязь с классическими индексами; доказаны теоремы о среднем для обобщенных индексов влияния;
  - в рамках исследования моделей этнополитической напряженности проанализированы основные индексы этнической гетерогенности; дан обзор основных способов нахождения важнейшего параметра этих индексов – расстояния между этническими группами; рассмотрено применение индексов этнической гетерогенности в различных задачах социально-экономического и политического анализа;
  - в рамках исследования влияния фракций и групп в Верховной Раде Украины за период 1990–2012 гг. было показано, что влияние фракций и групп, оцененное с помощью индекса Банцафа, не всегда зависит от доли их мест в парламенте; оценки распределения влияния, проведенные с помощью  $\alpha$ -индекса, учитывающего предпочтения, и индекса Банцафа часто значительно отличаются; показано, что фракции и группы, занимающие центристское положение, увеличивают свое влияние, в то время как радикальные фракции и группы уменьшают его;
  - в рамках исследования по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов развита общая методология агрегирования (суммаризации) данных; проведена серия экспериментов по сравнению методов оценки близости между строкой и текстом для решения задач автоматизации аннотирования статей;

показана эффективность разработанной ранее меры близости на основе аннотированного суффиксного дерева по сравнению с двумя наиболее популярными методами, рассматриваемыми в международной научной литературе;

- введено и исследовано понятие волатильности в кластер-анализе данных; разработан новый алгоритм кластеризации на основе вычисления волатильности; проанализированы результаты работы этого алгоритма на модельных и реальных данных; проведено его сравнение с другими алгоритмами;
- в ходе исследования изменений качественных характеристик свидетельств при их комбинировании в рамках теории Демпстера–Шейфера, определен и исследован индекс уменьшения незнания при комбинировании свидетельств; найдены достаточные условия уменьшения этого индекса для некоторых правил комбинирования и определенных типах свидетельств; аксиоматически введена мера конфликта между свидетельствами; найден общий вид билинейной меры конфликта; статистически и аналитически исследована взаимосвязь между мерой конфликта и индексом уменьшения незнания для разных типов свидетельств;
- в рамках исследования устойчивости нахождения параметров симметрии зашумленных изображений аксиоматически введены меры и функционалы глобальной несимметричности незашумленных и зашумленных изображений; показано, что некоторые из функционалов несимметричности не обладают устойчивостью к уровню зашумления изображений; найдены достаточные и необходимые условия, при которых оси симметрии, вычисленные с помощью функционалов несимметричности, остаются неизменными.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	13
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ .....	22
1 Исследование моделей коллективного и многокритериального принятия решений.....	22
1.1 Разработка новых решающих правил для многокритериальных задач в рамках теории важности критериев .....	23
1.1.1 Сведения из теории важности критериев.....	23
1.1.2 Матричные решающие правила .....	27
1.1.3 Двойственные решающие правила .....	29
1.1.4 Аналитическое двойственное решающее правило для случая критериев с порядковой шкалой .....	31
1.1.5 Аналитические решающие правила для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида.....	31
1.1.6 Некоторые выводы .....	35
1.2 Построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений .....	37
1.2.1 Расчет коалиционной манипулируемости.....	38
1.2.2 Вероятностные модели коллективных предпочтений .....	47
1.2.3 Формальное описание правил подсчета очков и пороговой модели.....	53
1.2.4 Некоторые выводы .....	64
1.3 Исследования по анализу научометрических данных .....	66
1.3.1 Применения метода анализа паттернов к исследованию взаимосвязей между наукой, образованием и инновационной деятельностью в регионах России.....	66
1.3.2 Исследования применимости оболочечного анализа данных к анализу неоднородных выборок.....	73
1.4 Исследование поведенческой модели биржи .....	94
1.4.1 Описание модели .....	96
1.4.2 Результаты моделирования.....	103
1.4.3 Некоторые выводы .....	113
1.5 Анализ эффективности функционирования банковского и финансового секторов экономики .....	115
1.5.1 Моделирование оптимального хеджирующего соотношения с учетом междневного и внутридневного рисков торговых позиций .....	115
1.5.2 Моделирование последствий регулирования российских национальных системно значимых банков.....	137
1.6 Применение методов теории коллективного выбора для построения ранжирований научных журналов.....	157
1.6.1 Библиометрические индексы.....	158
1.6.2 Описание данных.....	165
1.6.3 Построение агрегирующих рейтингов методами теории коллективного выбора .....	166
1.6.4 Корреляционный анализ .....	174
1.6.5 Некоторые выводы .....	176
1.7 Исследование свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции.....	179

1.7.1 Основная часть.....	182
1.7.2 Исследование свойств процедур выбора.....	193
1.7.3 Некоторые выводы .....	197
2 Исследования по конструированию экономических механизмов.....	198
2.1 Исследования организационных моделей и механизмов .....	198
2.1.1 Постановка задачи .....	202
2.1.2 Математическая формулировка задачи .....	206
2.1.3 Основной результат.....	223
2.1.4 Некоторые выводы .....	224
2.2 Теоретико-игровой анализ обобщенной задачи банкротства .....	226
2.2.1 Описание модели .....	227
2.2.2 Основные результаты .....	228
2.2.3 Некоторые выводы .....	230
2.3 Некооперативный анализ карельных соглашений .....	231
2.3.1 Формализация некооперативной игры .....	234
2.3.2 Аксиоматика функций разбиения .....	235
2.3.3 Единственность согласованного разбиения и существование равновесий .....	240
2.3.4 Связь между аксиомами.....	242
2.3.5 Некоторые выводы .....	242
2.4 Развитие теории обобщенных паросочетаний и их применение.....	243
2.4.1 Обобщенные паросочетания при предпочтениях, являющихся интервальными порядками.....	243
2.4.2 Проходные баллы и устойчивые паросочетания.....	249
2.4.3 Некоторые выводы .....	261
3 Исследование моделей принятия решений в политической сфере.....	263
3.1 Исследование и развитие моделей индексов влияния .....	263
3.1.1 Простые игры и индексы влияния .....	264
3.1.2 Игры и индексы влияния, зависящие от предпочтений участников .....	269
3.1.3 Аксиомы индексов влияния.....	273
3.1.4 Основные результаты.....	274
3.1.5 Некоторые выводы .....	278
3.2 Исследование моделей этнополитической напряженности .....	280
3.2.1 Определения индексов .....	284
3.2.2 Расстояния между группами.....	289
3.2.3 Применение индексов этнической гетерогенности.....	300
3.2.4 Отечественные исследования этничности .....	312
3.2.5 Некоторые выводы .....	315
3.3 Распределение влияния между фракциями и группами в Верховной Раде Украины (1990 – 2012 гг.) .....	316
3.3.1 Краткая история современного парламентаризма в Украине .....	319
3.3.2 Верховная Рада Украины 1-го созыва (1990 – 1994 гг.) .....	320
3.3.3 Верховная Рада Украины 2-го созыва (1994 – 1998).....	323
3.3.4 Верховная Рада Украины 3-го созыва (1998 – 2002).....	324

3.3.5 Верховная Рада Украины 4-го созыва (2002 – 2006).....	327
3.3.6 Верховная Рада Украины 5-го созыва (2006 – 2007).....	330
3.3.7 Верховная Рада Украины 6-го созыва (2007 – 2012).....	332
3.3.8 Оценка влияния фракций и групп в Верховной Раде Украины с учетом их предпочтений в формировании коалиций.....	335
3.3.9 Некоторые выводы .....	344
<b>4 Исследования по анализу данных .....</b>	<b>346</b>
<b>4.1 Теоретико-экспериментальные исследования по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов.....</b>	<b>346</b>
4.1.1 Схема автоматизации задач суммаризации данных.....	347
4.1.2 Цели кластер-анализа .....	355
4.1.3 Применение общих принципов для автоматизации рубрикации научных статей.....	359
4.1.4 Некоторые выводы .....	378
<b>4.2 Исследования по кластерному анализу социально-экономических данных.....</b>	<b>380</b>
4.2.1 Структура алгоритма.....	383
4.2.2 Новый частотный алгоритм дихотомии .....	385
4.2.3 Дивизимно-агломеративный кластерный алгоритм.....	397
4.2.4 Алгоритм построения кластеров.....	401
4.2.5 Примеры применения алгоритма .....	408
4.2.6 Сравнение с другими результатами .....	418
4.2.7 Некоторые выводы .....	423
<b>4.3 Исследование изменений качественных характеристик свидетельств при их комбинировании в рамках теории Демпстера–Шейфера .....</b>	<b>424</b>
4.3.1 Некоторые сведения из теории Демпстера–Шейфера .....	426
4.3.2 Изменение незнания .....	430
4.3.3 Мера конфликта .....	438
4.3.4 Зависимость между конфликтом и незнанием .....	441
4.3.5 Некоторые выводы .....	446
<b>4.4 Исследование устойчивости нахождения параметров симметрии зашумленных изображений.....</b>	<b>448</b>
4.4.1 Осесимметричное изображение и меры несимметричности.....	450
4.4.2 Функционалы несимметричности стационарно зашумленного изображения .....	455
4.4.3 Об устойчивости оси симметрии к стационарному зашумлению изображения .....	458
4.4.4 Некоторые выводы .....	460
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>462</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>467</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А Таблицы и рисунки к подразделу 1.4 .....</b>	<b>509</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б Таблицы и рисунки к пункту 1.5.1 .....</b>	<b>512</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В Таблицы к подразделу 1.6.....</b>	<b>522</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Г Сокращения и таблицы к подразделу 3.3 .....</b>	<b>539</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Д Таблицы к подразделу 4.2.....</b>	<b>542</b>

## ВВЕДЕНИЕ

В данном отчете представлены результаты работы в 2013 году коллектива сотрудников Международной научно-учебной лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ над проектом «Исследование новых методов и подходов в области математического моделирования и дизайна механизмов в социальной, экономической и политической сферах». Проект был направлен, прежде всего, на развитие новых методов и подходов обработки и анализа информации в социально-политической и экономической сферах и конструирования механизмов достижения оптимальных решений или принятия решений с учетом многокритериальности задач, неточности данных, возможности манипулирования данными и т.д.

В соответствии с техническим заданием были проведены исследования в следующих основных научных направлениях:

- исследование моделей коллективного и многокритериального принятия решений;
- исследования по конструированию экономических механизмов;
- исследование моделей принятия решений в политической сфере;
- теоретико-экспериментальные исследования по анализу данных.

Работа над данным проектом стала продолжением исследований, проводимых в международной научно-учебной лаборатории анализа и выбора решений в 2012 г. в ходе работы над проектом «Математическое моделирование и конструирование механизмов в социальной, экономической и политической сферах с использованием методов теории принятия решений, теории игр и интеллектуального анализа данных». В частности, в 2012 г. были получены следующие новые теоретические результаты:

- исследованы алгебраические свойства вероятностной модели IANC (Impartial Anonymous and Neutral Culture model) в задаче оценивания степени манипулируемости правил коллективного выбора;
- найдено, насколько индекс манипулируемости в модели IANC отличается от индекса в базовой модели IC (Impartial Culture model);

- показано, что задачи организации государственно-частного партнерства по выполнению капиталоемких проектов, организации взаимодействия региональных брокеров и оценки целесообразности инвестирования капитала в перепрофилирование предприятий с целью их последующего позиционирования на интересующих инвестора рынках могут рассматриваться как игровые задачи на полиздральних множествах допустимых стратегий игроков, и могут решаться в рамках проведения конкурсных процедур, в которых организаторы процедур могут выбирать начальные допустимые ставки игроков из решения вспомогательных задач дискретной оптимизации;
- показана возможность использования методов дискретной оптимизации и линейного программирования для обоснованного отыскания начальных цен (ставок) в конкурсных процедурах;
- показано, что преимущества той или иной процедуры голосования при выборе в совет директоров акционерной компании зависят от структуры собственности: при наличии доминирующего собственника прямое голосование будет сопровождаться меньшими издержками принятия решений; при распыленной структуре собственности прямое голосование сопровождается издержками создания коалиций;
- проанализирован проциклический эффект от введения системы банковского регулирования Базель II; даны рекомендации по снижению этого эффекта;
- исследована зависимость использования деривативов европейскими банками от стоимости этих организаций;
- в рамках теории важности критериев разработаны два аналитических ординальных решающих правила (основанных на предположении существования кардинальных коэффициентов важности) и одно алгоритмическое ординальное решающее правило (не опирающегося на такое предположение) для многокритериальных задач принятия решений, в которых все критерии упорядочены по важности и имеют шкалу первой порядковой метрики;
- модифицирован метод анализа текстов с помощью аннотированных суффиксных деревьев; этот метод применен для установления связей между корпусами текстов

- и совокупностью ключевых словосочетаний, для установления связей между корпусами текстов и таксономией предметной области, для автоматизации построения таксономии с использованием компетентных разработок и ресурсов интернета;
- введены и исследованы усредненные стохастические меры информативности, определенные на множестве случайных признаков недетерминистской системы; поставлены и исследованы некоторые оптимизационные задачи нахождения минимальных и устойчивых к зашумлению представлений контурных изображений с помощью геометрической меры информативности по длине;
  - в рамках исследования поведенческой модели биржи поставлена и решена оптимизационная задача нахождения порога разделения кризисных и регулярных событий;
  - исследована задача о совпадении позиций кандидатов в модели вероятностного голосования в случае предельной нейтральности избирателей при конвергентных позициях;
  - построены аксиоматики для основных индексов влияния в задаче голосования с квотой;
  - исследована задача расширения классической модели обобщенных паросочетаний на случай предпочтений, являющихся простейшими полупорядками; показано, что всегда существует устойчивое паросочетание и, обратно, любое устойчивое паросочетание можно получить, рассмотрев некоторое линейное расширение исходных предпочтений агентов; получены необходимые и достаточные условия эффективности устойчивого паросочетания с точки зрения абитуриентов в абитуриентской компании;
  - в рамках применения методов выбора и ранжирования альтернатив в мажоритарном графе построены агрегированные ранжирования стран по уровню их демократического развития, построена классификация стран по степени их конкурентоспособности;
  - разработано обучающее программное обеспечение, решающее задачи оптимального выбора и ранжирования альтернатив (электронное приложение к учебнику и

задачнику Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. «Бинарные отношения, графы и коллективные решения»);

- в рамках модели справедливого дележа и для различных определений справедливости рассмотрена наиболее общая постановка (любое число участников при наличии как делимых, так и неделимых пунктов); установлена общая структура множества достижимости и разработан алгоритм, позволяющий найти конечное множество в пространстве доходов;
- разработаны или модифицированы алгоритмы выбора вариантов для большого числа альтернатив (в частности, для интернет-данных); разработан метод классификации поисковых запросов и формирования списка наиболее релевантных страниц; модифицирован метод поиска наилучших альтернатив с помощью модели суперпозиции надпороговых процедур;
- с помощью модели оболочечного анализа данных (Data Envelopment Analysis, DEA) проанализирован потенциал российских государственных ВУЗов как в области образовательной, так и научно-учебной деятельности; выявлены группы ВУЗов с высокой, средней и низкой результативностью относительно научно-учебной деятельности.

Исследования 2013 года, выполненные в ходе реализации данного проекта, с одной стороны развиваются некоторые из указанных исследований прошлого года, а с другой стороны, используют предыдущие исследования.

Методологической основой исследований служат теория коллективного и индивидуального выбора, теория игр (в частности, конструирование экономических механизмов), теория многокритериального принятия решений, теория интеллектуального анализа данных. Основными средствами и методами исследований являются процедуры оптимизации, численные и комбинаторные методы, методы статистического и кластерного анализа данных, методы теории вероятностей и др.

Техническим средством исследования служат электронные вычислительные машины. Для прикладных исследований использовались интернет-данные, базы

данных по публикациям экономической тематики, базы данных приемной кампании в вузы и др.

Данный отчет состоит из 4 разделов, соответствующих основным направлениям исследований, проводимых в ходе выполнения данного проекта и 5 приложений.

В первом разделе приведены результаты исследований моделей коллективного и многокритериального принятия решений. Эти исследования осуществлялись по нескольким направлениям.

В частности, в рамках развития теории важности критериев в подразделе 1.1 найдены аналитические или оптимизационные решающие правила для случая, когда шкала критериев является порядковой или является шкалой первой порядковой метрики в ряде частных случаев, а также в общем случае. Кроме того, разработан общий подход к построению двойственных решающих правил в рамках теории важности критериев.

В подразделе 1.2 приведены результаты исследования моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений. В частности, в ходе этих исследований была предложена модификация индекса Нитцана–Келли для оценки коалиционной манипулируемости правил коллективного выбора, впервые произведен расчет индексов коалиционной манипулируемости для ряда правил и для различных ограничений на размер коалиции, найден предел максимальной разности индексов манипулируемости в моделях IC и IANC, IAC и IANC при бесконечном увеличении числа избирателей или числа альтернатив. Кроме того, показано, что правило порогового агрегирования является в то же время правилом подсчета очков, найдены значения вектора весов, при которых простое правило подсчета очков дает тот же результат, что и правило порогового агрегирования.

В подразделе 1.3 приведены результаты исследования по анализу наукометрических данных. В частности, выявлены регионы РФ со схожей структурой социально-экономического развития на основе применения метода анализа паттернов. Кроме того, в рамках исследования по анализу наукометрических данных, продолжен цикл ранее начатых работ по применимости и развитию оболочечного анализа данных к оцениванию эффективности работы множества субъектов (компаний, универ-

ситетов и т.д.). В частности, предложен и исследован новый подход в оболочечном анализе данных в случае неоднородной выборки, основанный на предположении, что неоднородность возникает из-за разницы в приоритетах оцениваемых альтернатив. Найдены условия эффективности этого подхода.

В подразделе 1.4 отражены новые результаты, полученные в рамках ранее начатых исследований поведенческой модели биржи. В частности, была проведена серия экспериментов, которая подтвердила ряд выводов разрабатываемой теоретической модели биржи.

В подразделе 1.5 в рамках анализа эффективности функционирования финансового сектора экономики было проведено моделирование оптимального хеджирующего соотношения с учетом междневного и внутридневного рисков торговых позиций; показано, что средняя междневная доходность значимо больше средней внутридневной, а дисперсия междневной доходности значимо меньше дисперсии внутридневной.

Кроме того, в этом же подразделе на основе разработанной ранее теоретико-игровой модели стратегического взаимодействия банков проанализирован выбор стратегии банком в условия действия регулирования системно значимых банков и в зависимости от выбранных параметров регулирования. В частности, подтвержден вывод о том, что регулирование может негативно сказаться на уровне кредитования в экономике, и определены основные факторы, влияющие на величину издержек введения регулирования.

В подразделе 1.6 приведены результаты применения методов теории колективного выбора для построения ранжирований в различных прикладных задачах. В частности, с помощью ординальных методов агрегирования известных библиометрических показателей были построены пять новых (агрегированных) рейтингов научных журналов по экономике, менеджменту и политологии. Корреляционный анализ этих ранжирований показал, что они являются более эффективными с точки зрения их согласованности между собой, чем отдельные библиометрические показатели, а также обладают различной степенью устойчивости.

Наконец в последнем подразделе 1.7 приведены результаты исследования простых и суперпозиционных (двухступенчатых) процедур коллективного выбора на предмет выполнения для них условий рациональности, монотонности и пороговой некомпенсируемости.

Во втором разделе приведены результаты по конструированию экономических механизмов. Эти исследования также осуществлялись по нескольким направлениям.

В подразделе 2.1 приведены результаты разработки новых организационных моделей и механизмов. В частности, исследована задача нахождения оптимального объема производства электроэнергии генератором, конкурентоспособность возобновляемых источников энергии, а также конкурентоспособность систем хранения электроэнергии.

В подразделе 2.2 приведены результаты исследования обобщенной проблемы банкротства, которая ближе к реальной экономической практике, чем классическая постановка задачи. Показано существование ядра в ассоциированной с проблемой игре и построено одноточечное решение (пренуклеолус), гарантирующее отсутствие дальнейших банкротств.

В подразделе 2.3 предложен и исследован новый способ анализа формирования картельных соглашений как некооперативной игры, в которой стратегиями игроков являются коалиции, к которым эти игроки (фирмы) желают примкнуть. Предложен и проанализирован набор аксиом относительно функции, которая определяет зависимость итоговой коалиционной структуры от стратегий игроков.

Наконец в подразделе 2.4 приведены результаты исследования обобщенных паросочетаний. В частности, доказано, что в случае, когда предпочтения заданы интервальными порядками, существует устойчивое паросочетание. В качестве приложения развития теории обобщенных паросочетаний, показана связь между устойчивыми обобщенными паросочетаниями и системами проходных баллов, используемыми при распределении абитуриентов по вузам и других прикладных задачах.

Третий раздел отчета посвящен результатам исследований моделей принятия решений в политической сфере.

В подразделе 3.1 приведены результаты теоретических исследований важных для моделирования поведения участников политических процессов, так называемых индексов влияния. В частности, в этом подразделе построена аксиоматика для обобщенных индексов влияния, зависящих от предпочтения участников. Показана взаимосвязь таких индексов с классическими индексами и доказаны теоремы о среднем для обобщенных индексов влияния.

В подразделе 3.2 проанализированы основные индексы этнической гетерогенности общества. Рассмотрено применение индексов этнической гетерогенности в различных задачах социально-экономического и политического анализа.

В подразделе 3.3 приведены результаты исследований изменения влияния фракций и групп в Верховной Раде Украины за период 1990–2012 гг. Оценка влияния проводилась как с помощью классических индексов влияния (например, с помощью индекса Банцафа), так и с помощью обобщенных индексов, учитывающих предпочтения. Показано, что эти оценки распределения влияния часто значительно отличаются и не всегда соответствуют количеству мест, занимаемых фракциями и группами в парламенте.

Четвертый раздел отчета посвящен результатам исследований в области анализа данных. В подразделе 4.1 приведены результаты теоретико-экспериментального исследования по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов. В частности, показана эффективность разработанной ранее меры оценки близости между строкой и текстом на основе аннотированного суффиксного дерева для решения задач автоматизации аннотирования статей по сравнению с двумя наиболее популярными методами, рассматриваемыми в международной научной литературе.

В подразделе 4.2 введено и исследовано новое понятие волатильности в кластер-анализе данных. В этом же подразделе приведено описание нового алгоритма кластеризации на основе вычисления волатильности. Проанализированы результаты работы этого алгоритма на модельных и реальных данных и проведено его сравнение с другими алгоритмами.

В подразделе 4.3 приведены результаты исследования изменений качественных характеристик свидетельств при их комбинировании в рамках теории Демпстера–Шейфера. В частности, определен и исследован индекс уменьшения незнания при комбинировании свидетельств, найдены достаточные условия уменьшения этого индекса для некоторых правил комбинирования и определенных типах свидетельств. Кроме того, аксиоматически введена мера конфликта между свидетельствами и найден общий вид билинейной меры конфликта. В этом же подразделе приведены результаты статистического и аналитического исследования взаимосвязи между мерой конфликта и индексом уменьшения незнания для разных типов свидетельств.

В подразделе 4.4 приведены результаты исследования устойчивости нахождения параметров симметрии зашумленных изображений. В частности, аксиоматически введены меры и функционалы глобальной несимметричности незашумленных и зашумленных изображений. Показано, что некоторые из таких функционалов не обладают устойчивостью к уровню зашумления изображений. Кроме того, в этом же подразделе найдены достаточные и необходимые условия, при которых оси симметрии, вычисленные с помощью функционалов несимметричности, остаются неизменными.

В Заключении приведены краткие выводы по результатам выполнении НИР и даны рекомендации по конкретному использованию их результатов.

В Приложениях А, Б, В, Г, Д приведены некоторые дополнительные таблицы и рисунки к отдельным подразделам отчета.

Все полученные результаты являются новыми. Их значимость подтверждена многочисленными аprobациями на международных конференциях и авторитетных семинарах. Кроме того, практически все представленные результаты опубликованы, в том числе в реферируемых научных изданиях.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В рамках заявленной темы проекта «Исследование новых методов и подходов в области математического моделирования и дизайна механизмов в социальной, экономической и политической сферах» были проведены исследования в следующих основных научных направлениях:

- исследование моделей коллективного и многокритериального принятия решений;
- исследования по конструированию экономических механизмов;
- исследование моделей принятия решений в политической сфере;
- теоретико-экспериментальные исследования по анализу данных.

### 1 Исследование моделей коллективного и многокритериального принятия решений

В этом разделе отчета приведены результаты исследований моделей коллективного и многокритериального принятия решений. Результаты в рамках исследования этого раздела были получены в следующих теоретических и прикладных направлениях:

- разработка новых решающих правил для многокритериальных задач в рамках теории важности критериев;
- построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений;
- исследования по анализу наукометрических данных;
- разработка и исследование поведенческой модели биржи;
- анализ эффективности функционирования банковского и финансового секторов экономики;
- применение методов теории коллективного выбора к ранжированию данных;
- исследование свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции.

## 1.1 Разработка новых решающих правил для многокритериальных задач в рамках теории важности критериев

В отличие от всех известных методов анализа многокритериальных задач принятия решений, использующих оценки важности критериев [22, 23, 72], теория важности критериев (ТВК) основана на точных определениях понятий равенства и пре-восходства в важности одних критериев над другими (библиографию см. [40, 42]). В ней разработаны решающие правила для ряда комбинаций различных видов информации о важности критериев и их шкале, задающие соответствующие бинарные отношения предпочтения и безразличия.

В отчете представлено несколько принципиально новых решающих правил, которые охватывают не охваченные ранее комбинации видов информации или же проще, чем известные [36], в вычислительном отношении.

### 1.1.1 Сведения из теории важности критериев

Дальнейшее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия (индивидуального) решения в условиях определенности при многих критериях:

$$M = \langle \tau, X, f_1, \dots, f_m, Z_0, R \rangle,$$

где  $\tau$  – тип постановки задачи (выбрать один лучший вариант или же заданное число лучших вариантов, упорядочить все варианты по предпочтительности и т.д.);  $X$  – множество вариантов (число вариантов не менее двух),  $f_1, \dots, f_m$  – критерии ( $m \geq 2$ ),  $Z_0 = \{1, \dots, q\}$  – множество шкальных градаций, или, кратко, шкала критериев ( $q \geq 2$ ),  $R$  – отношение нестрогого предпочтения. Под критерием  $f_i$  понимается функция, определенная на  $X$  и принимающая значения из  $Z_0$ . Отметим, что критерии с общей шкалой называются однородными [34, 40]. Критерии  $f_i$  образуют векторный критерий  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Каждый вариант  $x$  из множества  $X$  характеризуется его векторной оценкой  $y(x) = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ . Множество всех векторных оценок есть

$Z = Z_0^m$ . Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок.

*Отношение нестрогого предпочтения*  $R$  определяется на множестве  $Z$ :  $yRz$  означает, что векторная оценка  $y$  не менее предпочтительна, чем векторная оценка  $z$ . Отношение  $R$  порождает отношение безразличия  $I$  и (строгого) предпочтения  $P$ :  $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$ ;  $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$  (запись  $zRy$  означает, что  $zRy$  неверно). Далее полагается, что отношение  $R$  есть частичный квазипорядок (оно рефлексивно:  $yRy$  верно для любого  $y \in Z$ , и транзитивно: для любых  $y, z, u \in Z$  из  $yRz$  и  $zRu$  следует  $yRu$ ), так что отношение  $P$  – строгий частичный порядок (оно иррефлексивно:  $yRy$  для любого  $y \in Z$ , и транзитивно), а отношение  $I$  – эквивалентность (оно рефлексивно, транзитивно и симметрично: для любых  $y, z \in Z$  из  $yRz$  следует  $zRy$ ). При разработке математической модели  $M$  отношение  $R$  строится (выявляется полностью или только частично) на основе информации о предпочтениях лица, принимающего решение (ЛПР). Правило, задающее указанным образом отношение  $R$ , называется *решающим правилом*.

Предполагается, что каждый из критериев независим по предпочтению от остальных и его большие значения предпочтительнее мёньших. Другими словами, если  $v_k$  – (неизвестная) ценность градации  $k \in Z_0 = \{1, \dots, q\}$ , то

$$v_1 < v_2 < \dots < v_q \quad (1.1)$$

(это и означает, что предпочтения возрастают вдоль шкалы критериев). Таким образом, если о ценностях градаций известно лишь, что выполнены неравенства (1.1), то шкала критериев является порядковой, а числа  $k$  в  $Z_0$  отражают лишь упорядоченность градаций по предпочтительности.

Далее для векторов из  $\mathbb{R}^n$  (при  $n \geq 2$ ) будем использовать следующие обозначения:

$$a \geqq b \Leftrightarrow (a_i \geq b_i, i = 1, \dots, n); \quad a \geq b \Leftrightarrow (a \geqq b, a \neq b); \quad a > b \Leftrightarrow (a_i > b_i, i = 1, \dots, n).$$

Если никакой информации о предпочтениях ЛПР нет, то в роли отношения  $R$  выступает отношение Парето  $R^0$ , которое с учетом принятого допущения о том, что

с ростом номера градации растет ее ценность, определяется на  $Z$  следующим образом:

$$yR^0z \Leftrightarrow y \geq z.$$

Отметим, что отношение нестрогого предпочтения  $R^0$  порождает отношение безразличия  $I^0$ , являющееся отношением равенства векторов, и отношение (строгого) предпочтения  $P^0$ , определяемое так:  $yP^0z \Leftrightarrow y \geq z$ .

Пусть имеется качественная информация о важности критериев  $\Omega$ , состоящая из сообщений вида  $i \approx j$  (критерии  $f_i$  и  $f_j$  равноважны) и  $i > j$  (критерий  $f_i$  важнее критерия  $f_j$ ). Точные определения этих понятий даны в [35, 37, 149, 150]. Решающее правило, задающее отношение  $R^\Omega$  с использованием информации о важности  $\Omega$ , в общем случае является комбинаторным.

Информации  $\Omega$  соответствуют *коэффициенты важности*  $\alpha_i$  – положительные числа, в сумме равные единице и удовлетворяющие условиям:

$$i > j \in \Omega \Rightarrow \alpha_i > \alpha_j, \quad i \approx j \in \Omega \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j. \quad (1.2)$$

Далее будем полагать, что информация  $\Omega$  является полной и непротиворечивой, т.е. она упорядочивает по важности все критерии. Для простоты записи будем считать, что все критерии упорядочены и перенумерованы в порядке невозрастания их относительной важности (так что наиболее важен критерий  $f_1$ , а  $f_m$  – наименее важный критерий). При такой информации соответствующие ей коэффициенты важности (они называются *порядковыми*, или *ординальными*) удовлетворяют неравенствам:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_m > 0; \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1, \quad (1.3)$$

где каждое нестрогое неравенство является строгим неравенством или же равенством в соответствии с (1.2).

Для рассматриваемой информации  $\Omega$  при порядковой шкале критериев (1.1) в теории важности критериев было разработано аналитическое решающее правило [36, 37, 149]. Чтобы его описать, введем в рассмотрение числа

$$\alpha_{ik}(y) = \begin{cases} \alpha_i, & y_i > k, \\ 0, & y_i \leq k, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (1.4)$$

Эти числа составляют  $(m \times (q-1))$ -матрицу

$$A(y) = (\alpha_{ik}(y)), \quad (1.5)$$

соответствующую векторной оценке  $y$ . Если  $y_i = k$ , то первые  $k-1$  элементов  $i$ -й строки этой матрицы равны  $\alpha_i$ , а следующие  $q-k$  её элементов равны нулю. Через  $\alpha^k(y)$  обозначим вектор, составленный из элементов  $k$ -го столбца матрицы  $A(y)$ :

$$\alpha^k(y) = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{mk}). \quad (1.6)$$

Пусть  $\psi^{(n)}(a)$  – вектор-функция, упорядочивающая компоненты вектора  $a \in \mathbb{R}^n$  в порядке их невозрастания (так что  $\psi_1^{(n)}(a) = \max_i a_i$ ,  $\psi_n^{(n)}(a) = \min_i a_i$ ).

Аналитическое решающее правило, задающее отношение  $R^\Omega$ , выглядит так:

$$y R^\Omega z \Leftrightarrow \psi^{(m)}(\alpha^k(y)) \geq \psi^{(m)}(\alpha^k(z)), \quad k=1, \dots, q-1, \quad (1.7)$$

причем если в (1.7) хотя бы одно нестрогое векторное неравенство  $\geq$  выполняется как  $\geq$ , то  $y R^\Omega z$ ; в противном случае (когда все  $\geq$  выполняются как равенства)  $y I^\Omega z$ .

Пусть дополнительно известно, что рост предпочтений вдоль  $Z_0$  замедляется или же ускоряется, т.е. выполняются первые или же вторые цепочки неравенств соответственно (здесь полагается, что число градаций  $q \geq 3$ ):

$$v_2 - v_1 > v_3 - v_2 > \dots > v_q - v_{q-1}; \quad (1.8)$$

$$v_2 - v_1 < v_3 - v_2 < \dots < v_q - v_{q-1}. \quad (1.9)$$

Такая шкала называется шкалой первой порядковой метрики [102]. Информацию (1.1), (1.8) (соответственно (1.1), (1.9)) о ценности шкальных градаций обозначим  $\Delta \downarrow$  (соответственно  $\Delta \uparrow$ ).

Обозначим через  $\alpha^{[1,k]\downarrow}(y)$  вектор, составленный из первых  $k$  векторов  $\alpha^k(y)$  (см. (1.3)), т.е. из первых  $k$  столбцов матрицы  $A(y)$  векторной оценки  $y$ :

$$\alpha^{[1,k]\downarrow}(y) = (\alpha^1(y), \dots, \alpha^k(y)) = (\alpha_{11}(y), \dots, \alpha_{ml}(y), \alpha_{12}(y), \dots, \alpha_{m2}(y), \dots)$$

$$\dots, \alpha_{l(k-1)}(y), \dots, \alpha_{m(k-1)}(y), \alpha_{lk}(y), \dots, \alpha_{mk}(y)).$$

Аналитическое решающее правило для отношения  $R^{\Omega\Delta\downarrow}$ , задаваемого информацией и  $\Omega\&\Delta\downarrow$ , таково [28]:

$$yR^{\Omega\Delta\downarrow}z \Leftrightarrow \psi^{(mk)}(\alpha^{[1,k]\downarrow}(y)) \geq \psi^{(mk)}(\alpha^{[1,k]\downarrow}(z)), \quad k = 1, \dots, q-1; \quad (1.10)$$

при этом если в (1.10) все нестрогие неравенства  $\geq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^{\Omega\Delta\downarrow}z$ , а если хотя бы одно из  $\geq$  выполняется как  $\geq$ , то верно  $yP^{\Omega\Delta\downarrow}z$ .

Обозначим через  $\alpha^{[1,k]\uparrow}(y)$  вектор, составленный из последних  $q-k$  векторов  $\alpha^k(y)$  (см. (1.6)), т.е. из последних  $q-k$  столбцов матрицы  $A(y)$  векторной оценки  $y$  (см. (1.5)):

$$\begin{aligned} \alpha^{[1,k]\uparrow}(y) &= (\alpha^k(y), \dots, \alpha^{q-1}(y)) = (\alpha_{lk}(y), \dots, \alpha_{mk}(y), \alpha_{l(k+1)}(y), \dots, \alpha_{m(k+1)}(y), \dots \\ &\dots, \alpha_{l(q-2)}(y), \dots, \alpha_{m(q-2)}(y), \alpha_{l(q-1)}(y), \dots, \alpha_{m(q-1)}(y)). \end{aligned}$$

Аналитическое решающее правило для отношения  $R^{\Omega\Delta\uparrow}$ , задаваемого информацией и  $\Omega\&\Delta\uparrow$ , выглядит так [28]:

$$yR^{\Omega\Delta\uparrow}z \Leftrightarrow \psi^{(mk)}(\alpha^{[1,k]\uparrow}(y)) \geq \psi^{(mk)}(\alpha^{[1,k]\uparrow}(z)), \quad k = 1, \dots, q-1; \quad (1.11)$$

при этом если в (1.11) все нестрогие неравенства  $\geq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^{\Omega\Delta\uparrow}z$ , а если хотя бы одно из  $\geq$  выполняется как  $\geq$ , то верно  $yP^{\Omega\Delta\uparrow}z$ .

### 1.1.2 Матричные решающие правила

Решающие правила (1.7), (1.10) и (1.11) используют порядковые коэффициенты важности. Оказывается, что можно обойтись и без использования этих величин. Для случая, когда шкала критериев является шкалой первой порядковой метрики, нужно еще предположить, что существуют количественные (кардинальные) коэффициенты важности [38, 151].

Пусть  $M_1$  – совокупность номеров самых важных критериев (все они равноважны), ...,  $M_\rho$  – совокупность номеров наименее важных критериев (все они равноваж-

ны), так что  $M = M_1 \cup \dots \cup M_\rho$ ,  $\rho \leq m$ . Введем в рассмотрение  $(q-1) \times \rho$ -матрицу  $n(y) = \|n_{kr}(y)\|$ , где  $n_{kr}(y)$  – число компонент  $y_i$  векторной оценки  $y$  с номерами  $i$  из групп  $M_1, \dots, M_r$ , и таких, что  $y_i > k$ .

Далее неравенства для матриц понимаются как покомпонентные.

Теорема 1.1. Для критериев с порядковой шкалой справедливо решающее правило:

$$yR^\Omega z \Leftrightarrow n(y) \geq n(z); \quad (1.12)$$

при этом если в (1.12) все нестрогие неравенства  $\geq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^\Omega z$ , а если  $\geq$  выполняется как  $>$  хотя бы для одной пары соответственных компонент матриц, то верно  $yP^\Omega z$ .

Пусть

$$n_{kr}^{[1,k]}(y) = n_{1r}(y) + \dots + n_{kr}(y), \quad n_*(y) = \|n_{kr}^{[1,k]}(y)\|;$$

$$n_{kr}^{[k,q-1]}(y) = n_{kr}(y) + \dots + n_{q-1,r}(y), \quad n^*(y) = \|n_{kr}^{[k,q-1]}(y)\|.$$

Теорема 1.2. Если существует количественная важность, то справедливо решающее правило:

$$yR^{\Omega\Delta^\downarrow} z \Leftrightarrow n_*(y) \geq n_*(z); \quad (1.13)$$

при этом если в (1.13) все нестрогие неравенства  $\geq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^{\Delta^\downarrow} z$ , а если  $\geq$  выполняется как  $>$  хотя бы для одной пары соответственных компонент матриц, то верно  $yP^{\Delta^\downarrow} z$ .

Теорема 1.3. Если существует количественная важность, то справедливо решающее правило:

$$yR^{\Omega\Delta^\uparrow} z \Leftrightarrow n^*(y) \geq n^*(z); \quad (1.14)$$

при этом если в (1.14) все нестрогие неравенства  $\geq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^{\Delta^\uparrow} z$ , а если  $\geq$  выполняется как  $>$  хотя бы для одной пары соответственных компонент матриц, то верно  $yP^{\Delta^\uparrow} z$ .

Поскольку решающие правила (1.12) – (1.14) формулируются в виде матричных неравенств, то они называются *матричными*.

### 1.1.3 Двойственные решающие правила

В решающих правилах из теорем 1.1, 1.2 и 1.3 используются матрицы, элементы которых строятся согласно номерам градаций  $k$  из шкалы критериев  $Z_0$ . Оказывается, что можно построить решающие правила, *двойственные* к указанным в этих теоремах в том смысле, что они используют векторы, строящиеся согласно номерам упорядоченных по важности критериев.

Предположим для простоты записи (это не ограничит общности), что упорядоченные информацией  $\Omega$  критерии занумерованы в порядке невозрастания их важности, так что  $f_1$  – это наиболее важный критерий. (Если имеется несколько равноважных критериев, то их можно нумеровать подряд в произвольном порядке.) Пусть  $i_r$  – номер критерия, последнего в  $r$ -й группе равноважных критериев,  $r = 1, \dots, \rho$  (отметим, что  $\rho \leq m$  и  $i_\rho = m$ ).

Пусть  $\Phi$  – множество числовых функций, являющихся допустимыми преобразованиями компонент векторных оценок, определяющее тип шкалы критериев. Например, если  $\Phi$  состоит из всех непрерывных возрастающих на  $(-\infty, +\infty)$  функций, то шкала является порядковой. Отношение нестрогого предпочтения, порождаемое информацией  $\Omega \& \Phi$ , обозначим  $R^{\Omega\Phi}$  (для порядковой шкалы символ  $\Phi$  в верхнем индексе опускается). Опираясь на результаты из [102, 128], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1.1. Если существует количественная важность, то  $y R^{\Omega\Phi} z$  верно тогда и только тогда, когда для любого  $\varphi \in \Phi$  совместной является система из  $\rho$  нестрогих неравенств:

$$\varphi(y_1) + \dots + \varphi(y_{i_r}) \geq \varphi(z_1) + \dots + \varphi(z_{i_r}), \quad r = 1, \dots, \rho. \quad (1.15)$$

Лемма позволяет конструировать решающие правила для различных типов шкал. Пусть, например, имеется дополнительная информация о том, что для разно-

стей величин ценности шкальных оценок  $\Delta_j = v(j+1) - v(j)$ ,  $j = 1, \dots, q - 1$ , справедливы, помимо (1.15), следующие неравенства для некоторой перестановки  $(j_1, \dots, j_{q-1})$  множества  $\{1, \dots, q - 1\}$ , являющиеся оценками «скорости» роста предпочтений на  $Z_0$ :  $\Delta_{j_1} > \dots > \Delta_{j_{q-1}}$ . Тогда шкала критериев оказывается шкалой первой порядковой метрики (общего вида) [102]: для нее множество  $\Phi^{\text{ord}1}$  состоит из всех возрастающих непрерывных на  $(-\infty, +\infty)$  функций  $\phi$ , таких, что

$$\phi(v(j_1 + 1)) - \phi(v(j_1)) > \dots > \phi(v(j_{q-1} + 1)) - \phi(v(j_{q-1})). \quad (1.16)$$

Введем в рассмотрение переменные  $u_k = \phi(v(k))$ , составляющие вектор  $u = (u_1, \dots, u_q)$ , и обозначим через  $k(y_i)$  номер  $k \in Z_0$  такой, что  $y_i = k$ . Выяснение справедливости соотношения  $yR^{\Omega\Phi^{\text{ord}1}} z$ , согласно лемме с учетом (1.1) и (1.16), сводится к проверке для каждого  $r = 1, \dots, \rho$  выполнения неравенства  $\mu_r^* \geq 0$ , где  $\mu_r^*$  есть оптимальное значение целевой функции  $\mu_r(u)$  в следующей задаче минимизации:

$$\mu_r(u) = u_{k(y_1)} + \dots + u_{k(y_r)} - u_{k(z_1)} - \dots - u_{k(z_r)} \rightarrow \inf_u \quad (1.17)$$

$$\text{при ограничениях: } u_1 < \dots < u_q, u_{j_1+1} - u_{j_1} > \dots > u_{j_{q-1}+1} - u_{j_{q-1}}. \quad (1.18)$$

Строгие неравенства в ограничениях (1.18) можно заменить нестрогими [39]. В итоге получим задачу линейного программирования, которая имеет небольшую размерность: на практике  $q \leq 10$ . Поскольку переход к новым переменным  $u'_i = u_i + \lambda$ ,  $k = 1, \dots, q$ , не меняет величины  $\mu_r^*$  в задаче (1.17) – (1.18), то можно положить  $u_1 = 0$ , и все остальные переменные  $u_2, \dots, u_q$  станут неотрицательными. Тогда для многоугранного выпуклого конуса ограничений полученной задачи минимизации можно алгоритмически задать все его направляющие (их всего  $q$ ), и справедливость неравенства  $\mu_r^* \geq 0$  достаточно будет проверять для каждой из них. Например, для  $q = 4$  при  $\Delta_1 > \Delta_3 > \Delta_2$  направляющими будут векторы  $u^1 = (0, 1, 1, 1)$ ,  $u^2 = (0, 1, 1, 2)$ ,  $u^3 = (0, 1, 2, 3)$ ,  $u^4 = (1, 1, 1, 1)$ .

Решающие правила, основанные на решении оптимизационных задач, в частности, (1.17) – (1.18), называются *оптимизационными*.

#### 1.1.4 Аналитическое двойственное решающее правило для случая критериев с порядковой шкалой

Обозначим через  $a_{\downarrow} = (a_{[1]}, \dots, a_{[n]})$  вектор, образованный из вектора  $a = (a_1, \dots, a_n)$  упорядочением его компонент по невозрастанию:  $a_{[1]} \geq \dots \geq a_{[n]}$ . Под  $a^{[1,j]}$  будем понимать вектор, составленный из первых  $j$  компонент вектора  $a$ , т.е.  $a^{[1,j]} = (a_1, \dots, a_j)$ . Запись  $a_{\downarrow}^{[1,j]}$  будет обозначать вектор, полученный из вектора  $a^{[1,j]}$  упорядочением его компонент по невозрастанию. Например, если  $a = (3, 4, 1)$ , то  $a^{[1,2]} = (3, 4)$  и  $a_{\downarrow}^{[1,2]} = (4, 3)$ .

Теорема 1.4. Для критериев с порядковой шкалой справедливо решающее правило:

$$yR^{\Omega}z \Leftrightarrow (y_{\downarrow}^{[1,r]} \geqq z_{\downarrow}^{[1,r]}, r = i_1, \dots, i_p); \quad (1.19)$$

при этом если в (1.19) все нестрогие неравенства  $\geqq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^{\Omega}z$ , а если  $\geqq$  выполняется как  $\geq$ , то верно  $yP^{\Omega}z$ .

Доказательство основано на том, что векторное неравенство  $y_{\downarrow}^{[1,r]} \geqq z_{\downarrow}^{[1,r]}$  верно тогда и только тогда, когда верны неравенства из теоремы 1:  $n_{kr}(y^{[1,r]}) \geqq n_{kr}(z^{[1,r]})$ ,  $k = 1, \dots, q - 1$  (см. [18]).

Примечание 1.1. Если все критерии равноважны, то решающее правило (1.19) сводится к требованию выполнения одного векторного неравенства  $y_{\downarrow} \geqq z_{\downarrow}$ . Это решающее правило было предложено и обосновано в работе [34].

#### 1.1.5 Аналитические решающие правила для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида

Далее принимается предположение о существовании количественных коэффициентов важности. При справедливости этого предположения в случаях, когда шкала критериев порядковая или первой порядковой метрики, для сравнения вариантов

по предпочтительности можно использовать аддитивную функцию ценности [130], которая для однородных критериев имеет следующий вид [36]:

$$F(y|\alpha, v) = \sum_{i=1}^m \alpha_i v(y_i), \quad (1.20)$$

где, как и ранее,  $\alpha_i$  – коэффициенты важности,  $v(k)$  – значения ценности шкальных оценок. Если значения векторов  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  и  $v = (v(1), \dots, v(q))$  известны, то эта информация порождает на  $Z$  отношение нестрогого предпочтения – полный квазипорядок  $R^\alpha$ :

$$yR^\alpha z \Leftrightarrow F(y|\alpha, v) \geq F(z|\alpha, v).$$

Если же для векторов  $\alpha$  и  $v$  известны лишь (непустые) множества возможных значений  $A$  и  $V$  соответственно, то такой информации соответствует отношение нестрогого предпочтения  $R^{AV}$ , определяемое следующим образом:  $yR^{AV}z$  верно тогда и только тогда, когда  $yR^\alpha z$  верно при любых  $\alpha \in A$  и  $v \in V$ . Это определение, согласно (1.20), можно представить в следующей равносильной форме:

$$yR^{AV}z \Leftrightarrow \inf_{(\alpha, v) \in A \times V} \sum_{i=1}^m \alpha_i (v(y_i) - v(z_i)) \geq 0. \quad (1.21)$$

В рассматриваемом случае множество  $A = A^\Omega$  задается условиями согласования (1.2), а множество  $V = V^\pi$  – неравенствами

$$\Delta(k_1) \geq \Delta(k_2) \geq \dots \geq \Delta(k_{q-1}) > 0, \quad (1.22)$$

для некоторой перестановки  $\pi = (k_1, \dots, k_{q-1})$  множества  $\{1, \dots, q-1\}$ . Здесь  $\Delta(k) = v(k+1) - v(k)$ ,  $k = 1, \dots, q-1$ .

Такая информация (с учетом принятого предположения о существовании количественных коэффициентов важности) порождает на  $Z$  отношение  $R^{\Omega\pi}$ .

Множество  $Q$  номеров приращений  $\Delta(k_j)$  разобьем на  $\sigma \leq q-1$  групп так же, как это сделано для коэффициентов  $\alpha_i$ :  $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_\sigma$ . Приращения  $\Delta(k_j)$  внутри каждой группы  $Q_s$  равны между собой, а приращения из групп с меньшими номерами больше приращений из групп с большими номерами. Пусть  $k_{j_s}$  – номер последнего приращения в  $s$ -ой группе (отметим, что  $j_\sigma = q-1$ ).

Используя обозначение  $\alpha^{[s]\pi}(y) = (\alpha^{k_1}(y), \dots, \alpha^{k_{j_s}}(y))$ , сформулируем первое аналитическое решающее правило для проверки отношения  $R^{\Omega\pi}$ .

Теорема 1.5. В предположении существования количественных коэффициентов важности справедливо следующее решающее правило:

$$yR^{\Omega\pi}z \Leftrightarrow \alpha_{\downarrow}^{[s]\pi}(y) \geq \alpha_{\downarrow}^{[s]\pi}(z), \quad s = 1, \dots, \sigma; \quad (1.23)$$

при этом если в (1.23) все нестрогие неравенства  $\geq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^{\Omega\pi}z$ , а если хотя бы одно выполняется как  $\geq$ , то верно  $yP^{\Omega\pi}z$ .

Доказательство теоремы 1.5 проводится аналогично доказательству в [28].

Введем обозначения:

$$n_{sr}^{\pi}(y) = \sum_{j=1}^{j_s} n_{k_j r}(y) = \sum_{i=1}^{i_r} \sum_{j=1}^{j_s} [[y_i > k_j]]. \quad (1.24)$$

Используя  $\sigma \times \rho$ -матрицу  $n^{\pi}(y) = \|n_{sr}^{\pi}(y)\|$ , сформулируем второе, двойственное аналитическое решающее правило для отношения  $R^{\Omega\pi}$ , обобщающее решающие правила (1.13) и (1.14).

Теорема 1.6. В предположении существования количественных коэффициентов важности справедливо следующее решающее правило:

$$yR^{\Omega\pi}z \Leftrightarrow n^{\pi}(y) \geq n^{\pi}(z), \quad (1.25)$$

при этом если в (1.25) нестрогие неравенства для всех компонент матриц выполняются как равенства, то верно  $yI^{\Omega\pi}z$ , а если хотя бы для одной из компонент неравенство является строгим, то верно и  $yP^{\Omega\pi}z$ .

Пример 1.1. Пусть  $m = 4$ ,  $q = 5$ ,  $\Omega = \{1\succ 2, 1\succ 3, 1\succ 4, 2\succ 3, 2\succ 4, 3\sim 4\}$ , так что  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 = \alpha_4$ . Группы номеров критериев:  $M = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\}$ ,  $\rho = 3$ . Рассмотрим критериальные оценки  $y = (5, 1, 3, 3)$  и  $z = (2, 4, 2, 4)$ . Полезно числа (1.6) представить в виде матриц:

$$A(y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(z) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для порядковой шкалы критериев имеем:

$$\alpha_{\downarrow}^1(y) = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, 0), \quad \alpha_{\downarrow}^2(y) = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, 0), \quad \alpha_{\downarrow}^3(y) = (\alpha_1, 0, 0, 0), \quad \alpha_{\downarrow}^4(y) = (\alpha_1, 0, 0, 0);$$

$$\alpha_{\downarrow}^1(z) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad \alpha_{\downarrow}^2(z) = (\alpha_2, \alpha_4, 0, 0), \quad \alpha_{\downarrow}^3(z) = (\alpha_2, \alpha_4, 0, 0), \quad \alpha_{\downarrow}^4(z) = (0, 0, 0, 0);$$

$$n(y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad n(z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Видим, что некоторые компоненты у векторов  $\alpha_{\downarrow}^k(y)$  больше соответствующих компонент векторов  $\alpha_{\downarrow}^k(z)$ , а некоторые меньше. Согласно решающему правилу (1.7), неверно ни  $yR^{\Omega}z$ , ни  $zR^{\Omega}y$ . Тот же вывод делаем на основе сравнения матриц  $n(y)$  и  $n(z)$  по решающему правилу (1.12): одни компоненты больше у  $n(y)$ , другие у  $n(z)$ .

Предположим, что получены следующие сведения:

1. Возрастание предпочтений при переходе от шкальной оценки 2 к 3 такое же, как при переходе от 3 к 4.
2. Возрастание предпочтений при переходе от 1 к 2 такое же, как при переходе от 4 к 5.
3. При переходе от 3 к 4 предпочтения возрастают больше, чем при переходе от 1 к 2.

Эта информация  $\pi$  позволяет записать следующие неравенства для приращений предпочтений:

$$\Delta(2) = \Delta(3) > \Delta(1) = \Delta(4).$$

Группы номеров приращений:  $Q_1 = \{2, 3\}$ ,  $Q_2 = \{1, 4\}$ , так что  $\sigma = 2$ . В этом случае имеем:

$$\alpha_{\downarrow}^{[1]\pi}(y) = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, 0, 0, 0, 0),$$

$$\alpha_{\downarrow}^{[1]\pi}(z) = (\alpha_2, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_4, 0, 0, 0, 0),$$

$$\alpha_{\downarrow}^{[2]\pi}(y) = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\alpha_{\downarrow}^{[2]\pi}(z) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_4, \alpha_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$n^{\pi}(y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad n^{\pi}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\alpha_{\downarrow}^{[1]\pi}(y) \geq \alpha_{\downarrow}^{[1]\pi}(z)$  и  $\alpha_{\downarrow}^{[2]\pi}(y) \geq \alpha_{\downarrow}^{[2]\pi}(z)$ , то выполнены условия из теоремы 1.1. Так как  $n^{\pi}(y) \geq n^{\pi}(z)$ , то выполнены условия из теоремы 1.3. Следовательно, справедливо  $yR^{\Omega\pi}z$ . Причем поскольку для некоторых компонент неравенства строгие, то верно  $yP^{\Omega\pi}z$ .

### 1.1.6 Некоторые выводы

В данном подразделе отчета представлены три аналитических решающих правила в матричном виде – одно для случая, когда шкала критериев является порядковой, и два для случая, когда шкала критериев является шкалой первой порядковой метрики с замедляющимся или ускоряющимся ростом предпочтений вдоль шкалы. Разработан общий подход к построению двойственных решающих правил и приведено оптимизационное решающее правило для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида и аналитическое решающее правило для случая критериев с порядковой шкалой. Разработано аналитические решающие правила для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида. Все матричные правила свободны от ошибок округления.

Следует отметить, что предложенные решающие правила применимы и для анализа задач принятия решений в условиях неопределенности, когда вероятности

«состояний природы» лишь упорядочены по величине, а функция полезности лица, принимающего решение, неизвестна, но известно его отношение к риску (он не склонен или же, наоборот, склонен к риску).

Разработанные алгоритмы целесообразно реализовать в системах поддержки принятия многокритериальных решений, основанных на подходах теории важности критериев.

Результаты проведенных исследований нашли отражение в работах [29, 41, 152]:

1. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Аналитические решающие правила для упорядоченных по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида// Автоматика и телемеханика. 2014 (в печати).
2. Подиновский В.В., Подиновская О.В. Новые многокритериальные решающие правила в теории важности критериев// Доклады Академии Наук, 451(1), 2013, с.21–23. *Английский перевод:* Podinovski V.V., Podinovskaya O.V. New multicriterial decision rules in criteria importance theory// Doklady Mathematics, 88(1), 2013, pp.486–488.
3. Podinovski V.V., Podinovskaya O.V., Nelyubin A.P. Matrix ordinal decision rules in the criteria importance theory// Proc. of VII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2013), Moscow: MAKS Press, 1, 2013, pp.107–110.

## 1.2 Построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений

Проблема манипулирования является одной из самых важных в теории коллективного выбора. Существует ли такое правило коллективного принятия решений, при котором никому из участников голосования невыгодно заявлять процедуре свои неискренние предпочтения с целью получения более выгодного варианта в исходе голосования? Иными словами, существует ли неманипулируемое правило? Впервые ответ на этот вопрос был дан в работах [107, 160]: любая недиктаторская процедура, которая имеет хотя бы три возможных исхода (альтернативы), является манипулируемой. Но если такое множество правил голосования подвержено манипулированию со стороны избирателей, как сравнить их по степени манипулируемости?

В работах [122, 146] было предложено измерять манипулируемость как долю таких ситуаций голосования (ситуация характеризуется конкретным распределением типов предпочтений по избирателям), при которых манипулирование возможно во множестве всех возможных ситуаций. Данный подход был далее разработан в [57, 58, 123].

При таком подходе важным является то, что следует понимать под ситуацией. Если множество элементарных исходов – это множество профилей предпочтений, то имеет значение, как проголосовал каждый конкретный избиратель. Такая вероятностная модель называется Impartial Culture Model (IC). Если имеет значение только количество тех или иных типов предпочтений во множестве заявленных избирателями, то имеет место Impartial Anonymos Culture Model (IAC) – модель анонимных предпочтений. Если же нам нужно проследить только, какой тип коллективных предпочтений представлен, и неважны ни имена избирателей, ни имена альтернатив, то рассматривается – Impartial Anonymous and Neutral Culture Model (IANC) – модель анонимных и нейтральных предпочтений.

Последняя модель является достаточно новой, в то время как первые две хорошо исследованы. Манипулируемость правил была посчитана как в IC, так и в IAC в работах [99, 134, 154, 166]. В них также был исследован вопрос о коалиционной ма-

нипулируемости, при которой избиратели имеют возможность договориться и изменить предпочтения не поодиночке, а сформировав коалицию.

В исследовании манипулируемости правил коллективного выбора в рамках проекта в 2013 году внимание было сфокусировано на проблеме коалиционного манипулирования. Использовались предположения модели IC. Продолжено исследование различий индексов манипулируемости в моделях IC, IAC и IANC и получены новые результаты в этой области. Также исследованы некоторые свойства правил подсчета очков и правила порогового агрегирования, которые в дальнейшем позволяют упростить вычисление результата по пороговому правилу.

### 1.2.1 Расчет коалиционной манипулируемости

Коалиционное манипулирование – ситуация при голосовании, когда несколько участников голосования предъявляют неискренние предпочтения, чтобы достигнуть лучшего для себя коллективного выбора. Рассмотрение коалиционного манипулирования, по сравнению с одиночным манипулированием, требует введения дополнительных предпосылок о коалициях и правилах их формирования:

- 1) коалиция – это группа агентов с одинаковыми предпочтениями;
- 2) все участники голосования, входящие в одну коалицию, изменяют свои предпочтения одинаково, т.е. предъявляют одинаковые неискренние предпочтения на процедуре коллективного выбора.

Мы рассматривали и анализировали коалиционную манипулируемость для мажоритарных правил коллективного выбора, для правила относительного большинства и для порогового правила.

#### 1.2.1.1 Индексы коалиционной манипулируемости

Для оценки коалиционной манипулируемости правил коллективного выбора мы будем рассматривать модифицированную версию индекса Нитцана–Келли. Как известно, индекс Нитцана–Келли имеет вид:

$$NK = \frac{d_0}{(m!)^n},$$

где  $d_0$  – количество манипулируемых ситуаций голосования (профилей), т.е. ситуаций, когда хотя бы один агент может произвести манипулирование;  $n$  – количество участников голосования;  $m$  – количество альтернатив.

При рассмотрении коалиционного манипулирования мы дополнитель но вводим параметр-ограничение на размер коалиции, и формула для модифицированного индекса Нитцана–Келли может быть записана как:

$$NK_{coalitional\ with\ k=l} = \frac{d_l}{(m!)^n},$$

где  $k$  – максимальное количество участников голосования, которые могут входить в одну коалицию, а  $l$  – ограничение на размер коалиции.

### 1.2.1.2 Расчет индексов коалиционной манипулируемости

Был разработан комплекс программного обеспечения, который рассчитывает значения индексов коалиционной манипулируемости для случаев с 3, 4 и 5 альтернативами. Программный комплекс был разработан на языке C# с использованием среды разработки Microsoft Visual Studio 2010.

Для расчета индексов коалиционной манипулируемости были запрограммированы рассматриваемые правила коллективного выбора.

Так как общее количество всех возможных ситуаций голосования растет экспоненциально и очень велико ( $m!^n$ , где  $m$  – это количество альтернатив, а  $n$  – количество агентов), то для расчета индексов коалиционной манипулируемости был использован метод моделирования Монте–Карло. Для каждого случая, т.е. для заданных количества альтернатив и количества агентов, случайным образом генерировался 1 миллион профилей. Для каждого из таких профилей моделировались все возможные ситуации коллективного манипулирования, т.е. рассматривались все возможные сочетания участников голосования и их возможные попытки манипулирования, которые не противоречили предпосылкам модели, рассмотренным выше.

Для проведения всех необходимых расчетов было также сделано разбиение программы на потоки и пакеты. Расчет каждого возможного случая (для определенного количества альтернатив и участников голосования) разбивался на несколько потоков и пакетов. Так как наиболее ценным временем для компьютера является процессорное время, а не время чтения и записи на диск, то проведение вычислений в несколько потоков на одной машине дало существенный прирост производительности. Помимо этого, проведение вычислений для каждой задачи разбивалось на пакеты (чаще всего на 100 пакетов по 10000 профилей в каждом) для того, чтобы расчеты можно было запускать на нескольких машинах. Таким образом, использование многопоточности и разбиения задач на пакеты при использовании нескольких компьютеров позволило существенно снизить общее время расчетов и провести их за разумное время.

Вычисления проводились на 10 компьютерах в течение 8 месяцев. Были получены результаты по индексам коалиционного манипулирования для указанных выше правил коллективного выбора для 3, 4 и 5 альтернатив.

#### 1.2.1.3 Результаты

Рассмотрим результаты вычислений индексов коалиционной манипулируемости. Мы будем сравнивать значения индексов коалиционной манипулируемости для следующих правил:

- правила минимального слабоустойчивого множества;
- правил 2-устойчивого и 3-устойчивого множеств;
- правила относительного большинства;
- правила минимального доминирующего множества;
- правила минимального недоминируемого множества;
- правила Фишбурна;
- правила непокрытого множества 1;
- правила непокрытого множества 2;

- правила Ричелсона;
- порогового правила.

Рассмотрим случаи с 3 альтернативами и количеством участников голосования от 3 до 100 при расширении предпочтений лексимакс. Сначала рассмотрим случай при  $l=2$ , т.е. ситуацию, когда в одну коалицию не могут вступать более двух участников голосования.

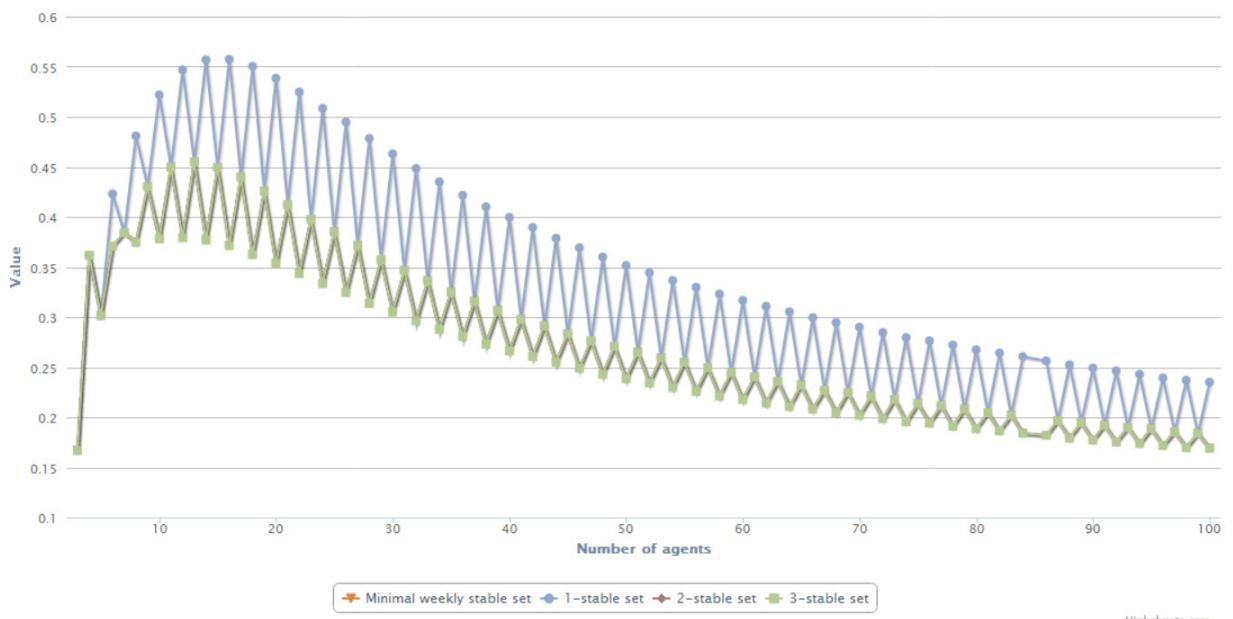


Рисунок 1.1 – Индекс коалиционной манипулируемости для  $l=2$  и правил минимально слабоустойчивого множества, 2-устойчивого и 3-устойчивого множеств

Мы можем заметить на рисунке 1.1, что правила минимально слабоустойчивого множества, 2-устойчивого и 3-устойчивого множеств дают одинаковые результаты, в то время как 1-устойчивое множество даёт заметно более высокий результат по значению модифицированного индекса Нитцана–Келли.

Интересным также является тот факт, что минимумы и максимумы индекса для данных правил не совпадают. Иначе говоря, максимумы для 1-устойчивого множества достигаются для четного числа участников, а для 2-устойчивого и 3-устойчивого множеств максимум достигается для нечетного числа участников. Также отметим, что в случае нечетного числа участников голосования, значения индексов совпадают. Это связано с тем, что мажоритарный граф для нечетного числа участников является связанным.

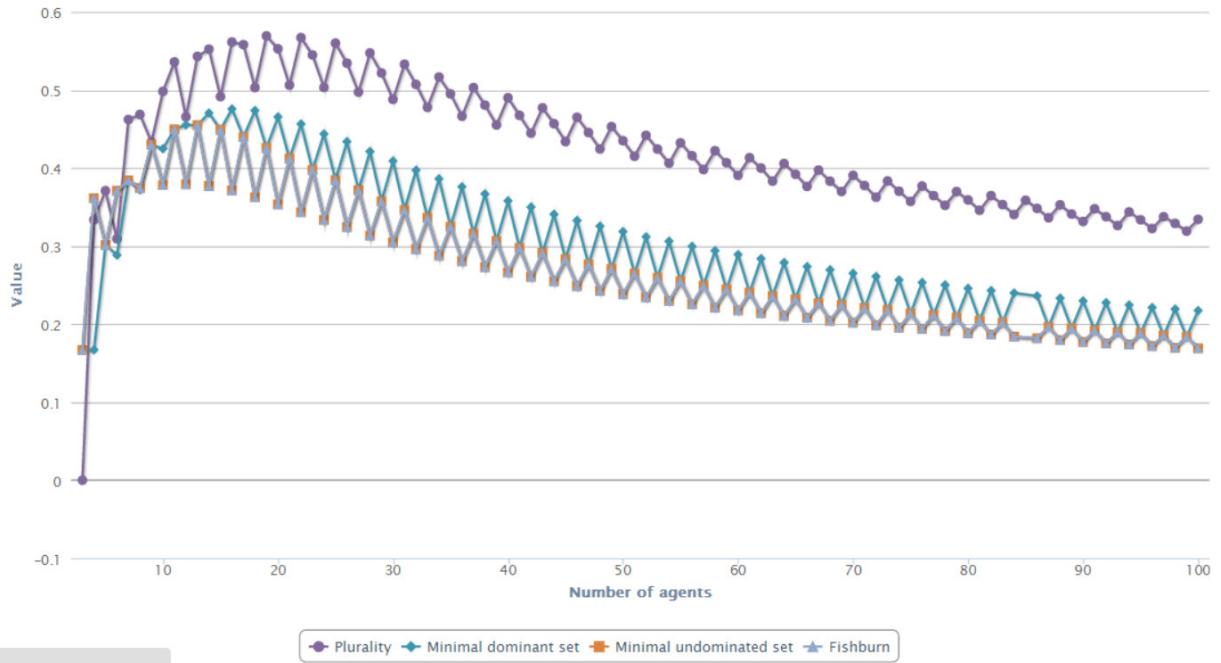


Рисунок 1.2 – Индекс коалиционной манипулируемости для  $l=2$  и правил относительного большинства, минимального доминирующего множества, минимального недоминируемого множества, правила Фишбурна

На рисунке 1.2 мы видим сопоставление значение индексов манипулируемости для правил относительного большинства, минимального доминирующего множества, минимального недоминируемого множества и правила Фишбурна. Как мы можем заметить, правило минимального недоминируемого множества и правило Фишбурна показывают наименьшие значения модифицированного индекса Нитцана–Келли, а правило относительного большинства показывает значительно более высокие результаты.

Также на графике рисунка 1.2 видна периодичность изменения индекса, свойственная для правил, построенных для мажоритарном отношении, и совпадения значений индексов для нечетного числа участников голосования.

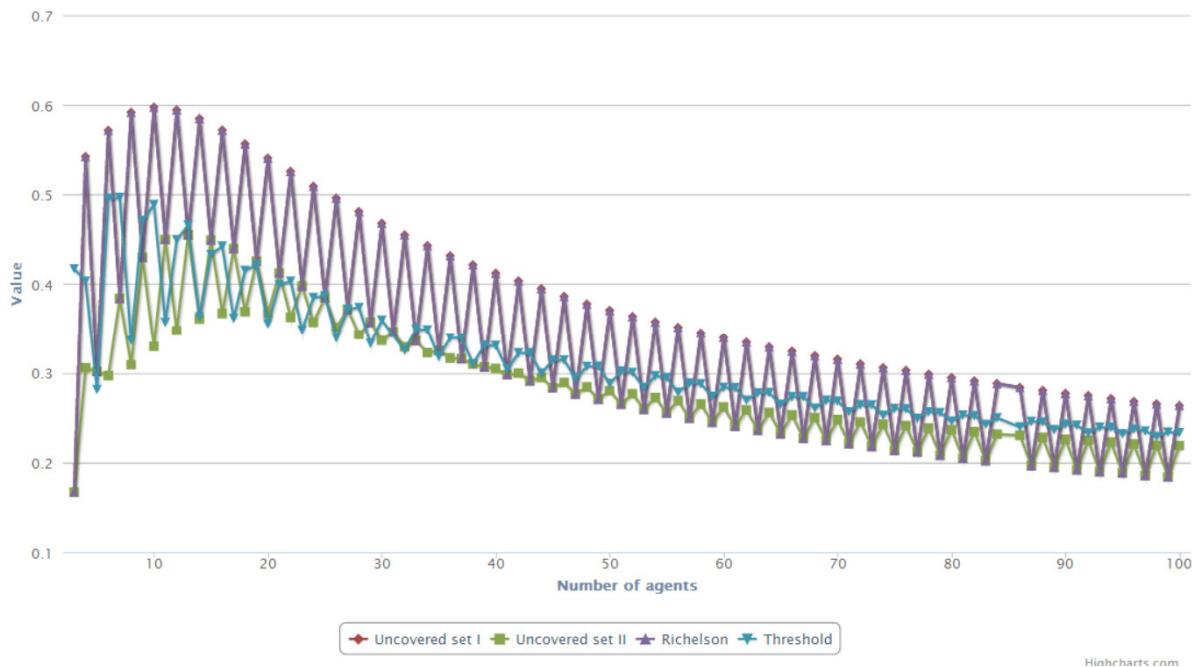


Рисунок 1.3 – Индекс коалиционной манипулируемости для  $l=2$  и правил непокрытого множества 1, непокрытого множества 2, правила Ричелсона, порогового правила

На графике рисунка 1.3 сопоставлены правила непокрытого множества 1, непокрытого множества 2, Ричелсона и пороговое правило. Правила непокрытого множества 1 и Ричелсона показывают заметно худшие результаты, в то время как правило непокрытого множества 2 показывает лучшие результаты. Пороговое правило показывает близкие результаты к непокрытому множеству 2, но все же более высокие значения индекса коалиционной манипулируемости.

Сравним теперь лучшие правила по трем предыдущим графикам: правила 2- и 3-устойчивых множеств, минимальное недоминируемое множество, правило Ричелсона, а также правило непокрытого множества 2.

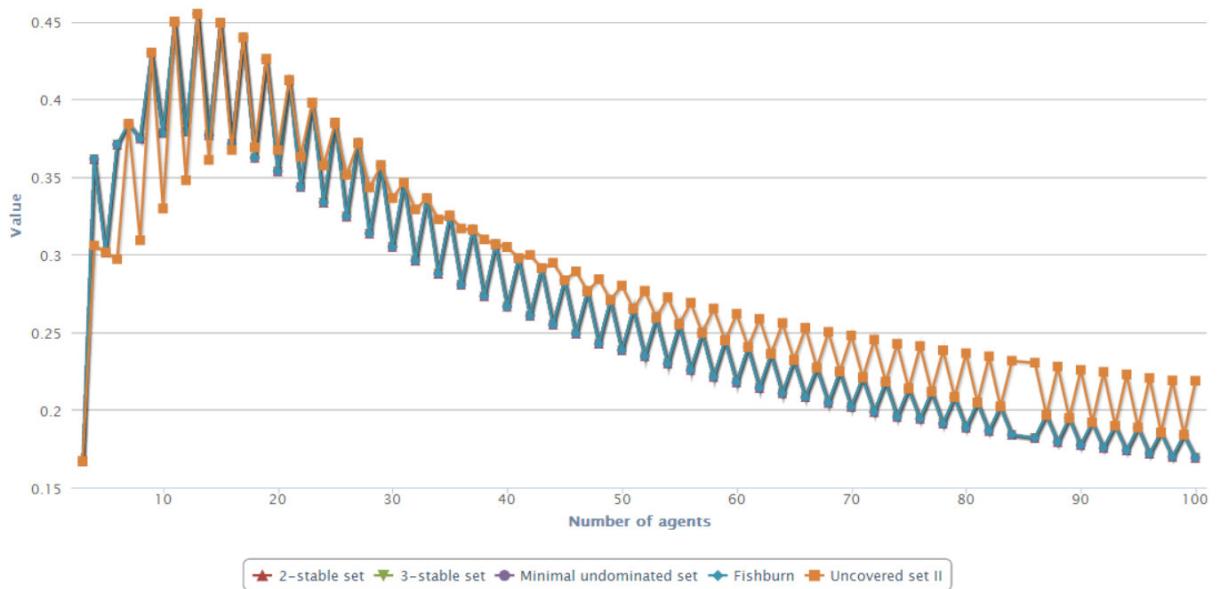


Рисунок 1.4 – Сопоставление лучших результатов индекса коалиционной манипулируемости для  $l=2$

Мы видим на рисунке 1.4, что сразу 4 правила (правила 2- и 3-устойчивых множеств, минимальное недоминирующее множество, правило Ричелсона) из 5 показывают одинаковые результаты, в то время как непокрытое множество 2 показывает более высокие результаты.

Интересным фактом также является то, что в районе 35–40 агентов у непокрытого множества 2 меняется периодичность максимумов и минимумов. Если до 35 альтернатив, максимальное значение меры манипулируемости достигается для нечетного числа участников, то после 40 агентов, максимум соответствующего индекса наблюдается для четного числа участников. Этот факт может объясняться тем, что имеются две разных зависимости меры манипулируемости от числа участников: для случая четного числа участников и для случая нечетного числа участников, причем у них разные скорости сходимости индекса при стремлении количества участников голосования к бесконечности. Однако данная гипотеза требует дополнительной проверки.

Рассмотрим теперь манипулируемость рассматриваемых правил принятия решений для случая  $l=10$ , т.е. с ограничением в 10 агентов на размер коалиции.

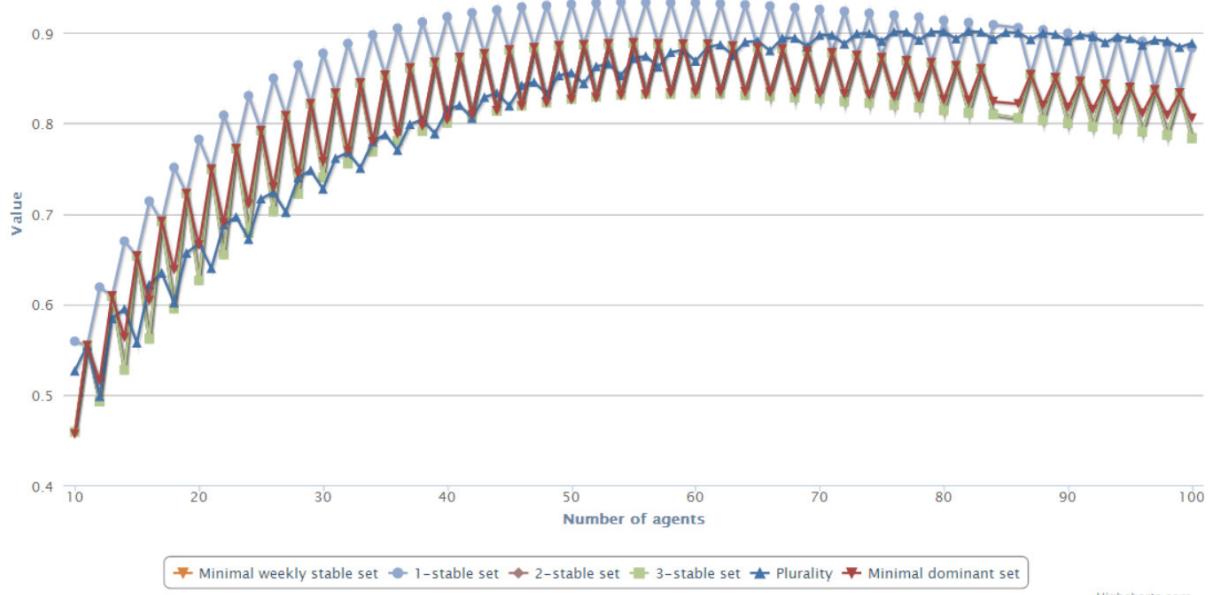


Рисунок 1.5 – Индекс коалиционной манипулируемости для  $l=10$  первых шести правил

Мы можем заметить, что из 6 правил, показанных на рисунке 1.5, три правила показывают наименьшие результаты для разных ситуаций: правило относительного большинства и правило 2-устойчивого множества (вновь наблюдаются одинаковые результаты с правилом 3-устойчивого множества).

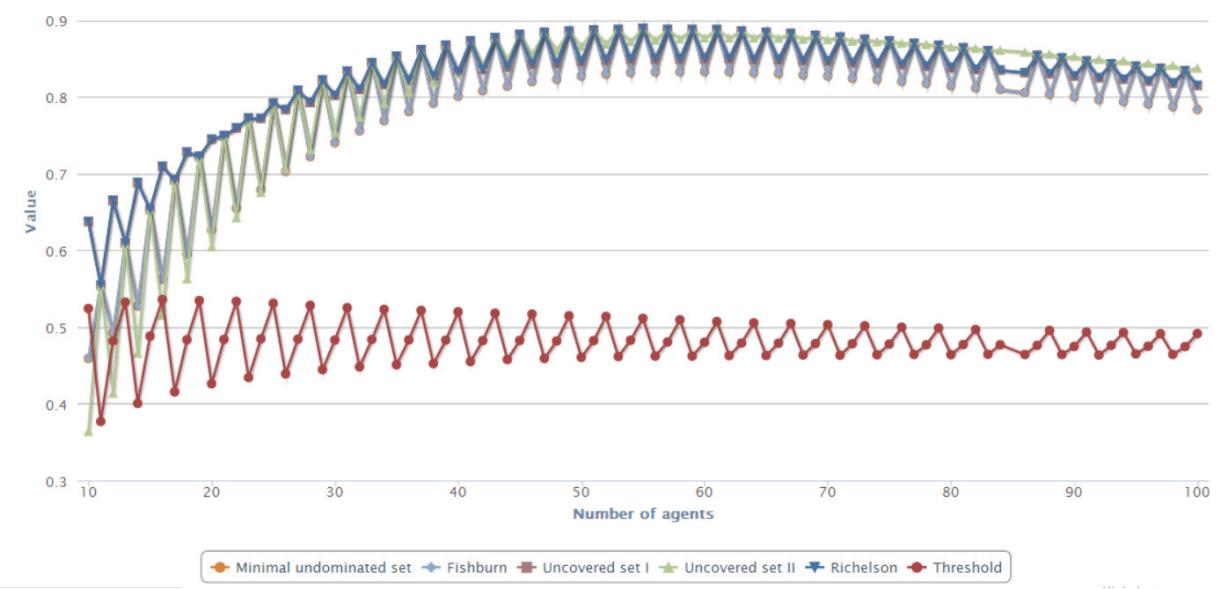


Рисунок 1.6 – Индекс коалиционной манипулируемости для  $l=10$  вторых шести правил

На рисунке 1.6 мы можем заметить, что из 6 правил, приведенных на графике, сильно выделяется пороговое правило: это единственное правило, которое не пока-

зывает рост значения модифицированного индекса Нитцана–Келли при увеличении количества участников голосования. Причины данного поведения требуют дополнительного изучения.

Стоит также отметить сдвиг своеобразного пика манипулируемости в сторону большего числа участников при росте размера допустимой коалиции. Если максимальная манипулируемость при  $l=2$  для правила Ричелсона была при 10 участников голосования, то для  $l=10$  уже для 55. Это же можно заметить и для других правил.

Интересным также является тот факт, что для правила Ричелсона в данном случае также появляется смена в периодичности максимумов и минимумов меры манипулируемости, которой нет для случая  $l=2$ .

Сравним теперь лучшие правила коллективного выбора по итогам двух предыдущих графиков.

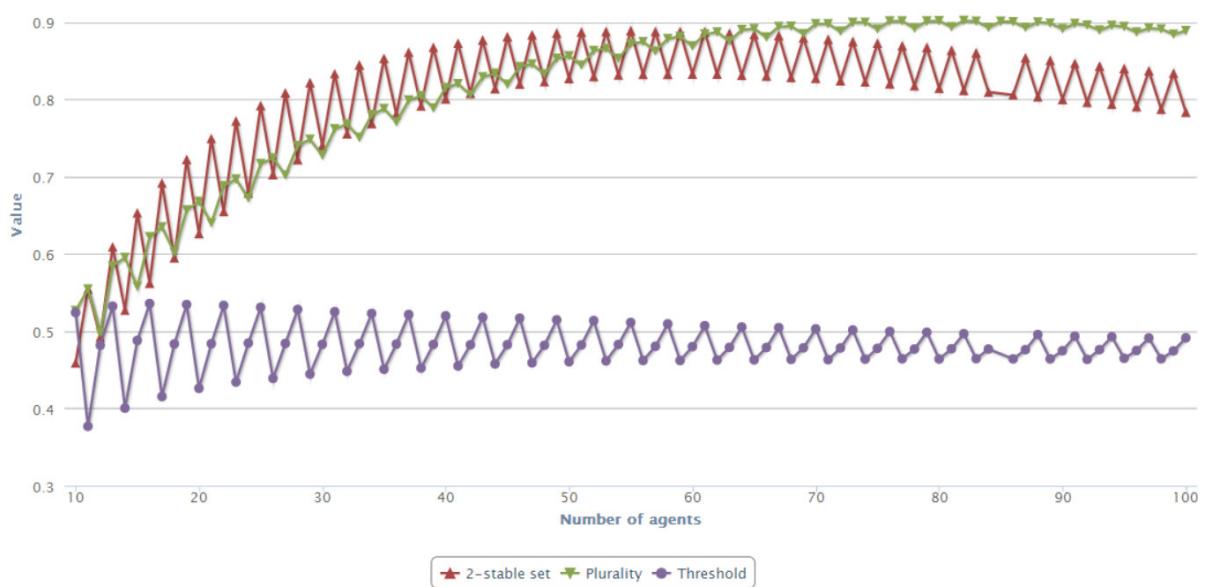


Рисунок 1.7 – Сопоставление лучших результатов индекса коалиционной манипулируемости для  $l=10$

Мы можем заметить на рисунке 1.7, что значения индексов коалиционной манипулируемости для правила относительного большинства при небольшом количестве участников голосования меньше, чем значения индексов коалиционной манипулируемости для правила 2-устойчивого множества, но в дальнейшем значения модифицированного индекса Нитцана–Келли для правила относительного большинства резко увеличиваются и достигают значения близкого к 0,9 при 100 участниках

голосования. Это означает, что в среднем в 9 из 10 ситуаций голосования при 100 участниках при использовании правила относительного большинства может иметь место манипулирование.

В то же время следует отметить пороговое правило, которое не показывает рост значения модифицированного индекса Нитцана–Келли при увеличении количества участников голосования.

Кроме того, стоит отметить, что и правило относительного большинства, и пороговое правило показывали относительно более высокие результаты по сравнению с другими правилами коллективного выбора при ограничении на размер коалиции в 2 агента. Несмотря на это, при увеличении ограничения на размер коалиции до 10 агентов эти правила стали показывать относительно более низкие результаты по сравнению с другими правилами коллективного выбора.

Таким образом, нельзя найти такое правило принятия решений, которое было бы лучшим в каждой из ситуаций. Требуется более детальный анализ изменения в мере манипулируемости в зависимости от размеров коалиции, числа участников и разрешимости правил принятия решений.

### 1.2.2 Вероятностные модели коллективных предпочтений

При подсчете манипулируемости важную роль играет применение той или иной вероятностной модели. В исследовании 2012 года [174] была исследована модель IANC и показано, что максимальная разность таких показателей, как индекс манипулируемости Нитцана–Келли, посчитанных в моделях IC и IANC может быть достаточно высока. Данное исследование было продолжено в работе этого года, получена оценка для максимальной разности индексов в моделях IAC и IANC, IC и IANC. Тем самым окончательно определено место достаточной новой вероятностной модели IANC среди других, успешно применяемых в теории коллективного выбора. Более того, исследование позволяет избежать сложных вычислений в модели IANC в силу того, что в большинстве случаев значение индекса манипулируемости в модели IANC не будет отличаться от индекса в IC или IAC.

### 1.2.2.1 Определения и обозначения

В модели IAC избиратели считаются неразличимыми, следовательно, профили предпочтений, различающиеся только перестановкой предпочтений избирателей, считаются эквивалентными. В модели IANC не имеют значение ни имена избирателей, ни имена альтернатив. Так, например, следующие профили предпочтений считаются эквивалентными с точки зрения модели IANC:

$$\vec{P} = \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ \hline y & y \\ x & z \\ z & x \end{array} \quad \vec{P}' = \begin{array}{cc} P'_1 & P'_2 \\ \hline x & x \\ y & z \\ z & y \end{array} \quad \vec{P}'' = \begin{array}{cc} P''_1 & P''_2 \\ \hline y & y \\ z & x \\ x & z \end{array}.$$

А в модели IAC эквивалентными будут профили  $\vec{P}$  и  $\vec{P}''$ . Следовательно, в модели IAC все множество профилей предпочтений разбивается на классы эквивалентности по анонимности,

$$\Omega = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_K.$$

Число таких классов может быть вычислено как количество сочетаний с повторениями из  $m!$  различным типов предпочтений по  $n$ ,

$$K(m, n) = \binom{m!+n-1}{m!-1}.$$

В модели IANC множество профилей предпочтений  $\Omega(m, n)$  также разбивается на классы – классы эквивалентности по анонимности и нейтральности.

$$\Omega = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_R.$$

Число классов эквивалентности по анонимности и нейтральности для заданных значений  $m$  и  $n$ ,  $R(m, n)$ , было найдено в работе [93].

Перестановка на множестве избирателей – элемент симметрической группы  $S_n$  – обозначается через  $\sigma$ , а перестановка на множестве альтернатив  $\tau \in S_m$ . Пара перестановок  $\sigma$  и  $\tau$  обозначается как  $g = (\tau, \sigma)$ .  $G = S_m \times S_n$  – группа упорядоченных

пар перестановок  $g = (\tau, \sigma)$ , которая действует на множестве профилей предпочтений. Существует всего  $n!$  перестановок избирателей и  $m!$  перестановок альтернатив, следовательно, число всевозможных пар альтернатив  $g = (\tau, \sigma)$ , мощность множества  $G$ , есть

$$|G| = m!n!.$$

Образ профиля  $\vec{P}$  под действием перестановки  $g = (\tau, \sigma)$  обозначается через  $\vec{P}^g$ . Класс эквивалентности по анонимности и нейтральности  $\theta_{\vec{P}}$ , представителем которого является профиль  $\vec{P}$ , определяется как подмножество  $\Omega: \{\vec{P}^g \mid g \in G\}$ . Профили  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  рассматриваются как эквивалентные по анонимности и нейтральности, если существует такая пара перестановок  $g \in G$ , что  $\vec{P}_1^g = \vec{P}_2$ .

Класс эквивалентности по анонимности, который может быть получен из профиля  $\vec{P}$  путем перестановки столбцов в его матрице, обозначается как  $\rho_{\vec{P}} = \{\vec{P}^\sigma \mid \sigma \in S_n\}$ .

Если для некоторого  $g$  существует такой профиль  $\vec{P}$ , что  $\vec{P}^g = \vec{P}$ , тогда  $\vec{P}$  называется неподвижной точкой пары перестановок  $g$ . Множество всех неподвижных точек для  $g$

$$F_g = \{P \in \Omega \mid P^g = P\}.$$

Для данного профиля  $\vec{P}$ , множество всех перестановок, которые не изменяют профиль  $\vec{P}$  есть подгруппа  $G$ , называемая стабилизатором  $\vec{P}$ . Это множество определяется как

$$G_{\vec{P}} = \{g \in G \mid \vec{P}^g = \vec{P}\}.$$

Количество элементов в классе эквивалентности, представителем которого является профиль  $\vec{P}$ , может быть вычислено по формуле

$$|\theta_{\vec{P}}| = |G| / |G_{\vec{P}}|.$$

Рассмотрим теперь, как определяется индекс манипулируемости Нитцана–Келли в различных вероятностных моделях. В базовой модели IC это отношение числа манипулируемых профилей к общему числу профилей предпочтений

$$NK = \frac{d_0}{(m!)^n},$$

В модели IAC индекс манипулируемости – это доля классов эквивалентности по анонимности, в которых манипулирование возможно, в общем числе таких классов.

$$NK_{IAC} = \frac{k_0}{K(m, n)}.$$

Аналогично индекс задается для модели IANC, но рассматриваются классы эквивалентности по анонимности и нейтральности.

$$NK_{IANC} = \frac{r_0}{R(m, n)}.$$

### 1.2.2.2 Асимптотическая разность моделей IAC и IANC

В данном подразделе дана асимптотическая оценка максимальной разности индексов в модели IAC и IANC. Сравнение этих моделей позволит нам также понять, что происходит с максимальной разностью в моделях IC и IANC  $\Delta_{IC-IANC}$  когда число избирателей  $n$  стремится к бесконечности.

Максимальную разность индексов в моделях IC и IAC обозначим за  $\Delta_{IC-IAC}$ , а разность в моделях IAC и IANC – за  $\Delta_{IAC-IANC}$ . Для некоторых  $m$  и  $n$  каждая из разностей,  $\Delta_{IC-IAC}$ ,  $\Delta_{IAC-IANC}$  или  $\Delta_{IC-IANC}$  принимает определенное значение из  $[0, 1]$ . Так, можно рассматривать модели IC, IAC и IANC как точки в некотором пространстве, а разности  $\Delta_{IC-IAC}$ ,  $\Delta_{IAC-IANC}$ ,  $\Delta_{IC-IANC}$  – как расстояния между ними. Применив неравенство треугольника, получим

$$|\Delta_{IC-IAC} - \Delta_{IAC-IANC}| < \Delta_{IC-IANC} < \Delta_{IC-IAC} + \Delta_{IAC-IANC}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению  $\Delta_{IAC-IANC}$ . Любой из профилей предпочтений, принадлежащих классу эквивалентности по анонимности  $\rho_j$ , может быть взят в качестве представителя данного класса. Обозначим его за  $\vec{P}_{\rho_j}$ . Рассмотрим действие группы перестановок  $S_m$  на множество представителей классов, взятых по одному от каждого класса эквивалентности по анонимности. Каждый класс эквивалентности по анонимности и нейтральности будет включать теперь в качестве элементов представителей классов эквивалентности по анонимности.

$$\theta_{\rho_j} = \{\vec{P}_{\rho_j}^\tau \mid \tau \in S_m, \vec{P}_{\rho_j}^\tau \notin \rho_{\vec{P}}\}.$$

Стабилизатор для некоторого класса  $\rho_j$  определим как

$$G_{\rho_j} = \{\tau \in S_m \mid \vec{P}_{\rho_j}^\tau \in \rho_j\}.$$

А число представителей классов эквивалентности по анонимности в некотором классе эквивалентности по анонимности и нейтральности

$$|\theta_{\rho_j}| = \frac{|S_m|}{|G_{\rho_j}|}.$$

Очевидно, что минимальное число перестановок в  $G_{\rho_j}$  равно 1, следовательно,

$$|\theta_{\rho_j}| = \frac{m!}{|G_{\rho_j}|} \leq m!.$$

Рисунок 1.8 показывает распределение представителей классов эквивалентности по анонимности по классам эквивалентности по анонимности нейтральности для случая с 3 альтернативами 4 избирателями. Так как классы эквивалентности – непересекающиеся множества, то сумма представителей классов эквивалентности по анонимности по всем классам эквивалентности по анонимности и нейтральности равна  $K(m, n)$  (площадь области, закрашенной серым на рисунке).

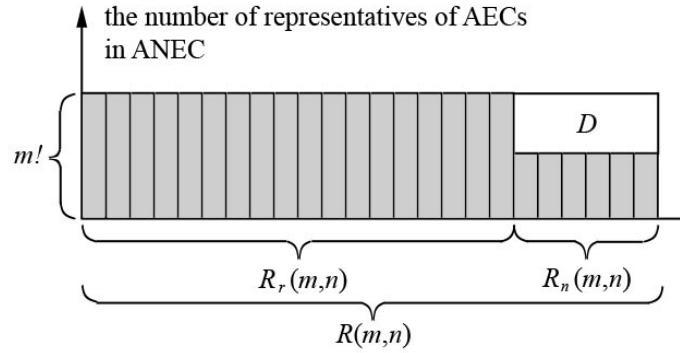


Рисунок 1.8 – Распределение представителей классов эквивалентности по анонимности по классам эквивалентности по анонимности нейтральности

Для вычисления максимальной разности индексов в моделях IAC и IANC рассмотрим те классы эквивалентности по анонимности и нейтральности, в которых содержится больше представителей классов эквивалентности по анонимности, чем среднее количество, т.е.  $K(m,n) / R(m,n)$ . Так как это значение очень близко к  $m!$ , то все нужные нам классы эквивалентности будут иметь по  $m!$  элементов в них. Число таких классов обозначим за  $R_r(m,n)$ .

Тогда максимальная разность индексов в моделях IAC и IANC вычисляется по формуле

$$\Delta_{IAC-IANC} = \frac{m!R_r(m,n)}{K(m,n)} - \frac{R_r(m,n)}{R(m,n)}.$$

В следующей теореме находится предел этой разности.

Теорема 1.7. Максимальная разность индексов в моделях IAC и IANC,  $\Delta_{IAC-IANC}$ , стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  или  $m \rightarrow \infty$ .

Получается, что модели IAC и IANC становятся ближе и ближе по мере роста числа избирателей или числа альтернатив. Когда  $n > 10$  или  $m > 10$ , значение максимальной разности  $\Delta_{IAC-IANC}$  меньше, чем 0.02. Поэтому, используя неравенство

$$|\Delta_{IC-IAC} - \Delta_{IAC-IANC}| < \Delta_{IC-IANC} < \Delta_{IC-IAC} + \Delta_{IAC-IANC},$$

мы можем заключить, что максимальная разность индексов в моделях IC и IANC,  $\Delta_{IC-IANC}$ , практически равна максимальной разности  $\Delta_{IC-IAC}$ , т.е.

$$\Delta_{IC-IAC} - 0.02 < \Delta_{IC-IANC} < \Delta_{IC-IAC} + 0.02.$$

В то же время,  $\Delta_{IC-IAC}$  вычисляется легко даже для большого числа избирателей с помощью метода Монте–Карло случайно генерации представителей классов эквивалентности по анонимности.

Рисунок 1.9 показывает поведение максимальной разности  $\Delta_{IC-IANC}$  для числа альтернатив от 3 до 9 и числа избирателей от 10 до 120. Так как число избирателей в рассматриваемом случае превышает 10, то в каждой точке  $\Delta_{IC-IANC}$  практически равна  $\Delta_{IC-IAC}$ . Обратим внимание на то, что в некоторых случаях максимальная разность индексов очень близка к единице, что означает, что различия в степени манипулируемости в рассматриваемых моделях могут сильно отличаться.

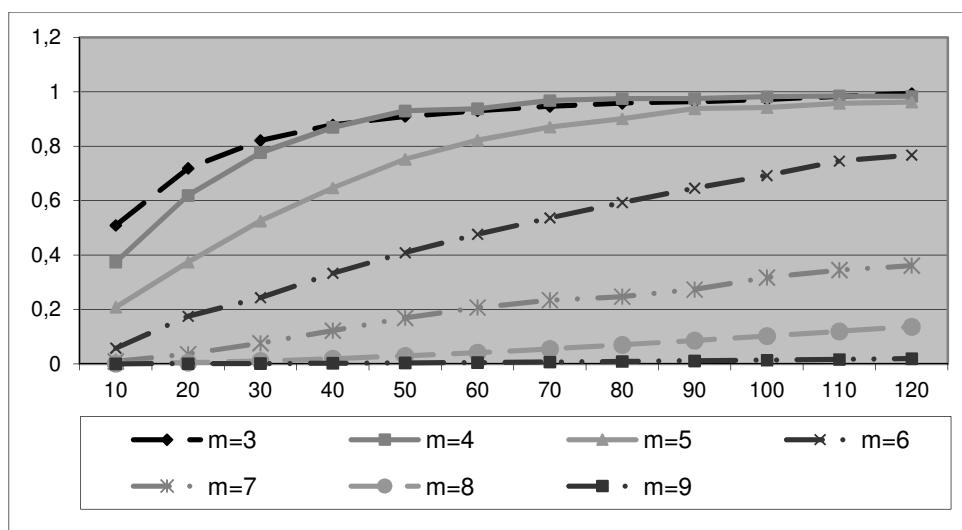


Рисунок 1.9 – Максимальная разность индексов манипулируемости в моделях IC и IANC

### 1.2.3 Формальное описание правил подсчета очков и пороговой модели

Следующее направление в рамках исследования манипулируемости правил коллективного выбора – сравнение свойств правила порогового агрегирования и правил подсчета очков. Мы рассмотрим аргументы в пользу модели порогового агрегирования, до сих пор стоящей несколько обособленно от правил подсчета очков, проследим ее развитие по основным публикациям и аксиоматику.

### 1.2.3.1 Правило порогового агрегирования

Одно из характерных свойств и одна из аксиом в описании, предложенном в [177] правила Борда – это возможность альтернативы компенсировать потерю очков в предпочтениях одних избирателей за счет приобретения очков у других. Это свойство в разной степени присуще всем правилам подсчета очков, у которых нет двух одинаковых элементов в векторе очков. Однако только для правила Борда эта компенсаторность является «полной»: при любой исходной сумме очков, если альтернатива  $a$  опустилась на  $k$  позиций в предпочтениях избирателя  $i$ , то ей требуется подняться ровно на  $k$  позиций в предпочтениях избирателя  $j$ , чтобы снова достичь того же уровня суммы очков.

Но такая модель применима, конечно, далеко не всегда. Пусть, например, группа экспертов из различных областей оценивает несколько проектов по степени риска. В группе присутствует эксперт по финансовым рискам, специалист по безопасности производства и, скажем, эколог. Низкая оценка проекта хотя бы одним из экспертов не может быть компенсирована даже самыми высокими оценками других. Следовательно, необходима иная модель, учитывающая это свойство некомпенсаторности.

Такая модель, впервые представленная и аксиоматизированная в [13, 14] для трехградационных предпочтений, получила название пороговой модели. Сравнение альтернатив в ней осуществляется следующим образом. Для альтернатив  $a$  и  $b$  строятся векторы рангов

$$r(a) = (r_1(a, P_1), \dots, r_n(a, P_n)), \quad r(b) = (r_1(b, P_1), \dots, r_n(b, P_n)).$$

Далее сравниваются наихудшие оценки в векторах  $r(a)$  и  $r(b)$ . Если наихудшая оценка в  $r(a)$  больше, чем наихудшая в  $r(b)$ , то  $aPb$ , если они равны, то сравниваются вторые наихудшие, и т.д. Такой способ сравнения альтернатив называют лексикографическим упорядочением.

Слово «порог» является ключевым для данной модели, так как именно выстраивание отношения предпочтения на пороговых векторах оценок позволяет определить лексикографический порядок (а именно, лексимин). Это условие является

одной из аксиом этого правила агрегирования (*Noncompensatory Threshold and Contraction*).

Другое необходимое условие – *принцип Парето*. Завершает аксиоматику данного правила усиление свойств анонимности и нейтральности – *Pairwise Compensation*: если набор оценок, полученных альтернативами  $a$  и  $b$  одинаков, то они безразличны в итоговом упорядочении.

Аксиоматика правила порогового агрегирования для произвольного числа градаций была введена в [20, 50]. Авторами также была выведена комбинаторная формула для трех и четырех градаций оценок, показывающая ранг альтернативы в предпочтениях, построенных по пороговому правилу, что существенно облегчает построение лексикографического упорядочения. Результаты исследования изложены также в публикации [51]. Помимо уже рассмотренной пороговой модели, авторы предлагают Двойственное правило порогового агрегирования, которое фактически представляет собой сравнение по другому лексикографическому правилу – лексимакс. Для этого правила также выполняются аксиомы слабого принципа Парето и *Pairwise Compensation*, а аксиома некомпенсаторности носит двойственный характер.

Модель порогового агрегирования нашла применение в рейтинговании учащихся, в [19], где была предложена модель с учетом весов критериев. А также в анализе развитости гражданского общества в России [6, 7].

### 1.2.3.2 Правила подсчета очков

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению свойств правил подсчета очков. Как уже было отмечено в главе 1, правила данного типа являются по определению анонимными и нейтральными и полностью определяются вектором очков  $s = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $k$ -ый элемент которого,  $s_k$ , показывает, сколько очков присваивается альтернативе, имеющей ранг  $k - 1$  в предпочтениях избирателя. Количество градаций в предпочтениях – это количество возможных рангов альтернатив, в

нашей модели это  $m$ , как и число альтернатив, так как предпочтения предполагаются линейными порядками.

Можно легко проверить, что  $f^s = f^t$ , где  $t = \alpha s + \beta$ , поэтому наряду с вектором очков, мы будем использовать его линейную трансформацию, вектор весов,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ , где  $w_1 + w_2 + \dots + w_m = 1$  и  $w_m = 0$ .

В правиле простого большинства учитываются только альтернативы, стоящие на первом месте в предпочтениях избирателей, т.е. те из них, которые получают максимальные оценки. Следовательно, вес всех оценок, кроме наивысшей, будет нулевым,

$$w_{PL} = (0, 0, \dots, 1).$$

Правило одобряющего голосования, которое мы будем рассматривать в этой главе, немного отличается от того, которое упоминалось в обзорной части работы. А именно, количество альтернатив, которые может одобрить каждый избиратель, фиксировано и равно квоте  $q$ . В таком виде это правило уже полностью удовлетворяет аксиоматике Young для правил подсчета очков и позволяет применить к нему те же методы анализа.

Для правила одобряющего голосования с квотой  $q$  важны только альтернативы, которые находятся среди  $q$  лучших альтернатив в предпочтениях избирателей. При этом вес всех  $q$  наилучших оценок одинаков, поэтому нормированным вектором весов для данного правила будет

$$w_{AV} = (0, \dots, 0, \underbrace{1/q, \dots, 1/q}_q).$$

По правилу Борда количество очков, которое получает альтернатива, равно рангу альтернативы. Следовательно, вектор весов будет

$$w_B = \left( 0, \frac{2}{m(m-1)}, \frac{4}{m(m-1)}, \dots, \frac{2}{m} \right).$$

Далее вектор распределения оценок альтернативы скалярно умножается на вектор очков (вектор весов оценок) для соответствующего правила, т.е.

$$S(a) = \langle v(a), s \rangle \quad (W(a) = \langle v(a), w \rangle).$$

Альтернативы упорядочиваются согласно полученным значениям  $S(a)$ , т.е. варианты с большим значением  $S(a)$  доминируют варианты с меньшим значением.

### 1.2.3.3 Классы эквивалентных оценок

Здесь мы предложим геометрическую иллюстрацию для анализа свойств правил коллективного выбора. Известно, что правила подсчета очков могут считать некоторые альтернативы эквивалентными по предпочтительности, даже если набор оценок у них неодинаковый. Так, по правилу простого большинства эквивалентными будут альтернативы, имеющие одинаковое количество наивысших оценок, т.е те из них, которые дают одно и то же значение  $W(x)$ . Таким образом, мы получаем разбиение множества векторов оценок на непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности.

Чему равно количество таких классов эквивалентности? Самые простые случаи – правило простого большинства и обратное правило простого большинства. Суммарное количество очков,

$$\langle v(a), w_{Pl} \rangle = v_m(a),$$

$$\langle v(a), w_{APl} \rangle = \sum_{i=2}^m v_i(a) = n - v_1(a),$$

имеет всего  $n$  градаций.

Для правила Борда наименьшее количество очков, которое может получить альтернатива, равно 0, наибольшее  $n(m-1)$ . Следовательно, число классов эквивалентности также  $n(m-1)$ .

Рассмотрим теперь представление векторов  $v(a)$  в пространстве. Всего различных векторов рангов (оценок)  $m^n$  – количество размещений с повторениями из  $m$  по  $n$ . Векторы распределения оценок  $v(a)$  анонимны, поэтому их количество – число сочетаний с повторениями

$$C_{n+m-1}^n = \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!n!}.$$

А число векторов оценок, соответствующих одному вектору  
 $v(a) = (v_1(a), \dots, v_m(a))$

$$\frac{n!}{v_1(a)!v_2(a)! \dots v_m(a)!}.$$

Каждый вектор распределения оценок  $v(a)$  – это точка с целочисленными координатами на симплексе

$$\{(v_1, v_2, \dots, v_m) \mid v_1 + v_2 + \dots + v_m = n\}.$$

Рассмотрим пример для  $n = 4$  и  $m = 3$ . На рисунках 1.10–1.12 изображены симплексы для  $v_1 + v_2 + v_3 = 4$ . Точки на симплексе – векторы  $v(a)$ . На рисунке 1.10 множества точек, объединенных в группы – классы эквивалентности по рангу Борда,  $W_B(a) = \langle v(a), w_B \rangle$ . Аналогично, классы эквивалентности по правилу простого большинства и по правилу одобряющего голосования с квотой  $q = 2$  изображены на рисунках 1.11 и 1.12.

Случай с тремя градациями оценок,  $m = 3$ , дает возможность наглядно продемонстрировать построение классов эквивалентных векторов оценок. Правило простого большинства и правило одобряющего голосования с квотой  $q = m - 1$  являются двумя крайними случаями. Видно, что угол, под которым на симплексе идут линии уровня любого правила подсчета очков, находится между углами линий уровня правил простого большинства и правила одобряющего голосования.

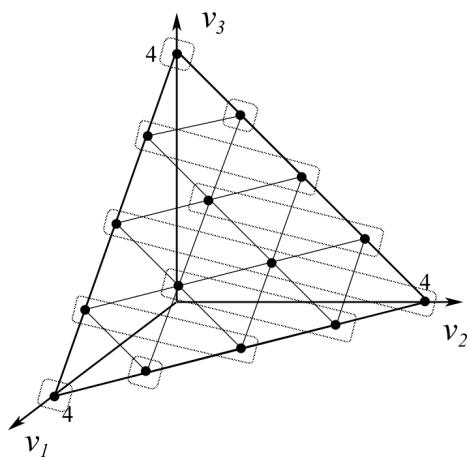


Рисунок 1.10 – Классы эквивалентности по правилу Борда

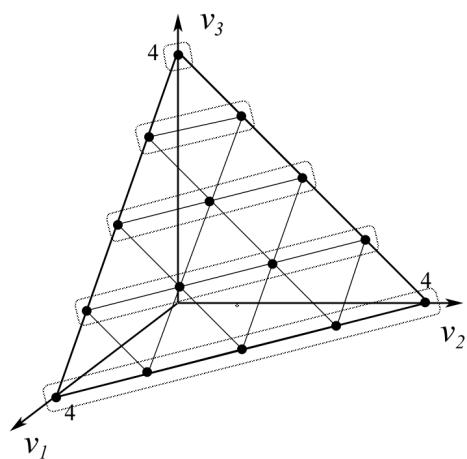


Рисунок 1.11 – Классы эквивалентности по правилу простого большинства

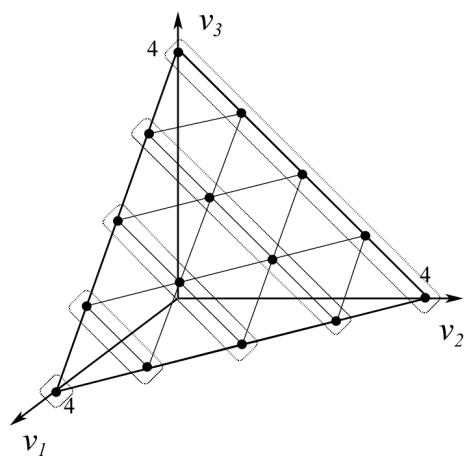


Рисунок 1.12 – Классы эквивалентности по правилу одобряющего голосования с квотой  $q = 2$

#### 1.2.3.4 Ограниченнная эквивалентность правила порогового агрегирования и правил подсчета очков

Теперь рассмотрим геометрическую иллюстрацию упорядочения согласно правилу порогового агрегирования, представленную на рисунке 1.13. Возникает вопрос: можно ли так подобрать веса для правила подсчета очков, чтобы ранговая процедура давала аналогичное упорядочение?

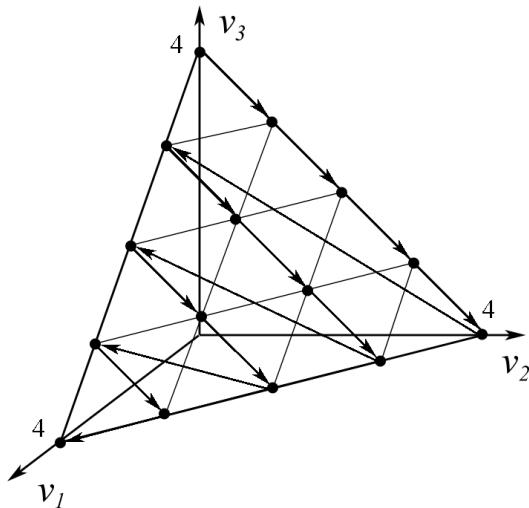


Рисунок 1.13 – Упорядочение векторов распределения оценок согласно правилу порогового агрегирования

На рисунке 1.14 изображены линии уровня для правила подсчета очков, результат которого совпадает с правилом порогового агрегирования. Эти линии построены таким образом, чтобы несравнимые по Парето векторы оценок, такие как  $(1,1,1,1)$  и  $(0,2,2,2)$ ,  $(0,1,1,1)$  и  $(0,0,2,2)$ , и т.д. давали различные значения  $W(x)$ . При этом, если  $(1,1,1,1)$  лучше, чем  $(0,2,2,2)$ , то из этого следует, что  $(0,1,1,1)$  лучше, чем  $(0,0,2,2)$  и т.д. Иными словами, при построении вектора весов мы используем некомпенсаторность в том виде, в котором она сформулирована в качестве аксиомы в [51].

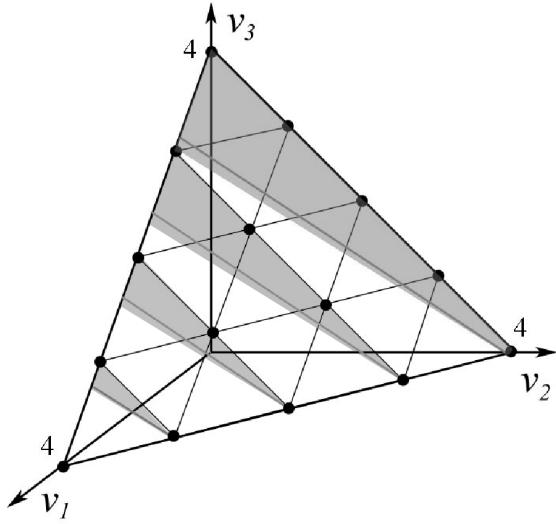


Рисунок 1.14 – Область, в которой лежат линии уровня правил подсчета очков, дающих упорядочение, эквивалентное правилу порогового агрегирования

Как видно из рисунка 1.14, существует целый класс правил подсчета очков, которые строят упорядочение альтернатив, эквивалентное упорядочению по правилу порогового агрегирования. Есть одно препятствие – аналогичное упорядочение такое правило даст для всех ситуаций, когда число избирателей и альтернатив конечно. И хотя вектор весов, построенный для некоторого фиксированного  $n^*$ , подойдет и для всех  $n < n^*$ , с ростом числа избирателей требуется изменять вектор весов. И это следует, конечно, из невыполнения принципа подавляющего большинства. Поэтому мы говорим не о полной эквивалентности правил, а об ограниченной эквивалентности.

Покажем теперь то же самое формально и сначала рассмотрим случай с тремя градациями.

Утверждение 1.1. Для  $m=3$  правило подсчета очков эквивалентно правилу порогового агрегирования тогда и только тогда, когда вектор весов равен

$$w = \alpha \cdot \left(0, \frac{n-1}{2n-1}, \frac{n}{2n-1}\right) + (1-\alpha) \cdot \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

где  $\alpha \in (0,1)$ .

Утверждение 1.2. Правило подсчета очков эквивалентно правилу порогового агрегирования тогда и только тогда, когда вектор весов рангов равен

$$w = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \cdot w_i, \text{ где } \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 1, \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, m-1$$

$$w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im}),$$

$$w_{ij} = \frac{n^{i-1} - x}{(m-1)n^{i-1} - \sum_{l=2}^i n^{i-l}}, \quad x = \begin{cases} n^{i-j}, & i-j \geq 0, \\ 0, & i-j < 0, \end{cases} \quad (\forall i = 1, \dots, m-1, j = 2, \dots, m),$$

$$w_{il} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m-1.$$

Иллюстрация плоскостей, соответствующих векторам  $w^1, w^2, w^3$  в трехмерном симплексе для случая 4 альтернатив и четырех избирателей приведена на рисунке 1.15.

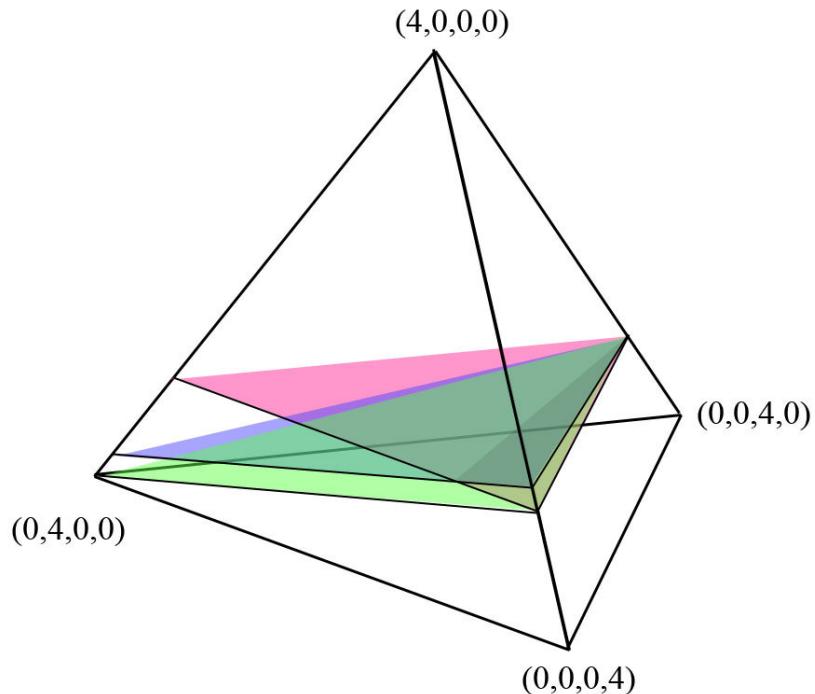


Рисунок 1.15 – Иллюстрация плоскостей, соответствующих векторам  $w^1, w^2, w^3$  в трехмерном симплексе для случая 4 альтернатив и четырех избирателей

### 1.2.3.5 Интерпретация и обсуждение результатов

Итак, мы нашли распределение весов рангов для правила подсчета очков, которое для любого конечного числа альтернатив и избирателей дает такое же упорядочение альтернатив, что и правило порогового агрегирования. Как можно проинтерпретировать этот результат?

Чтобы ответить на данный вопрос, вернемся к концепциям утилитаризма и эгалитаризма, которые мы обсуждали в начале работы. Организатор голосования решает, какую процедуру принятия решений применить и как собирать информацию о предпочтениях избирателей. Можно спрашивать у индивидов значения их функции полезности на всех альтернативах, но проще работать с простым упорядочением. Чем руководствуется организатор при выборе правила? Предположим, он рассматривает какую-либо утилитарную функцию. Необходимо распределить количество очков, присуждаемых альтернативам за ранг в предпочтениях. Это может быть правило простого большинства, правило одобряющего голосования, правило Борда и т.д. Нужно определить, что важно учесть при голосовании, первые строчки предпочтений, вторые строчки или учесть все с равномерным убыванием их важности. Иными словами, организатор голосования делает предположение относительно того, как распределены полезности индивидов по рангам альтернатив.

А если организатор принимает решение применить эгалитарное правило, правило порогового агрегирования, какими предполагаются функции полезности индивидов? Есть гипотеза, что утверждение 1.2 дает ответ на этот вопрос. Мы построили векторы весов для девяти альтернатив и 3, 4 и 10 избирателей с равным весом каждого  $w^i$  (см. рисунок 1.16). На графике по оси абсцисс располагаются ранги, по оси ординат – веса рангов. Вес наименьшего ранга равен 0.

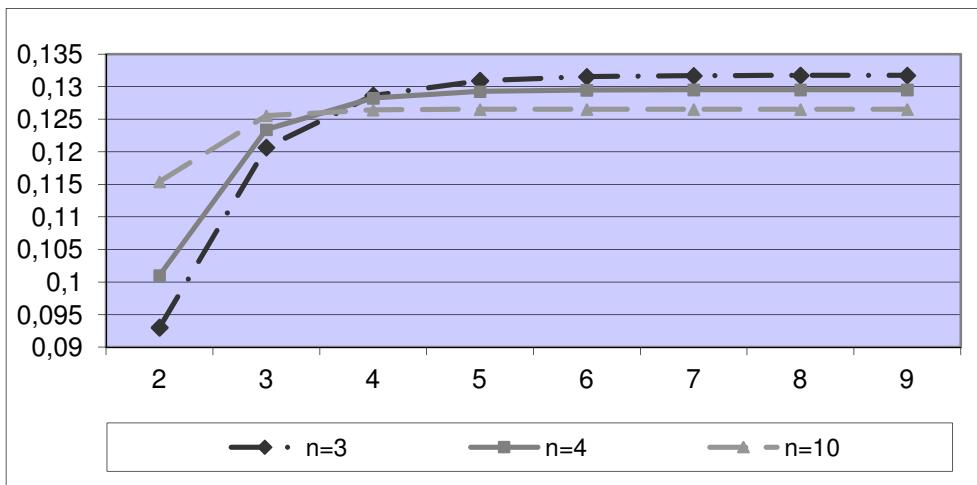


Рисунок 1.16 – Распределение весов по рангам для правил подсчета очков, дающих упорядочение, эквивалентное правилу порогового агрегирования

Интересно, что, несмотря на невозможность компенсаций на всех уровнях, существенные различия в весе мы наблюдаем только для первых двух рангов. И чем больше количество избирателей, тем равномернее распределен вес рангов от 2 и более. Или, тем ниже по сравнению с остальными рангами должен быть вес наименьшего, чтобы возможность компенсировать наихудшую оценку отсутствовала. В бесконечности вектор весов сходится к обратному правилу простого большинства, или максимин, простое эгалитарное правило.

#### 1.2.4 Некоторые выводы

В рамках работы по данному направлению был исследован вопрос о манипулировании исходов голосования коалициями участников. А именно, предложена модификация индекса Нитцана–Келли для коалиционной манипулируемости правил коллективного выбора.

Произведен расчет индексов коалиционной манипулируемости при ограничении на размер коалиции в 2 агента и в 10 агентов. Проанализированы значения индекса коалиционной манипулируемости для ряда правил: правила минимального слабоустойчивого множества, правил 2-устойчивого и 3-устойчивого множества, правила относительного большинства, правила минимального доминирующего множества, правила минимального недоминируемого множества, правила Фишбурна,

правила непокрытого множества 1, правила непокрытого множества 2, правила Ричелсона, порогового правила.

Исследованы вероятностные модели предпочтений IC, IAC и IANC. Найден предел максимальной разности индексов манипулируемости в моделях IC и IANC, IAC и IANC при бесконечном увеличении числа избирателей или числа альтернатив.

Показано, что правило порогового агрегирования является в то же время правилом подсчета очков. Найдены значения вектора весов, при которых простое правило подсчета очков дает тот же результат, что и правило порогового агрегирования.

Результаты исследований отражены в работах [17,175]:

1. Веселова Ю.А. Сложность порядковых правил коллективного выбора// XIV Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества: труды конференции / Отв. ред.: Е. Г. Ясин. – М.: Издательский дом НИУ ВШЭ, 2014. (в печати).
2. Veselova Y. The manipulability index in the IANC model, Clusters, orders, trees: methods and applications // Ed: Aleskerov F., Goldengorin B., Pardalos P. Springer, 2014. (в печати).

### 1.3 Исследования по анализу научометрических данных

Исследования по анализу неукометрических данных осуществлялись в двух основных направлениях:

- исследования применимости метода анализа паттернов к нахождению взаимосвязей между наукой, образованием и инновационной деятельностью в регионах России;
- исследования применимости оболочечного анализа данных к анализу неоднородных выборок.

#### 1.3.1 Применения метода анализа паттернов к исследованию взаимосвязей между наукой, образованием и инновационной деятельностью в регионах России

В этом пункте отчета приведены результаты применения метода анализа паттернов к исследованию взаимосвязей между наукой, образованием и инновационной деятельностью в отдельных регионах России.

Успешное развитие регионов напрямую связано с рядом экономико-социальных факторов, в том числе с уровнем развития образования и науки. Инновационная активность невозможна в отсутствии солидного фундамента научной деятельности, который строится благодаря деятельности не только научных сотрудников, но и студентов высших учебных заведений, а также работе квалифицированных служащих. Взаимосвязь этих факторов образует сложную систему, анализ которой является сложной задачей, для решения которой в работе применен метод анализа паттернов.

Анализ паттернов – это новая методика анализа данных, связанная с поиском взаимосвязей между объектами исследования, построением их классификации и исследованием развития объектов во времени, выявлении трендов. Анализ региональных данных, основанный на классических методиках, таких как построение различных рейтингов и ранжирований менее предпочтителен методу анализа паттернов при исследовании данных науки, образования и инновационной активности в регионах РФ при проведении данного исследования в связи с отличительными особенностями данной методологии: способностью метода анализа паттернов работать с со-

вокупностью всех исследуемых признаков и соотношением в один паттерн объектов, имеющих разные количественные характеристики, но схожую внутреннюю структуру показателей и взаимосвязей между ними.

Ранее метод анализа паттернов весьма успешно применялся при решении непростых прикладных задач в ряде областей: анализе банковской сферы [4, 55], анализе конкуренции между политическими партиями [55], макроэкономике [48, 49], менеджменте и управлении персоналом [53, 54, 55].

В проведённой работе методология анализа паттернов выполняет следующие основные задачи:

- формирование типологии/классификации объектов на основе выявленных паттернов (статический анализ паттернов);
- порождение гипотез на основе полученных паттернов данных;
- формирование типологии/классификации объектов, основываясь на проведённом динамическом анализе выявленных паттернов;
- анализ потенциальной смены характеризующего объекта паттерна с течением времени.

Объектами проведённого анализа являются регионы РФ за период 2007–2010гг. В результате работы построена система индикаторов, адекватно отражающих положение региона с точки зрения развития в нем науки, степени активности инновационной деятельности и образования.

Целью применения метода анализа паттернов относительно регионам является исследование скрытых взаимосвязей между наукой, образованием и инновационной деятельностью, нахождение «близких» по структуре и соотношениям между указанными областями регионов.

### 1.3.1.1 Методология исследования

Значение понятия «паттерн» включает в себя не только сам набор значений системы показателей группы объектов, но и группу объектов, имеющих одинаковые или близкие по значениям показатели в системе. Анализ паттернов включает в себя

ряд операций, изображённых на рисунке 1.16, и подразделяется на два типа: статический и динамический. Статический анализ предполагает исключительно разбиение исследуемых объектов по кластерам, тогда как динамический анализ изучает принадлежность объектов определённым паттернам с течением времени.

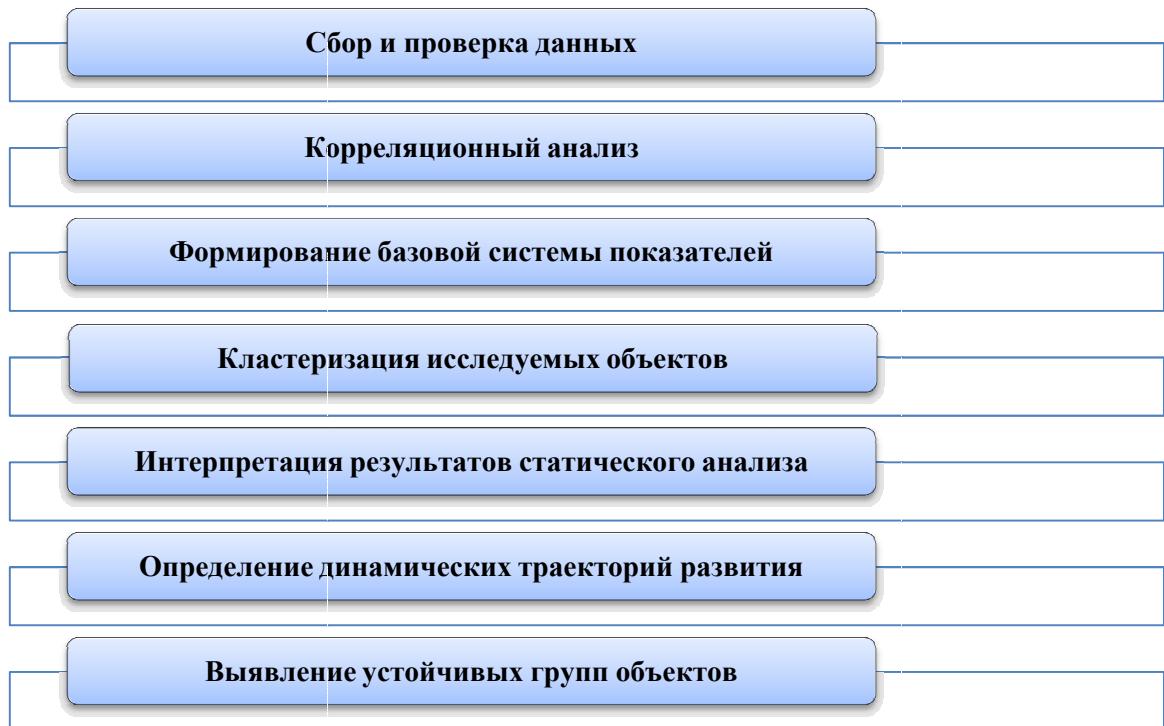


Рисунок 1.16 – Схематичное представление метода анализа паттернов

В работе со сложными алгоритмами, важна возможность сокращения числа переменных, так как это позволяет экономить время работы. Помимо этого, преимуществом является возможность исключить объекты, имеющие уникальное построение, так как задачей стоит внесения ясности в понимание взаимосвязей между объектами и их поведением. В связи с данным фактом, при формировании базовой системы показателей экспертным образом были сформированы 6 основных блоков:

- 1) социально-экономические условия;
- 2) образовательный потенциал;
- 3) потенциал научно-технической деятельности;
- 4) результативность исследований и разработок;
- 5) потенциал инновационной деятельности;

## 6) результативность инновационной деятельности.

При выборе показателей учитывалась доступность информации, представленной для каждого из регионов, а также наличие данных по всем показателям в течение нескольких лет.

Таким образом, каждому исследуемому объекту  $x$  ставилось в соответствие вектор  $z^x = (z_1^x, \dots, z_6^x)$  характеризующий объект  $x$  по 6-и признакам. Однако, после проведения корреляционного анализа между блоками, было принято решение исключения блока 3 «Потенциал научно-технической деятельности». Пример корреляционного анализа приведён в Таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Корреляционный анализ между блоками за 2007г.

2007	Блок 1	Блок 2	Блок 3	Блок 4	Блок 5	Блок 6.
Блок 1. Социально-экономические условия	1					
Блок 2. Образовательный потенциал	-0,2	1				
Блок 3. Потенциал научно-технической деятельности	0,16	-0,1	1			
Блок 4. Результативность исследований и разработок	0,11	0,11	0,7	1		
Блок 5. Потенциал инновационной деятельности	-0,2	0,14	0,22	0,33	1	
Блок 6. Результативность инновационной деятельности	-0,1	0,05	0,05	0,13	0,21	1

Таким образом, регионы РФ исследовались по 5 основным блокам показателей.

### 1.3.1.2 Результаты анализа паттернов

Для наглядности проведения кластеризации в работе все регионы были представлены в виде кусочно-линейных функций. На оси абсцисс откладывались номера показателей, которые характеризуют структуру объекта, на оси ординат – значения показателей. В результате для каждого исследуемого периода получилась определённая совокупность кусочно-линейных функций. Пример таких функций по разным регионам и за 2008 год изображён на рисунке 1.17.

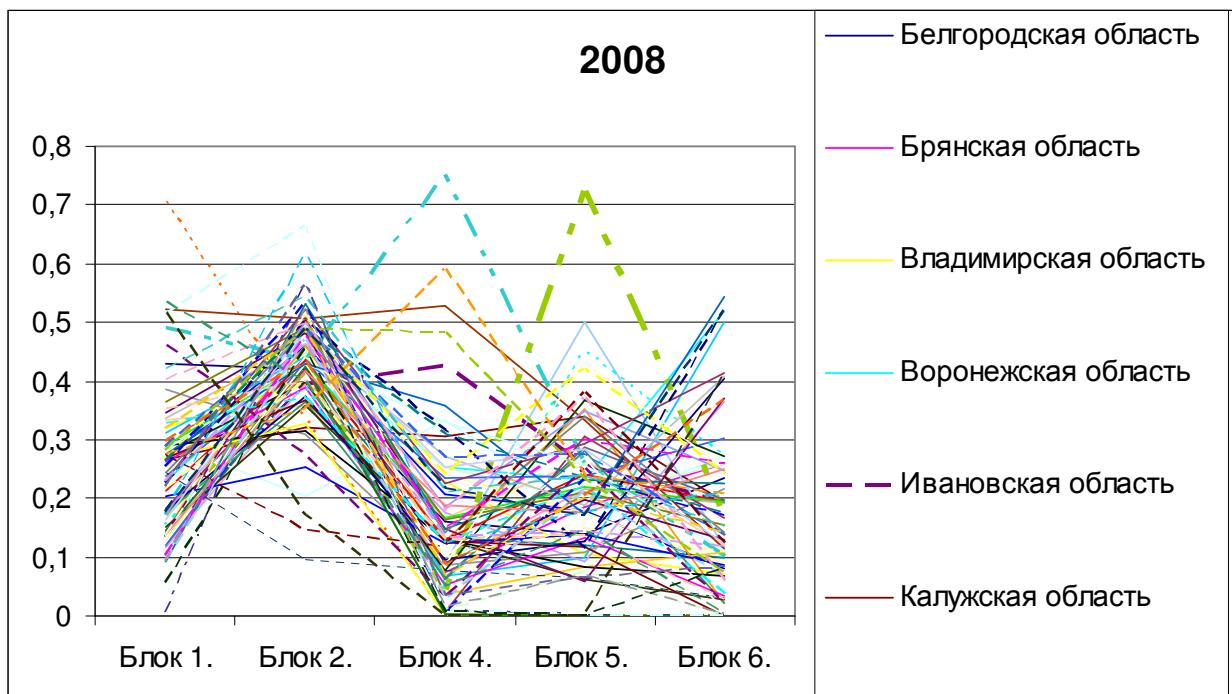


Рисунок 1.17 – Кусочно-линейные функции, описывающие исследуемые регионы за 2008г.

При ближайшем рассмотрении можно отметить, что поведение некоторых регионов закономерно. В случае если параметры регионов схожи, можно сделать вывод об аналогичной стратегии развитию науки, образованию и инновационной деятельности в этих регионах.

Учитывая, что целью работы являлся динамический анализ поведения регионов, полученные кусочно-линейные кривые по каждому году были объединены в общую выборку. Итого получилось 332 объекта для кластеризации.

Рассматривалась кластеризация методом k-средних, иерархическая кластеризация, а также многошаговая процедура кластерного анализа на основе комбинации двух указанных методов. В результате было получено 24 паттерна данных, каждый из которых включает более двух объектов, и, кроме того, 24 уникальных паттерна. Пример полученного паттерна приведён на рисунке 1.18. Данный паттерн («2») содержит 19 объектов, имеющих схожую внутреннюю структуру по выбранным показателям.

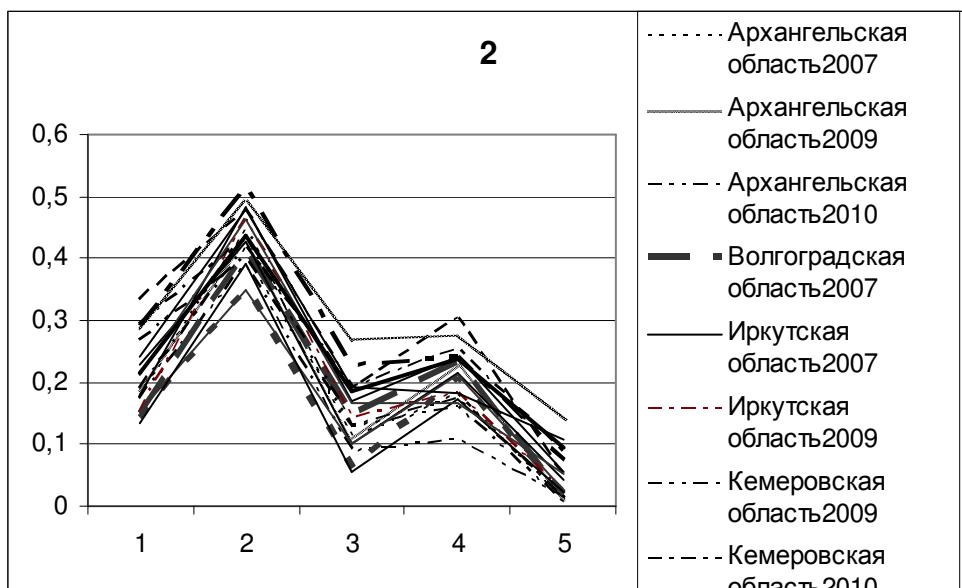


Рисунок 1.18 – Пример полученного паттерна

Следует отметить, что в работе использовались относительные показатели, позволяющие изучить внутреннюю структуру взаимосвязей между наукой, образованием и инновационной деятельностью. Отказавшись от использования абсолютных показателей, нам удалось избежать влияния размеров исследуемых явлений и сосредоточиться на результативности и структурных характеристиках.

Следующим этапом исследования являлся динамический анализ паттернов за период 2007–2010гг. В результате были построены траектории развития каждого из регионов, а также выявлены динамические группы. Это позволило определить, какому паттерну следовали регионы на протяжении четырех лет развития. Объекты, включенные в одну динамическую группу, характеризуются схожей реакцией на изменения во внешней среде и одинаковой стратегией развития. Пример устойчивой динамической группы приведён на рисунке 1.19.

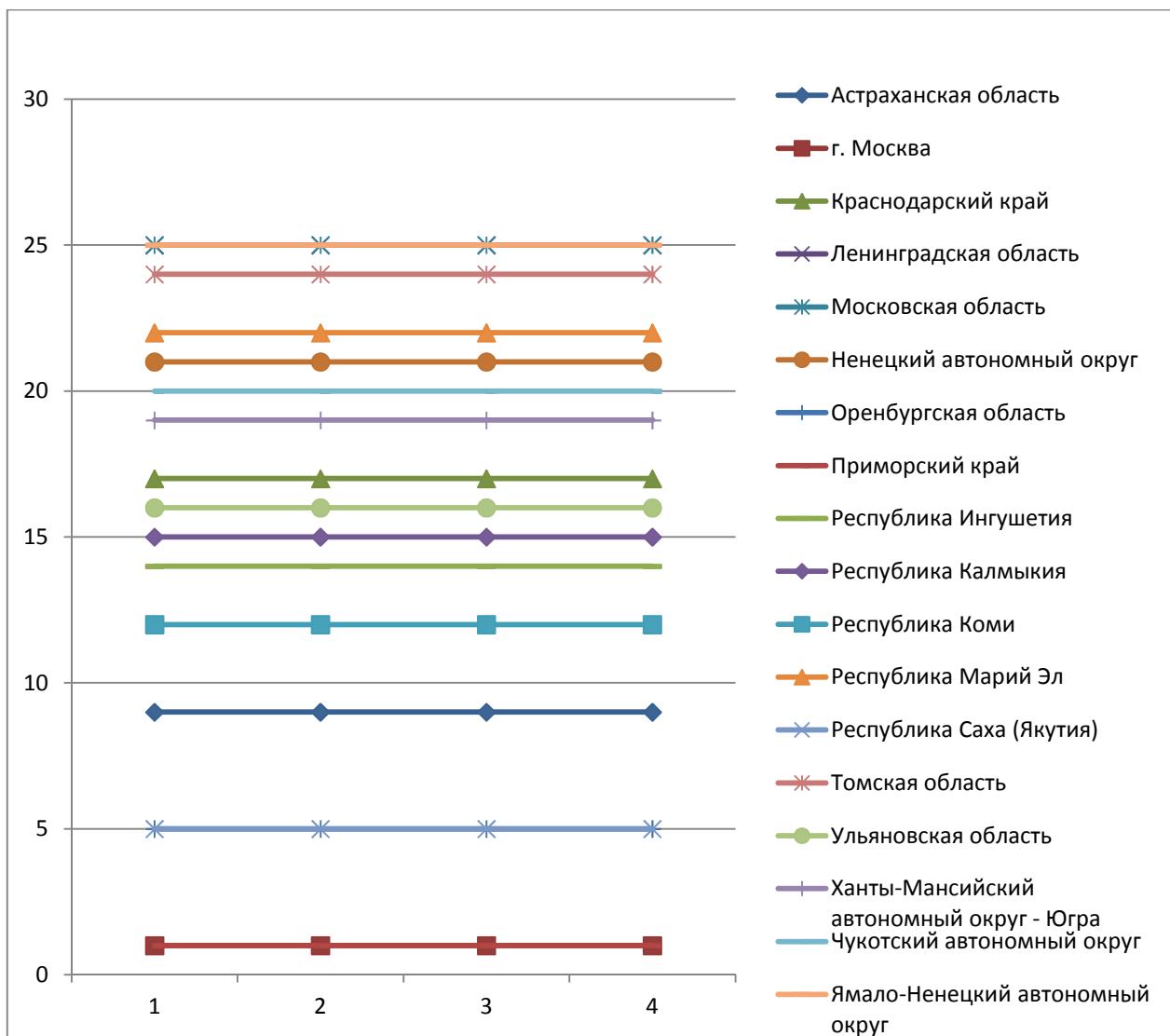


Рисунок 1.19 – Устойчивые динамические группы

### 1.3.1.3 Некоторые выводы

В результате применения метода анализа паттернов к исследованию социально-экономических характеристик, потенциала и результативности инновационной деятельности, науки и образования в регионах РФ решена задача определения регионов со схожей структурой развития, выявлены устойчивые динамические группы регионов, характеризуемые схожей реакцией на изменения внешней среды и одинаковой стратегией развития. Полученные результаты могут быть использованы для решения следующих задач:

- оценки различных видов экономической деятельности с использованием характерных векторов направленности;

- оценка высоко-, средне- и низкотехнологичных отраслей;
- выявление нетипичной динамики индикаторов;
- формирование трендов изменения индикаторов;
- оценка дотационных регионов и регионов-доноров.

Результаты исследований отражены в работах [10, 56]:

1. Алескеров Ф.Т, Белоусова В.Ю., Егорова Л.Г., Миркин Б.Г. Анализ паттернов в статике и динамике, часть 1: обзор литературы и уточнение понятия// Бизнес-информатика, 3(25), 2013, с.3–18
2. Aleskerov F., Gokhberg L., Egorova L., Myachin A., Sagieva G. Pattern Analysis in the Study of Science, Education and Innovative Activity in Russian Regions// Procedia Computer Science, 17, 2013, pp.687–694.

### 1.3.2 Исследования применимости оболочечного анализа данных к анализу неоднородных выборок

В этом пункте отчета приведены результаты исследований по применимости оболочечного анализа данных к анализу неоднородных выборок.

Основную идею оболочечного анализа данных можно проиллюстрировать на следующем примере. Необходимо оценить эффективность некоторого множества компаний. Подразумевается, что каждая фирма в выборке производит какое-то количество результатов  $q_1, \dots, q_M$ , используя при этом несколько типов ресурсов  $x_1, \dots, x_N$  (количество типов результатов  $M$  и ресурсов  $N$  фиксировано для данной выборки). Естественным подходом здесь было бы агрегировать количество потраченных ресурсов и результатов и принять за эффективность  $i$ -го объекта следующую величину

$$Eff_i = \frac{\text{Aggregated Output}}{\text{Aggregated Input}} = \frac{u_1 q_{1i} + \dots + u_M q_{Mi}}{v_1 x_{1i} + \dots + v_N x_{Ni}}.$$

Однако никакой информации о том, как выбирать веса (их также можно интерпретировать как важность соответствующих результатов или ресурсов)  $u_1, \dots, u_M, v_1, \dots, v_N$  у нас не имеется. Оболочечный анализ данных (OAD, англ. —

Data Envelopment Analysis или коротко DEA) как раз и представляет собой аппарат, позволяющий автоматически выбрать данные коэффициенты.

Начнем с базовой мультипликативной формулировки (от англ. multiplier form), предложенной в [77]. Авторы развили и обобщили предложенную в [97] модель, и показали, что проблема оценки эффективности может быть сформулирована в терминах математического программирования следующим образом

$$\max_{u,v} \left( \theta_i = \frac{u_1 q_{1i} + \dots + u_M q_{Mi}}{v_1 x_{1i} + \dots + v_N x_{Ni}} \right) \quad (1.26)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \frac{u_1 q_{1i} + \dots + u_M q_{Mi}}{v_1 x_{1i} + \dots + v_N x_{Ni}} \leq 1, i = 1, \dots, L; \\ u_j \geq 0, j = 1, \dots, M; \\ v_k \geq 0, k = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.27)$$

где  $L$  — количество оцениваемых фирм,  $q_{ij}$  —  $j$ -й выходной параметр ( $j = 1, \dots, M$ )  $i$ -й фирмы,  $x_{ki}$  —  $k$ -й входной параметр ( $k = 1, \dots, N$ )  $i$ -й фирмы,  $u$  и  $v$  вектора неизвестных подходящей размерности. Наконец, значение  $\theta_i \in (0, 1]$  представляет эффективность  $i$ -й компании.

В [77] также показано, что представленная выше оптимационная задача может быть представлена в виде задачи линейного программирования. В литературе представленная ниже форма ОАД носит название оболочечной формы (от англ. envelopment form)

$$\min_{\lambda, \theta_i} \theta_i \quad (1.28)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -q_i + Q\lambda \geq 0; \\ \theta_i x_i - X\lambda \geq 0; \\ \lambda \geq 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

где  $q_i$  —  $M \times 1$  вектор выходных параметров  $i$ -й фирмы,  $x_i$  —  $N \times 1$  вектор входных параметров  $i$ -й фирмы,  $Q$  —  $M \times L$  матрица выходных параметров всех  $L$  фирм,  $X$  —  $N \times L$  матрица выходных параметров всех фирм,  $\lambda$  —  $L \times 1$  вектор весов, которые

можно интерпретировать как теневые цены, (см. [86]). Как и в предыдущем случае значение величины  $\theta_i$  представляет эффективность  $i$ -й фирмы.

Формулировка (1.28)–(1.29) является фундаментальной. Данная версия модели ОАД также носит название CCR (вслед за инициалами авторов-разработчиков). Область применимости данной версии ОАД ограничивается случаем, когда все фирмы из оцениваемой выборки оперируют на оптимальном (синоним — постоянном) для себя масштабе. Благодаря этому в английской литературе модель также часто называется CRS DEA (от англ. Constant Return to Scale, постоянная отдача от масштаба). Несложно адаптировать модель к случаю переменной отдачи от масштаба, то есть к ситуации, когда некоторые фирмы ведут производство в неоптимальном для них объёме. Для этого необходимо добавить к (1.29) одно дополнительное ограничение

$$\mathbf{1}^T \lambda = 1, \quad (1.30)$$

где  $\mathbf{1}^T$  — единичный вектор размера  $1 \times L$ .

Линейная программа (1.28)–(1.29) вместе с ограничением (1.30) носит название VRS DEA (от англ. Variable Return to Scale). Данная модификация была введена в [66].

С помощью мультипликативной формы (1.26)–(1.27) можно установить важную геометрическую интерпретацию обсуждавшихся выше моделей в трех простейших случаях одного ресурса — одного результата, двух ресурсов — одного результата и одного ресурса — двух результатов. На рисунке 1.20 представлена первая ситуация.

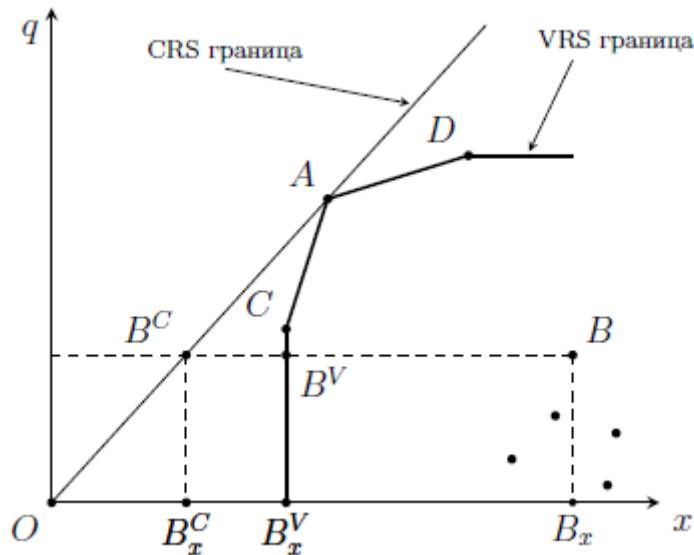


Рисунок 1.20 – Интерпретация модели ОАД в случае  $N=M=1$ , (здесь  $x$  — ресурс,  $q$  — выпуск)

Отметим здесь появление важного термина — граница эффективности, или просто граница. Под ним подразумевается множество, состоящее в общем случае из пересечения нескольких гиперповерхностей, в ресурсно-результативном пространстве, которое «обволакивает» всё множество альтернатив (оцениваемые фирмы).

Фирма А эффективна в смысле обоих моделей, фирмы С и Д эффективны только в смысле VRS версии модели ОАД. Эффективность фирмы В на рисунке 1.20 в VRS и CRS модификациях рассчитывается как отношение  $\frac{|OB_x^V|}{|OB_x|}$  и  $\frac{|OB_x^C|}{|OB_x|}$ , соответственно. Такая мера полностью совпадает с нашим интуитивным суждением о том, как должна быть устроена относительная эффективность фирмы. Заметим, что именно с помощью границы эффективности производится оценка всего множества альтернатив.

Чуть более сложно выглядят диаграммы для двух остальных простейших случаев, представленных на рисунке 1.21.

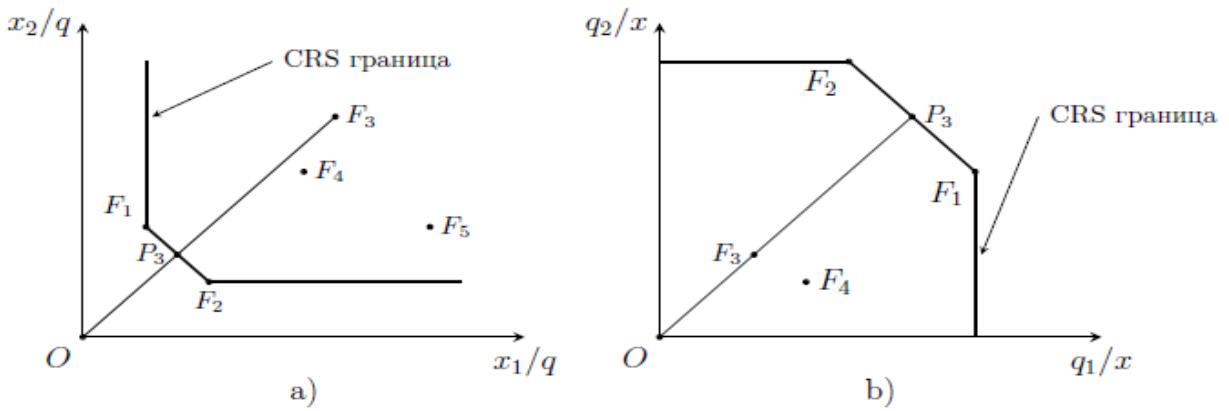


Рисунок 1.21 – Интерпретация модели DEA в случае а)  $N=2, M=1$ ; б)  $N=1, M=2$ .

Эффективность фирмы  $F_3$  измеряется в случае а) как отношение  $\frac{|OP_3|}{|OF_3|}$ , в случае б) — как отношение  $\frac{|OF_3|}{|OP_3|}$ . Формальная точка  $P_3$  также называется проекцией фирмы  $F_3$  на границу эффективности.

Стоит отметить, что отдача от масштаба далеко не единственное ограничение области применимости моделей ОАД. Таковыми могут быть, например, наличие неуправляемых в кратковременном периоде параметров, которые необходимо включать в оценку. Примером может служить оценка эффективности фермерских хозяйств. В данном случае площадь земельных угодий, амбаров и т.п. — неуправляемый в краткосрочном периоде параметр. С другой стороны, очевидно, что этот параметр влияет на эффективность ферм, поэтому его необходимо включать в качестве ресурсной переменной. Приведенные выше постановки ОАД не в силах справиться с такой задачей. Для этого случая существует исчерпывающее решение, подробно изложенное в [86].

Гораздо более серьезным ограничением на использование моделей оболочечного анализа данных является разнородность оцениваемой выборки. Данная проблема представляет интерес также и потому, что она не имеет единого общепризнанного решения. Далее мы будем вести речь о различных адаптациях модели ОАД к ситуации, когда оцениваемые альтернативы существенно неоднородны.

Продолжение работы организовано следующим образом. Во втором разделе дается краткий обзор различных применений модели ОАД на практике. Затем обсуж-

даются различные виды неоднородности, строятся содержательные примеры ситуаций, когда выборка неоднородна и стандартный метод ОАД неприменим. Даётся четыре базовых подхода к решению данной проблемы. В четвертом разделе обсуждается обобщение классического ОАД, основанное на том, что оцениваемые фирмы имеют различные цели и приоритеты. Последняя часть работы посвящена изложению подхода к решению проблемы неоднородных выборок, предложенному в [9].

### 1.3.2.1 Применения метода ОАД

На практике модель ОАД приобрела широкую известность. Мы затронем лишь некоторые экономические сферы, в которых этот метод успешно используется. Во-первых, стоит отметить активное применение описанных выше моделей к оценке эффективности в сфере высшего образования различных государств, например, в Англии – [63, 71, 103, 117], в Австралии – [46, 64], в Греции – [121], в Германии – [124, 176], в Китае – [118], в Голландии – [80].

В России список работ, использующих метод ОАД для оценки эффективности ВУЗов достаточно ограничен, представим лишь [45]. Подробный обзор оценки эффективности в сфере высшего образования можно найти в [1]. В качестве критериев оценки используются показатели, перечисленные в Таблице 1.2.

Отметим, что в большинстве работ авторы строят оригинальные модификации модели ОАД для того, чтобы обеспечить ее работу в каждом конкретном случае. Отметим, однако, то общее, что объединяет данные работы, например, выбор ресурсных и результативных параметров.

Таблица 1.2 – Критерии оценки в сфере высшего образования

Входные переменные	Выходные переменные
Совокупные издержки	Качество исследовательской работы
Расходы на научные проекты	Число диссертаций
Численность студентов бакалавриата	Число статей в рец. журналах
Численность студентов магистратуры	Численность выпускников
Численность студентов аспирантуры	Процент отчисленных студентов
Рейтинг научной деятельности	Успеваемость студентов
Численность сотрудников университета	Доходы от исследований

Еще одним полем применения метода ОАД является анализ эффективности всевозможных энергетических предприятий, примером служат работы [98, 111]. Авторы используют стандартную модель ОАД, а также разрабатывают оригинальные модификации для применения в конкретной ситуации.

Стоит отметить, что в данном случае различные виды издержек предприятия (совокупные, операционные) часто выбираются в качестве единственного входного параметра. В качестве результативных показателей обычно используются:

- количество сгенерированной энергии;
- количество переданной энергии;
- количество распределенной энергии;
- общий объем производства;
- потребление топлива;
- длина сети.

В [140, 172] демонстрируется другой подход к анализу эффективности энергетического сектора. За основу берутся параметры, связанные с экологией:

- количество выброшенного в атмосферу углекислого газа (ресурс);
- потери электроэнергии (ресурс);
- эффективность использования природных ископаемых (результат).

Таким образом, в [140, 172] рассчитывается экологическая эффективность энергетических предприятий.

Мы перечислили лишь некоторые области применения модели ОАД, хотя данная методика также используется при оценке эффективности банковского сектора, систем здравоохранения и городского транспорта, государственного управления и других отраслей экономики. Интересующегося читателя мы отсылаем к обзору [143].

### 1.3.2.2 Неоднородность при оценке эффективности

В первую очередь сконцентрируемся на вопросе, чем может быть вызвана неоднородность. Причин для этого множество, главные из них, согласно [104], это:

- различия в типе управления (государственный/частный);
- наличие государственных привилегий у некоторых фирм;
- особенности расположения оцениваемых объектов (город/сельская местность, плотность населения в том месте, где располагается фирма);
- различные цели организаций (для университетов – исследовательская и педагогическая направленности);
- различия в законодательстве.

Даже такой краткий список показывает, что существует довольно много причин ведущих к тому, что выборка может быть неоднородной. Стандартная модель ОАД не способна учесть разнородность объектов.

В обозначениях рисунка 1.20 приведем пример работы модели ОАД на неоднородном наборе альтернатив. В случае с единственным параметром входа и выхода существует возможность того, что некоторое подмножество всех фирм будет сосредоточено «далеко» от обеих границ (множество из четырех безымянных точек на рисунке 1.20). Пусть эти точки характеризуют, например, университеты. Экономически это означает, что данные четыре университета находятся в крайне неблагоприятной обстановке (например, из-за малой плотности населения в округе или из-за недостаточного государственного финансирования).

Применив ОАД, мы увидим, что значения эффективности для некоторых фирм ничтожно малы, что не отражает существующую ситуацию в отрасли. Таким образом, оценки оказываются несправедливо заниженными.

Существует ряд работ, использующих ОАД для оценки неоднородной выборки, согласно [86] следующие решения используются чаще всего.

### 1.3.2.2.1 Разбиение выборки по категориям

Если значения переменной, отвечающей за неоднородность, могут быть упорядочены от меньшего к большему в зависимости от влияния на эффективность, то может быть использован следующий подход, апробированный в [67]. Эффективность  $i$ -й фирмы оценивается только относительно тех фирм, для которых значение параметра разнородности не выше, чем у  $i$ -й фирмы.

Рассмотрим случай оценки эффективности ресторанов быстрого питания. Какие-то из них располагаются в центре города, какие-то – на окраинах, наконец, все остальные располагаются в сельской местности. Ясно, что преимущество у тех, кто ближе к городскому центру. В этом случае оценка проводится в три этапа: а) сравниваются только рестораны из сельской местности, б) сравниваются кафе из сельской местности и из пригородов, в) наконец проводится оценка всей выборки, включая рестораны, расположенные в центре города. Эффективностью сельских ресторанов считаются значения, полученные на первом этапе, пригородных – на втором, расположенных в городских центрах – на третьем.

Таким образом, не проводится сравнения объектов, один из которых имеет конкурентное преимущество перед другим.

Стоит отметить, что цель [67] состояла не в том, чтобы учсть неоднородность выборки, а в том, чтобы внести в стандартную модель ОАД корректиры с учетом того, что некоторые ресурсы или результаты невозможно контролировать. Однако невозможно не учитывать при оценке, что те рестораны, которые находятся ближе к центру города, получают конкурентное преимущество, поэтому был разработан описанный выше прием.

В качестве иллюстрации разработанной модификации в [67] проводится оценка шестидесяти ресторанов быстрого питания.

### 1.3.2.2.2 Проективный метод ОАД

Может случиться так, что не существует естественного упорядочения значений параметра среды в зависимости от влияния на эффективность. Примером такого па-

раметра может служить тип управления – государственный/частный. Тогда используется метод, разработанный в [78]. Он включает в себя три основных шага.

- выборка делится на подвыборки относительно выбранного параметра неоднородности; используется стандартная модель ОАД внутри каждой подвыборки;
- находятся проекции всех фирм на соответствующие им границы эффективности;
- используется стандартный метод ОАД для полученных на предыдущем шаге проекций.

Два описанных выше метода имеют целый ряд ограничений и недостатков. Во-первых, поскольку множество, с которым мы сравниваем объекты, уменьшается, это ведет к тому, что многие объекты станут эффективными. Во-вторых, только одна переменная среды может быть включена в анализ. Оба метода требуют, чтобы переменную, отвечающую за неоднородность, можно было разбить на различные категории (это не всегда возможно, особенно при учете социальной, культурной или политической неоднородности). Наконец, первый метод подразумевает, что «знак» влияния переменной на эффективность известен априори, что не всегда верно.

Все описанные недостатки позволяют решать проблемы неоднородности методами 1 и 2 лишь в некоторых случаях, причем область их применения довольно сильно ограничена.

#### 1.3.2.2.3 Включение неоднородностей в задачу линейного программирования

Другой возможный метод – включить параметры среды непосредственно в задачу линейного программирования, составляющую суть метода ОАД (см. [73, 100]). Это возможно сделать несколькими способами:

- зная, какие переменные имеют отрицательное влияние на эффективность, а какие – положительное;
- не зная «знаков» влияния переменных среды на эффективность.

Рассмотрим первый вариант. Пусть имеется  $K$  параметров среды, имеющих положительное влияние на эффективность оцениваемой выборки,  $z_i = (z_{1i}, \dots, z_{Ki})$  – вектор значений этих переменных для  $i$ -й фирмы,  $Z - K \times L$  матрица значений па-

раметров среды для всех фирм выборки. Модель ОАД в данном случае примет форму

$$\min_{\lambda, \theta_i} \theta_i$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -q_i + Q\lambda \geq 0; \\ \theta_i x_i - X\lambda \geq 0; \\ z_i - Z\lambda \geq 0; \\ \lambda \geq 0, \end{cases}$$

где все обозначения взяты из (1.28)–(1.29).

Если  $K$  переменных среды имеют отрицательное влияние на значения эффективности, то похожим образом можно включить их в ОАД

$$\min_{\lambda, \theta_i} \theta_i$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -q_i + Q\lambda \geq 0; \\ \theta_i x_i - X\lambda \geq 0; \\ -z_i + Z\lambda \geq 0; \\ \lambda \geq 0, \end{cases}$$

где все обозначения взяты из (1.28)–(1.29) и предыдущего примера.

Заметим, что если имеются переменные среды, влияющие на эффективность как положительно, так и отрицательно, то итоговая формулировка задачи ОАД представляет объединение двух представленных выше задач линейного программирования.

Если тип влияния параметров среды на эффективность исследуемой выборки неизвестен, то предлагается использовать следующую задачу линейного программирования

$$\min_{\lambda, \theta_i} \theta_i$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -q_i + Q\lambda \geq 0; \\ \theta_i x_i - X\lambda \geq 0; \\ z_i - Z\lambda = 0; \\ \lambda \geq 0, \end{cases}$$

К недостаткам данного подхода можно отнести то, что параметры среды должны быть непрерывны. Кроме того, дополнительные ограничения существенно увеличивают значения эффективности для всех фирм.

Наконец, для определения знаков влияния параметров среды на эффективность можно использовать эконометрические методы. Включение категорийных переменных непосредственно в задачу линейного программирования также возможно, по этому поводу см. [68].

#### 1.3.2.2.4 Кластерный метод

Существует и другой метод, главная идея которого – соединить кластерный анализ, нейронные сети и ОАД (см. [115, 133, 137, 139, 159, 161, 163, 165]), используются две версии этого метода. Согласно первой – необходимо разбить исследуемую выборку на кластеры в зависимости от полученных значений эффективности, затем применить стандартный ОАД к кластерам. Во втором случае объекты сначала разбиваются на кластеры в зависимости от значений входных и выходных переменных. После этого стандартный метод ОАД применяется для каждого кластера отдельно.

Рассматривая более подробно описанные выше методы, становится ясно, что все они связаны либо с разбиением исходной выборки на кластеры, либо с четким определением параметров, которые имеют непосредственное воздействие на эффективность. Без сомнения представленные техники хорошо зарекомендовали себя на практике, однако, они не учитывают двух обстоятельств. Во-первых, возможна ситуация, когда сложно выделить конкретные параметры среды. Такое происходит, когда необходимо учесть влияние на эффективность сложных социальных или политических процессов. Методы, описанные выше, не годятся для этого случая.

Во-вторых, рассмотренные выше способы учета неоднородности не подразумевают, что исследуемые объекты могут иметь различные цели в рамках одной отрасли. Прекрасный пример ситуации такого рода – университеты, одни из которых могут быть нацелены на проведение исследовательской деятельности, другие – на обучение специалистов в определенной области. Следующая глава посвящена методу, который позволяет учесть разнородность, возникающую из-за разности в приоритетах.

### 1.3.2.3 Многозадачный ОАД

Метод, которому посвящена данная часть работы, был впервые представлен в [71] и применялся его для оценки эффективности английских университетов. Рассмотрим простейший случай двух возможных приоритетов.

Пусть по-прежнему имеется  $N$  ресурсов,  $M$  результатов и  $L$  фирм. Пусть  $x^1 \subset \{x_1, \dots, x_N\}$  – ресурсы, используемые только для достижения первой цели,  $x^{12}$  – ресурсы, используемые для достижения двух целей,  $x^2$  – ресурсы,годные только для второй цели. Очевидно, что  $\{x_1, \dots, x_N\} = x^1 \cup x^{12} \cup x^2$ . Аналогичным образом множество результативных параметров разбивается на три группы,  $\{q_1, \dots, q_M\} = q^1 \cup q^{12} \cup q^2$ .

Для  $j$ -го ресурса из множества  $x^{12}$  ведем коэффициент  $\alpha_j$  – вес, с которым данный ресурс используется для достижения первой цели. Соответственно,  $1 - \alpha_j$  – вес, с которым ресурс  $x_j$  используется для достижения второй цели. Аналогично, для  $j$ -го результата из множества  $q^{12}$  вводится коэффициент  $\beta_j$ .

Таким образом, формулируется следующая задача математического программирования

$$\max_{u, v, \alpha, \beta} \gamma_i^1 \theta_i^1 + \gamma_i^2 \theta_i^2 \quad (1.31)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \frac{\sum_{\{j|q_j \in q^1\}} u_j q_{ji} + \sum_{\{j|q_j \in q^{12}\}} u_j \beta_j q_{ji}}{\sum_{\{j|x_j \in x^1\}} v_j x_{ji} + \sum_{\{j|x_j \in x^{12}\}} v_j \alpha_j x_{ji}} \leq 1, i = 1, \dots, L; \\ \frac{\sum_{\{j|q_j \in q^2\}} u_j q_{ji} + \sum_{\{j|q_j \in q^{12}\}} u_j (1 - \beta_j) q_{ji}}{\sum_{\{j|x_j \in x^2\}} v_j x_{ji} + \sum_{\{j|x_j \in x^{12}\}} v_j (1 - \alpha_j) x_{ji}} \leq 1, i = 1, \dots, L; \\ u \geq 0; \\ v \geq 0, \end{cases} \quad (1.32)$$

где  $u$  –  $M \times 1$  вектор весовых коэффициентов для выходных результатов,  $v$  –  $N \times 1$  вектор весовых констант для ресурсных параметров,  $\alpha$  –  $|x^{12}| \times 1$  – вектор коэффициентов, определяющих распределение ресурсных параметров по двум приоритетам,  $\beta$  –  $|q^{12}| \times 1$  – вектор коэффициентов, определяющих влияние каждого вида деятельности на результаты,  $\theta_i^1 \in (0,1]$  – значение эффективности  $i$ -й фирмы по первому направлению,  $\theta_i^2 \in (0,1]$  – аналогичная величина для второго направления деятельности,  $\theta_i$  – средняя эффективность. Величины  $\gamma_i^1$  и  $\gamma_i^2$  определяют важность каждого из двух направлений деятельности для  $i$ -й фирмы.

Отметим, что задача (1.31)–(1.32) представляет собой уже существенно нелинейную оптимизационную задачу. Это происходит из-за коэффициентов, определяющих важность направлений развития фирм.

Скажем также несколько слов о коэффициентах, определяющих важность каждого из двух направлений деятельности, так как все остальные величины в (1.31)–(1.32) либо определены заранее, либо по ним ведется оптимизация. Однако, о величинах  $\gamma_i^1$  и  $\gamma_i^2$  нам пока ничего не известно.

Стоит отметить, что в такой постановке величины  $\gamma_i^1$  и  $\gamma_i^2$  должны быть выбраны заранее с условием  $\gamma_i^1 + \gamma_i^2 = 1$ . Такой подход работает, если априори известна стратегия фирм, принадлежащих выборке. Однако исследователь не всегда располагает такой информацией, в этом случае необходимо добавить к ограничениям (1.32) следующие тождества

$$\begin{cases} \gamma_i^1 = \frac{\sum_{\{j|x_j \in x^{12}\}} v_j \alpha_j x_{ji}}{\sum_{\{j|x_j \in x^{12}\}} v_j x_{ji}} \\ \gamma_i^1 + \gamma_i^2 = 1 \end{cases} \quad (1.33)$$

здесь индекс  $i$  фиксирован в соответствии с (1.31).

Таким образом, согласно (1.33) приоритеты  $i$ -й фирмы распределяются согласно тому, как эта фирма распределяет ресурсы между ее целями.

Данная модель предлагает решение проблемы оценки эффективности при неоднородности выборки, связанной с наличием разных целей у разных объектов. Она нашла широкое применение в литературе, например, [85, 158, 171, 178].

#### 1.3.2.4 Метод последовательного исключения альтернатив

Рассмотрим модель, предложенную в [9]. Основное её отличие от всех предыдущих заключается в абстрагировании от конкретных показателей, отвечающих за влияние среды. Предлагается каждой выборке поставить в соответствие число  $\mu \in (0,1]$ , интерпретирующее неоднородность, то есть, чем ближе данное число к единице, тем исследуемая выборка неоднороднее. Данный параметр может быть найден с помощью простого алгоритма, предложенного в [9], однако возможно использование экспертной оценки.

##### 1.3.2.4.1 Простейшие случаи

Рассмотрим работу алгоритма в простейшем случае, когда отрасль характеризуется единственным ресурсным и единственным результативным параметром. В данном случае  $i$ -я фирма может быть представлена как точка  $(x_i, q_i) \in \mathbb{R}^2$ . Геометрическая интерпретация алгоритма представлена на рисунке 1.22.

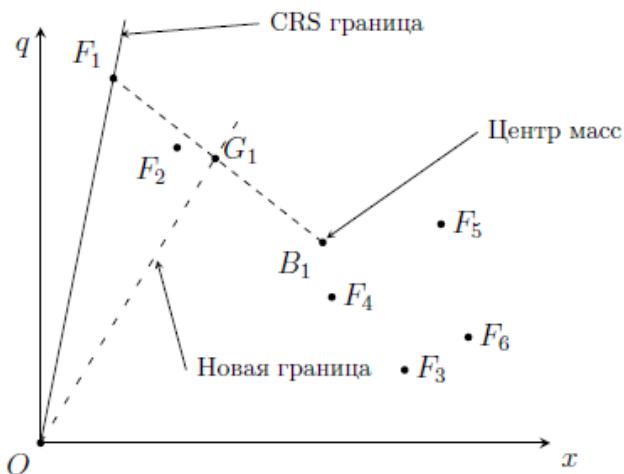


Рисунок 1.22 – Графическая интерпретация алгоритма в случае  $N=M=1$

На рисунке 1.22 проиллюстрирована оценка фирм  $F_1, \dots, F_6$ . Согласно модели ОАД с постоянной отдачей от масштаба,  $F_1$  – единственная эффективная фирма. На первом этапе алгоритма в обычной геометрическом смысле рассчитывается центр масс всей выборки. На рисунке 1.22 центр масс представлен точкой  $B_1 = (\bar{x}, \bar{q})$ , где верхняя черта обозначает среднее значение. Новая граница эффективности строится с помощью введенного коэффициента неоднородности  $\mu$ . Для этого вычисляются координаты фирмы, генерирующей новую границу  $G_1 = \mu B_1 + (1 - \mu)F_1$ .

После того, как новая граница сконструирована, относительно нее оцениваются фирмы, которые показали меньшую эффективность, чем генерирующая фирма  $G_1$ . На рисунке 1.22 роль таких фирм играют  $F_3, \dots, F_6$ . В данном случае фирму  $F_2$  невозможно оценить относительно  $G_1$ , так как компания  $F_2$  более эффективна. Для того чтобы произвести оценку  $F_2$ , уже оцененные с помощью новой границы фирмы  $F_3, \dots, F_6$  удаляются из рассмотрения. Строится новый центр масс  $B_2$  и формируется генерирующая условная фирма  $G_2$ , происходит оценка фирмы  $F_2$ .

Алгоритм останавливается тогда, когда оценены все неэффективные в смысле стандартного ОАД фирмы. В случае, проиллюстрированном на рисунке 1.22, потребуется провести всего два шага. По построению сходимость алгоритма гарантирована, кроме того, эффективными окажутся лишь те фирмы, которые были эффективными в смысле стандартной ОАД модели.

Кроме того, существует несложная связь между оценками эффективности, полученными с помощью модели последовательного исключения и стандартного ме-

тода ОАД. Предположим, что некоторое множество фирм на данном шаге алгоритма оценивается при помощи вспомогательной фирмы  $G_i$ , где  $i$  – номер шага алгоритма. Пусть компания F принадлежит данному множеству фирм, тогда

$$E_F^{CRS} = E_{G_i}^{CRS} \cdot E_F^{New}, \quad (1.34)$$

где нижний индекс отвечает за фирму, а верхний – за метод оценки эффективности. Формула (1.34) немедленно следует из геометрической интерпретации модели ОАД, приведенной на рисунке 1.20.

В соответствие с (1.34) построенный алгоритм оценивает неэффективные фирмы менее строго, чем стандартный ОАД (это ясно из рисунка 1.22). Более того, чем фирма эффективнее в смысле стандартного ОАД, тем строже ее оценивает алгоритм последовательного исключения. Это следует из того, что  $E_{G_i}^{CRS}$  увеличивается с увеличением числа проделанных шагов  $i$ , так как чем ближе алгоритм к завершению, тем больше неэффективных фирм было удалено из рассмотрения.

Необходимо обсудить, как работает алгоритм в случае с двумя входными параметрами и одним показателем ресурса (см. рисунок 1.23)

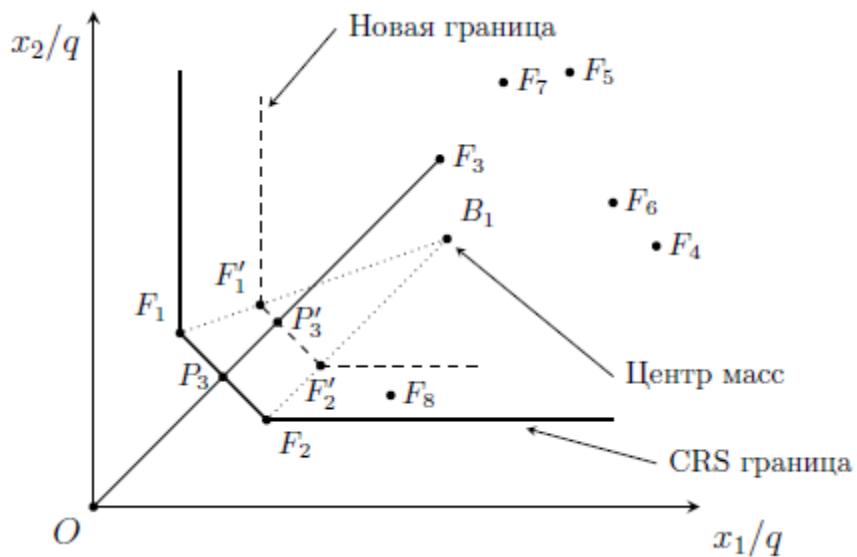


Рисунок 1.23 – Графическая интерпретация алгоритма в случае  $N=2, M=1$

Здесь  $F_1, F_2$  – эффективные в смысле стандартного ОАД фирмы. Алгоритм работает похожим образом, но теперь сдвигать к центру масс необходимо не одну фирму как на рисунке 1.22, а две

$$\begin{cases} F_1' = \mu B_1 + (1 - \mu)F_1, \\ F_2' = \mu B_1 + (1 - \mu)F_2. \end{cases}$$

Эффективность фирмы  $F_3$  в новой модели рассчитывается как отношение  $\frac{|OP'_3|}{|OF_3|}$ .

Все фирмы последовательно оцениваются относительно новых границ эффективности, полученных с помощью центра масс. Алгоритм также сходится для любой выборки и сохраняет множество эффективных фирм.

#### 1.3.2.4.2 Произвольное количество переменных

В данном случае  $i$ -я фирма характеризуется с помощью вектора входных переменных модели  $x_i = (x_{1i}, \dots, x_{Ni})$  и вектора результатов  $q_i = (q_{1i}, \dots, q_{Mi})$ . Как и в предыдущем разделе, мы определяем ресурсную и результативную части центра масс анализируемой выборки

$$b_x = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$$

и

$$b_q = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_N),$$

где, как обычно, черта обозначает среднее значение параметра.

Пусть оцениваемая выборка определена как множество индексов  $I = \{1, \dots, L\}$ . Обозначим группу 100% эффективных в смысле стандартной ОАД модели фирм как  $I_e = \{i_1, \dots, i_S\} \subset I$ . Напомним, что  $N$  – число входных параметров,  $M$  – число выходных. Пусть  $X_e$  обозначает матрицу входных параметров всех эффективных фирм из множества  $I_e$  (ее размер –  $N \times S$ ), и  $Q_e$  – аналогичная матрица размера  $M \times S$ , содержащая параметры результата всех фирм из  $I_e$ . Также вводится матрица

$$B_x^i = \|b_x^T, \dots, b_x^T, x_i^T\|,$$

где  $b_x^T$  представляет собой транспонированную ресурсную часть центра масс, она повторяется  $S$  раз,  $x_i$  – вектор ресурсов какой-нибудь неэффективной компании, т.е.  $i \in I \setminus I_e$ . Схожим образом определяется матрица размера  $M \times (S + 1)$

$$B_q^i = \|b_q^T, \dots, b_q^T, q_i^T\|,$$

где  $b_q^T$  представляет собой транспонированную результативную часть центра масс, а  $q_i$  – выходной вектор  $i$ -й неэффективной фирмы, т.е.  $i \in I \setminus I_e$ . Пусть  $X_e^i$  и  $Q_e^i$  будут матрицы  $X_e$  и  $Q_e$  с одной добавленной к ним справа колонкой –  $x_i^T$  и  $q_i^T$ , соответственно. Поскольку главная идея данного метода заключается в том, чтобы сдвинуть границу эффективности в сторону центра масс, сформируем две матрицы

$$X_i = \mu B_x^i + (1 - \mu) X_e^i \text{ и } Q_i = \mu B_q^i + (1 - \mu) Q_e^i \quad (1.35)$$

где умножение скалярной величины на матрицу определяется как умножение каждого элемента матрицы на данный скаляр.

Необходимо сделать два важных замечания. Во-первых, матрицы (1.35) определены только для неэффективных фирм, т.е.  $i \in I \setminus I_e$ . Во-вторых, заметим, что последней колонкой матриц  $X_i$  и  $Q_i$  является  $x_i^T$  и  $q_i^T$ , соответственно.

Используя определения, данные выше, можно сформулировать алгоритм последовательного исключения альтернатив в общем случае. Первый шаг заключается в решении следующей задачи линейного программирования для всех неэффективных фирм  $i \in I \setminus I_e$ .

$$\min_{\lambda, \theta_i} \theta_i^* \quad (1.36)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -q_i + Q\lambda \geq 0; \\ \theta_i^* x_i - X\lambda \geq 0; \\ \lambda \geq 0, \end{cases} \quad (1.37)$$

где  $X_i$  и  $Q_i$  определены в (1.35),  $\lambda$  –  $(S + 1) \times 1$  вектор неизвестных констант,  $x_i$  и  $q_i$  – вектора входных и выходных параметров для  $i$ -й неэффективной фирмы. Наконец,  $\theta_i^*$  представляет собой оценку эффективности  $i$ -й фирмы с поправкой на неоднородность оцениваемой выборки.

Однако при вычислении значения  $\theta_i^*$  может быть два различных исхода. А именно, оно может быть строго меньше единицы и может быть равно единице. Если  $i$ -я неэффективная в смысле стандартной ОАД фирма получает в результате (1.36) значение  $\theta_i^*$ , мы исключаем такую фирму из рассмотрения. Таким образом, алгоритм можно сформулировать следующим образом:

- вычисляется центр масс всей выборки;
- для всех  $i \in I \setminus I_e$  вычисляются матрицы  $X_i$  и  $Q_i$ , определенные в (1.35);
- для всех неэффективных компаний вычисляются новые оценки эффективности согласно (1.36)–(1.37). Все фирмы, получающие  $\theta_i^* < 1$ , исключаются из рассмотрения;
- наконец, если какие-то из фирм получают оценку эффективности  $\theta_i^* = 1$ , тогда для таких фирм процедура повторяется, начиная с шага 1.

На данный момент остался неучтенный лишь один случай. Теоретически возможна ситуация, когда матрицы (1.35) организованы таким образом: при запуске модели (1.36)–(1.37), все неэффективные компании получают  $\theta_i^* = 1$ . Это означает, что изначальная граница эффективности, определенная с помощью стандартной модели DEA отодвинута слишком далеко. В таком случае необходимо уменьшить значение показателя неоднородности  $\mu$  и начать процедуру сначала. В качестве алгоритмического решения новое значение индекса неоднородности может вычисляться, например, как  $\mu^2$ .

Приведем два важных свойства построенной модели. Во-первых, сходимость алгоритма обеспечена по построению для любой выборки. Во-вторых, множество  $I_e$  эффективных фирм по отношению к стандартному ОАД не меняется. Наконец, хотя в многомерном случае и не удается сохранить свойство (1.34), однако его прямой аналог сохраняется. Поскольку, на каждом этапе мы используем модель ОАД, то можно вычислить координаты проекции каждой неэффективной фирмы из множества  $i \in I \setminus I_e$  на соответствующую границу эффективности, определенную с помощью (1.36)–(1.37). Тогда верно, что

$$E_F^{CRS} = E_P^{CRS} \cdot E_F^{New},$$

где  $E_F^{CRS}$  – эффективность фирмы  $F$  в стандартной модели ОАД,  $E_P^{CRS}$  – эффективность проекции  $P$  фирмы  $F$  на границу, определенную с помощью (1.36)–(1.37). Наконец,  $E_F^{New}$  – оценка эффективности фирмы  $F$  согласно построенному алгоритму.

В качестве иллюстрации модели, в [9] приводится расчет эффективности пилотной выборки, состоящей из 29 российских университетов.

### 1.3.2.5 Некоторые выводы

В данном пункте отчета рассмотрена модель оболочечного анализа данных и ее модификации для случая, когда оцениваемая выборка неоднородна. Представлен обзор основных подходов к определению неоднородности. В частности, рассмотрены четыре метода, основанных на знании параметров среды, которые оказывают существенное влияние на эффективность. Такие методы не могут широко применяться для оценки эффективности неоднородного множества альтернатив, поскольку не всегда удается выделить круг причин, вызывающих неоднородность.

Исследуется новый подход в оболочечном анализе данных в случае неоднородной выборки, предложенный в [9]. В отличие от предыдущих моделей, он базируется на предположении, что неоднородность возникает из-за разницы в приоритетах оцениваемых компаний. Как показывает многочисленная практика, с этим аспектом неоднородности модель справляется успешно. Однако разница в целях далеко не единственная причина неоднородности выборки.

Наконец рассмотрен наиболее общий подход к экзогенному определению неоднородности, представленный в [71]. Предложенный алгоритм основан на последовательном исключении неэффективных альтернатив и таким образом, позволяет исключить влияние неоднородности на оценку эффективности в наиболее общем виде.

Результаты исследований этого пункта отражены в работах [1, 9, 32, 45]:

1. Алескеров Ф., Петрущенко В. DEA by sequential exclusion of alternatives// HSE Working Paper WP7, 2013, 02.
2. Абанкина И., Алескеров Ф., Белоусова В., Зиньковский К., Петрущенко В. Оценка результативности университетов с помощью Оболочечного Анализа Данных// Вопросы образования, 2, 2013, с.15–47.
3. Abankina I.V., Aleskerov F.T., Belousova V.Y., Bonch-Osmolovskaya A.A., Petruschenko V.V., Ogorodniyuchuk D., Yakuba V.I., Zin'kovsky K.V. University effi-

ciency evaluation with using its reputational component// Lecture Notes in Management Science, 4, 2012, pp.244–253.

4. Петрущенко В. Учет неоднородности в моделях оболочечного анализа данных// Проблемы управления, 5, 2013, с.2–11.

#### 1.4 Исследование поведенческой модели биржи

В 2013 году были продолжены ранее начатые исследования по поведенческой модели биржи. В этом подразделе отражены новые результаты, полученные в ходе этих исследований.

В последние десятилетия агентно-ориентированные модели широко используются в экономике и финансах. В частности, такие модели используются для анализа биржевых процессов, например, для исследования динамики цен активов и причин возникновения спекулятивных пузырей на рынках ценных бумаг [81, 83, 91, 92, 113, 127], для сравнения эффективности фундаментального и технического анализа [81, 82, 92, 120, 129] или для оценки влияния «эффекта толпы» (herding effect) на цены [113, 138, 147, 155, 170].

Мы исследуем процессы, происходящие на бирже, с точки зрения индивидуального трейдера, чтобы понять, какие трейдеры зарабатывают на фондовом рынке, и какой стратегии они при этом придерживаются. Самая известная классификация стратегий – по типу используемой информации для принятия решений [74, 101, 164]. В ней различают трейдеров, использующих фундаментальный анализ, и трейдеров, использующих технический анализ (их еще называют чартистами) – первые используют информацию из отчетов о финансовом положении компании-эмитента, вторые строят прогнозы на основе исторических данных о движении цен. Мы не будем различать трейдеров-фундаменталистов и трейдеров-чартистов, объединив их в один тип и рассматривая агентов с одной персональной характеристикой – вероятностью угадать направление движения цен, так как финансовый результат трейдера и вероятность его банкротства зависят от этой характеристики и для фундаменталистов, и для чартистов. В [52] было показано, что успешное распознавание движения

цен в периоды стабильной экономической жизни с вероятностью чуть выше  $\frac{1}{2}$  позволяет трейдерам получать в среднем положительный выигрыш при долгосрочной игре.

Также мы рассматриваем стратегию «последователь», такая стратегия является простейшим случаем имитирующего поведения. Как было показано в [170], у трейдеров есть причины для имитации чужих решений и это может быть выгодно для них. Действительно, принятие решений на основе имеющейся экономической информации затратно, требует опыта и времени, поэтому некоторые трейдеры ориентируются на рекомендации информационных и аналитических агентств или учитывают мнение коллег или других трейдеров. По оценке [76], объем «информированных» заявок меньше 10%.

Кроме того, трейдер может имитировать либо рынок, либо какого-либо другого трейдера. Первый случай относится к ситуации, когда трейдер «подпадает» под настроение рынка – если все покупают («бычий» рынок), то и такой трейдер станет покупать, если цена падает и большинство продает (рынок «медвежий»), то трейдер также станет продавать. Во втором случае можно предположить, что на рынке есть трейдеры (так называемые «гуру»), которых другие считают более опытными, или удачливыми, или имеющими доступ к закрытой для других информации (инсайдерами). Инвестиционные решения таких игроков представляют большой интерес для других участников, а для кого-то вообще могут стать единственным ориентиром при принятии решений.

Стратегии «последователя» могут придерживаться не только трейдеры-новички или трейдеры, в силу каких-либо причин не имеющие возможности или желания обрабатывать информацию для принятия самостоятельного решения, но и периодически профессиональные игроки, поддавшиеся эйфории бычьего или медвежьего тренда, хотя склонность к следованию толпе ниже у профессиональных инвесторов, чем у любителей [173].

Оборотной стороной стратегии «последователя» является «эффект толпы», который может вызвать хаос и спекулятивные пузыри на рынке [87, 89, 113]. На данный момент мы оставим в стороне вопрос о том, насколько «эффект толпы» влияет

на динамику цен и проанализируем, насколько выгодно мелкому инвестору использовать стратегию «последователя».

Кроме того, есть и более экзотические стратегии, например, есть трейдеры, построившие свои стратегии на ожидании кризиса и возможности заработать там, где все остальные терпят колоссальные убытки. Н.Н. Талеб, автор [169], является основателем хедж-фонда «Эмпирика», который скупает не акции и ценные бумаги, а опционы и фьючерсы на них, причем опционы с высоким страйком (цена, по которой будет реализован опцион) для опционов call и низким – для опционов put, так как чем ниже вероятность наступления какого-либо ценового события, тем дешевле сделать ставку на него. Таким образом, Эмпирика ждет возможности заработать огромные деньги в один день с приходом кризиса (по терминологии Талеба – Черного лебедя), теряя каждый день понемногу на премиях, выплаченных за купленные опционы. Такая стратегия эффективна в периоды экономических потрясений и кризисов [136], но является ли она выгодной в долгосрочном периоде?

#### 1.4.1 Описание модели

##### 1.4.1.1 Описание рынка и агентов

В нашей модели используется рынок одного актива и группа из  $N$  агентов, принимающих участие в торгах. В базовой модели агенты различаются по единственной персональной характеристике – вероятности  $p$  верно предсказать направление движения цены на следующий день. Предполагается, что эта характеристика не меняется в течение жизни агента и при этом нам неважно, на основе какого подхода – фундаментального или технического – агент принимает решения. В начале своего существования все агенты обладают начальным состоянием и не обладают цennыми бумагами.

Существует две принципиально различных подхода к моделированию агентов на бирже: агенты могут быть слишком мелкими, чтобы влиять на рынок (в зарубежной литературе таких трейдеров называют price-takers), и агенты могут быть достаточно крупными и влиятельными, для того чтобы цена на актив изменилась в зави-

симости от их торговых решений (соответственно price-makers). В первом случае цена должна быть задана экзогенно, поскольку она не зависит от действий price-takers, во втором случае цена определяется с учетом совокупного спроса и предложения и формируется эндогенно на основе выставленных агентами заявок.

В данной работе мы выбираем первую модель. Можно считать, что мы исследуем часть рынка, состоящую из мелких и средних агентов, не имеющих влияния на цену актива. Также мы предполагаем, что рынок в достаточной степени ликвиден и все выставленные заявки могут быть удовлетворены в полном объеме.

Все агенты в этой модели являются спекулянтами и заинтересованы не в самом активе как долгосрочном вложении, а в возможности заработать на разнице в цене актива. Поэтому все заявки рассчитаны на краткосрочную перспективу и агенты торгуют на дневных колебаниях цен. Кроме того, агенты в нашей модели выставляют только рыночные заявки (market order). В такой заявке указывается объем и не указывается цена, поэтому она немедленно совершается по текущей рыночной цене. Более сложные заявки агенты не выставляют.

Для оценки успешности деятельности агентов мы рассчитываем в конце дня после проведения торгов показатель общего благосостояния агента, суммируя количество имеющихся у него денег с количеством имеющихся акций, умноженных на рыночную цену следующего дня. Использование следующей рыночной цены связано с тем, что агент сможет продать имеющиеся у него акции лишь на следующий день. В случае снижения благосостояния агента до критического уровня (половины начального состояния) агент объявляется банкротом и прекращает участие в торговле.

Кроме того, мы будем исследовать влияние использования маржинальных сделок (в том числе при совершении продаж без покрытия) на благосостояние и возможность банкротства трейдеров. Маржинальными сделками называются торговые сделки, которые трейдер совершает на суммы, превышающие его реальный капитал в несколько раз, пользуясь маржинальным кредитом под залог оговоренной суммы (маржи). Маржинальный кредит отличается от обычного тем, что выдаваемая сумма в несколько раз больше размера требуемого залога. Соотношение между суммой за-

лага и получаемой суммой называется кредитным плечом (leverage). Например, кредитное плечо 1:5 означает, что для получения кредита нужно предоставить в залог 20% от запрашиваемой суммы. Это позволяет трейдеру использовать для торговли средства, значительно превышающие размер собственного капитала. На различных биржах и по различным финансовым инструментам маржа может составлять от 0,5% до 50% и зависит, как правило, от ликвидности торгуемого финансового инструмента.

Продажей без покрытия (короткой позицией) называется продажа ценных бумаг, взятых взаймы, в расчёте на падение их стоимости, с последующим выкупом таких же ценных бумаг и возвратом их кредитору. Трейдер открывает короткую позицию в надежде на снижение стоимости ценной бумаги, что позволит купить ее позднее за меньшие деньги и вернуть кредитору, при этом разница в цене покупки и продажи и составит прибыль трейдера. В нашей модели короткие продажи запрещены в кризис, что связано с появлением у заемщиков опасений невозврата кредитов.

#### 1.4.1.2 Описание используемых данных

Поскольку в первой группе экспериментов агенты являются мелкими участниками рынка, не имеющими влияния на цену актива (price-takers), то цену актива необходимо задавать экзогенно – для этого мы использовали дневные данные мировых фондовых индексов за период 01.01.2000–31.12.2009. Временной ряд состоит из цен закрытия. Мы использовали американский индекс S&P500 (Рисунок 1.24, всего 2514 наблюдений), французский CAC 40 (2552 наблюдений), немецкий DAX (2542 наблюдений), британский FTSE 100 (2525 наблюдений), японский Nikkei 225 (2453 наблюдений), гонконгский Hang Seng (2488 наблюдений).

Использование коротких позиций возможно лишь при нахождении рынка в стабильной фазе. Сильные колебания цен могут быть сигналом проблем в экономике, что на фоне негативной информации может спровоцировать панические продажи ценных бумаг и резкое падение их стоимости. Чтобы не допустить этого, надзорные органы могут ввести временный запрет на открытие коротких позиций по опреде-

ленным ценным бумагам или даже на всем рынке в случае глобальных финансовых потрясений. Примером первого случая может служить временный запрет на открытие коротких позиций по бумагам американских ипотечных агентств «Freddie Mac» и «Fannie Mae», организованный финансовыми властями США при резком падении акций этих компаний, а в качестве примера второго случая можно привести период с 18 сентября по 26 сентября 2009г. в России, когда Федеральная служба по финансовым рынкам (ФСФР) запретила профессиональным участникам рынка ценных бумаг проводить короткие продажи, необеспеченные и маржинальные сделки. Кроме того, даже без введения официального запрета трейдеры могут испытывать трудности с открытием коротких позиций вследствие появления у заемщиков опасений невозврата кредитов.

Для выделения дней, потенциально подходящих для ограничительных мер по продажам без покрытия, мы использовали волатильность индекса, рассчитанную со скользящим интервалом в 20 значений, и применяли пороговое правило. Оно заключается в следующем: если значение волатильности не превышает соответствующего значения индекса, умноженного на заранее заданное значение порога, то будем считать этот день регулярным (экономика стабильна), а в случае превышения будем считать, что рынок испытывает некоторые потрясения (кризис) и будет введен запрет на открытие коротких позиций. Окно в 20 значений приблизительно соответствует одному календарному месяцу и позволяет использовать эффект «долгой памяти» – в течение месяца после прекращения резких колебаний цен трейдеры не смогут использовать продажи без покрытия и будут вынужденно осторожны. Эксперименты проводились для значения порога в 4%.

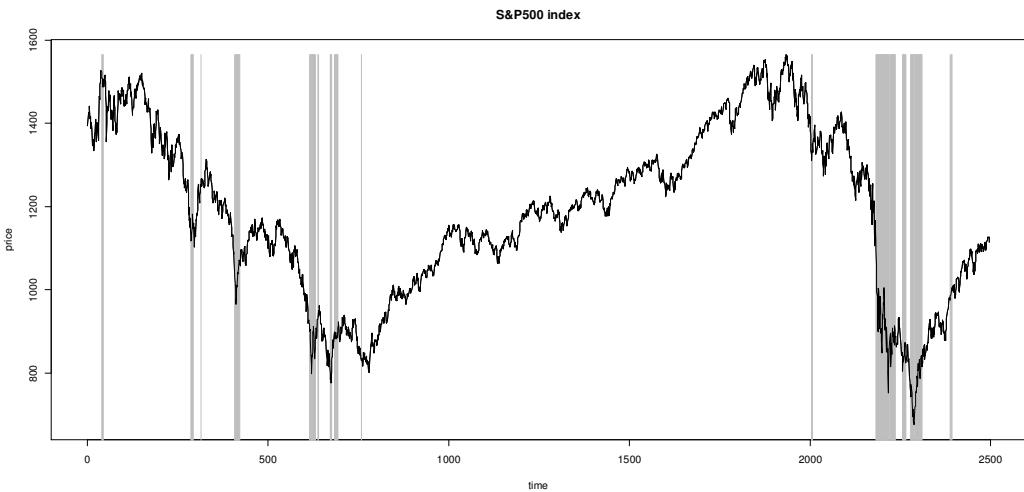


Рисунок 1.24 – Временной ряд значений индекса S&P500 за период 31.01.2000–31.12.2009 (2496 наблюдений). Серым цветом выделены периоды кризиса, рассчитанные с порогом отсечения 4%. Количество кризисных дней составляет 164 дня (6,6% от общего количества дней).

#### 1.4.1.3 Описание экспериментов

##### 1.4.1.3.1 Базовая модель

На рынке одного актива действуют агенты-спекулянты, работающие в краткосрочном периоде. Всего в эксперименте участвует  $N$  агентов. В начальный момент времени в каждой модели все агенты обладают  $c_0 = 10\ 000$  условных единиц и  $s_0 = 0$  акций, и их начальное благосостояние составляет  $w_0 = cash_0 + s_0 \cdot price_1 = 10\ 000$  у.е.

Агенты в нашем эксперименте принимают решения на краткосрочном периоде, поэтому в каждый момент времени  $t$  их заботит только направление движения цены в следующий момент времени  $price_{t+1}$ . Агенты различаются только по единственной характеристике – вероятности  $p$ , которая моделирует способность агента угадать, куда будет двигаться цена актива  $price_{t+1}$  в следующий момент времени. Величина  $p$  является случайной, она распределена по равномерному закону на интервале  $[p_{min}, p_{max}]$ , выбирается в начальный момент существования агента и неизменна в течение жизни агента на рынке.

Маржинальные сделки запрещены в периоды кризиса, в другое время они разрешены, и агент может совершать покупки акций и короткие продажи на сумму, в несколько раз превышающую свой собственный капитал.

На каждой  $t$ -ой итерации  $i$ -й агент принимает решение о продаже ( $d_{i,t} = -1$ ) или покупке ( $d_{i,t} = +1$ ) актива. Если в момент времени  $t$  агент прогнозирует рост цены актива, т.е.  $price_{t+1} \geq price_t$ , то агенту выгодно купить акции по цене  $price_t$ , так как его благосостояние в следующий момент времени увеличится. Если агент ожидает снижения цены, то ему выгодно сейчас продать по текущей цене  $price_t$ , чтобы не допустить снижения благосостояния в следующий момент времени.

В заявку помимо решения агента  $d_{i,t}$  входит объем совершающей сделки, которая, как правило, также задается при помощи случайных величин.

Если решение  $d_{i,t} = +1$  (купить), то объем заявки (количество акций, требуемых агенту) при запрете использования заемных средств выставляется по формуле  $vol_{i,t} = z \cdot \frac{c_{i,t}}{price_t}$ , где  $z$  – случайная величина, распределенная по закону  $R[0, 1]$ . Если маржинальные сделки разрешены, то агент выставляет заявку на покупку в объеме  $vol_{i,t} = z \cdot \frac{w_{i,t} \cdot leverage}{price_t}$ , где *leverage* обозначает соотношение залога и заемного капитала

Если короткие продажи запрещены, то в случае  $d_{i,t} = -1$  (продать) и при наличии у агента в собственности некоторого количества акций он выставит на продажу часть своих акций в объеме  $vol_{i,t} = z \cdot s_{i,t}$ , где  $z$  – случайная величина, распределенная по закону  $R[0, 1]$ . Если короткие продажи не запрещены, то агент может использовать заемные средства и выставить на продажу акций больше, чем имеет. Недостающие акции агент вернет заемщику, выкупив их на следующий день по рыночной цене следующего дня. Объем заявки в этом случае равен  $vol_{i,t} = z \cdot \frac{w_{i,t} \cdot leverage}{price_t}$ .

После совершения всех сделок с учетом выставленных заявок пересчитывается число имеющихся у агента акций и собственных средств:  $c_{i,t+1}$  и  $s_{i,t+1}$  – с этими средствами агент приступит к торговам на следующий день. После совершения всех сделок за день  $t$  подсчитывается благосостояние агентов по формуле  $w_{i,t+1} =$

$c_{i,t+1} + s_{i,t+1} \cdot price_{t+1}$ . С учетом того, что на текущий день торги завершены, и продать свои акции агент может лишь на следующий день, число акций умножается на рыночную цену завтрашнего дня.

Если агент  $i$  становится банкротом в момент времени  $t$ , что происходит при условии  $w_{i,t} \leq \frac{1}{2}w_0 = 5000$ , то он уходит с рынка.

Цель экспериментов: определить, как влияет характеристика  $p$  на благосостояние агентов и возможность их банкротства, а также определить, какое влияние оказывает возможность использования продаж без покрытия.

#### 1.4.1.3.2 Модель «Лидеры и последователи»

Агенты делятся на две группы – первая из них ведет себя так же, как и в базовой модели, т.е. пытается предсказать движение цен с вероятностью  $p$ , а вторая группа копирует действия агентов из первой группы с опозданием на один шаг и агент-последователь  $j$ , наблюдая предыдущее действие своего лидера  $s_{i,t-1}$ , повторяет его на следующем шаге  $s_{j,t} = s_{i,t-1}$ .

Цель экспериментов: оценить преимущества и недостатки имитирующей стратегии агентов и определить, действия каких агентов – более удачливых или менее удачливых – выгоднее имитировать.

#### 1.4.1.3.3 Модель с наличием черных лебедей

В этой модели агенты делятся на две группы, условно называемые «обычные трейдеры» и «искатели черного лебедя» – первые из них хорошо предсказывают движение цен в период спокойной экономической жизни, но не могут сориентироваться в кризис, а вторые, наоборот, не очень хорошо предсказывают движение в регулярные периоды, зато практически не ошибаются в кризисное время (стратегия Талеба).

Разделение торговых дней на регулярные дни  $Q$  и кризисные дни  $R$  теперь имеет значение не только для запрета коротких позиций, но и участвует в описании характеристик агентов. Методы определения таких дней описаны в подпункте 1.4.0.

Разница в характеристиках выглядит следующим образом. «Обычные трейдеры» в дни, соответствующие регулярным дням (т.е. экономика стабильна, такие дни для краткости назовем  $Q$ -днями), угадывают направление движения цен и принимают верные решения с вероятностью  $p^Q$ , которая назначается агенту с помощью равномерно распределенной на интервале  $[p_{min1}, p_{max1}]$  случайной величины, причем  $p_{min1} \geq 0.5$ . В кризисные дни (назовем их  $R$ -дни) эта вероятность падает:  $p^R = p^Q - \delta$ . «Искатели черного лебедя», наоборот, принимают верные решения в регулярные дни с меньшей вероятностью, чем в кризисные:  $p^Q \sim R[p_{min2}, p_{max2}]$ ,  $p_{max2} \leq 0.5$  и  $p^R = p^Q + \delta$ . Таким образом, агенты из группы «обычных трейдеров» показывают лучшие результаты в условиях стабильной экономической ситуации и мало результивны в кризис, а агенты, использующие стратегию Талеба, больше нацелены на кризис и в условиях стабильного рынка чаще терпят убытки.

Цель экспериментов: определить, какая стратегия наиболее выгодна, и есть ли преимущества в размере благосостояния или вероятности банкротства у той или иной стратегии.

## 1.4.2 Результаты моделирования

### 1.4.2.1 Результаты базовой модели

Для всех моделей мы рассматриваем три характеристики: 1) среднее благосостояние на финальную дату среди тех агентов, кто не обанкротился за время эксперимента, 2) доля агентов из всей выборки, чье благосостояние на финальную дату превышало начальное благосостояние, 3) доля банкротов среди всех агентов (мы называем банкротами тех агентов, чье благосостояние опустилось ниже порога в 5 000). Далее мы подробно опишем результаты экспериментов по данным S&P500, сводные результаты по всем индексам приведены в конце параграфа.

На рисунках 1.25–1.26 приведены результаты одного из экспериментов с запретом маржинальных сделок (т.е. параметр *leverage* был равен 0). Для удобства на рисунке 1.25 приведены только 10 траекторий благосостояния из 1000. Параметр  $p$  задавался с помощью равномерного распределения  $R[0.4; 0.6]$ .

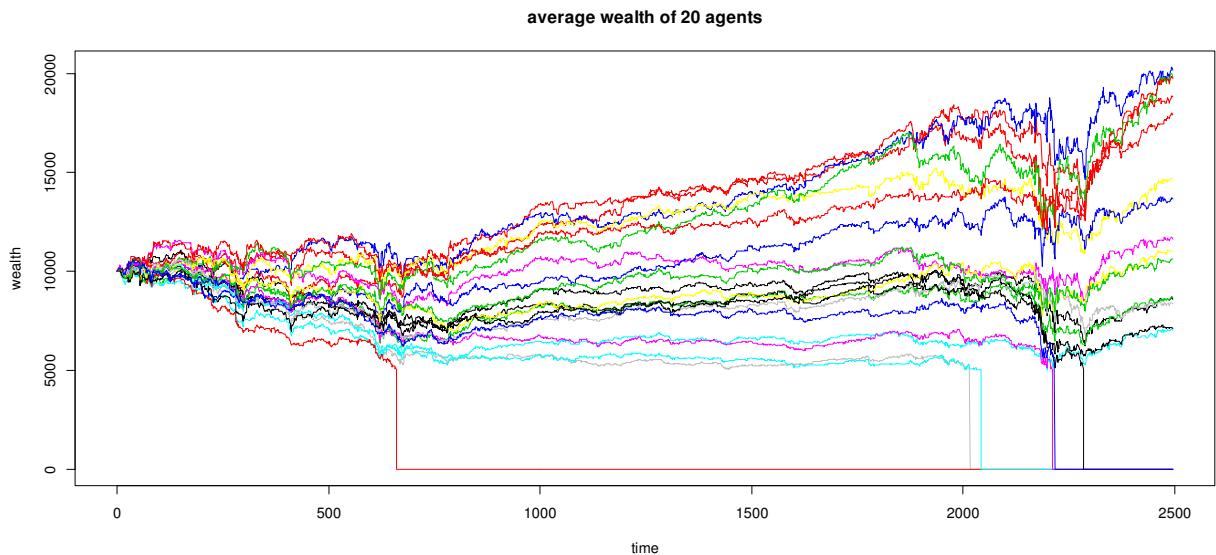


Рисунок 1.25 – Благосостояние 10 агентов из эксперимента с  $p \sim R[0.4; 0.6]$ .  
Вертикальные линии обозначают моменты, когда благосостояние агента опускается ниже порога в 5 000 и агент покидает рынок.

Среднее благосостояние необанкротившихся агентов в этом эксперименте немного ниже начального благосостояния и составляет 9 934, самый высокий уровень благосостояния, достигнутый в этом эксперименте равен 47 610. Доля агентов, имевших в конце эксперимента благосостояние, превышающее начальное, равно 46,7%, гистограмма благосостояния агентов приведена на рисунке 1.26, слева. За время эксперимента обанкротились 332 агента из 1000. Гистограмма распределения параметра  $p$  среди агентов-банкротов приведена на рисунке 1.26, справа. Результаты показывают, что агенты с более низким значением  $p$  имеют меньшее благосостояние на финальную дату и более высокую вероятность банкротства в сравнении с агентами с большим значением  $p$ .

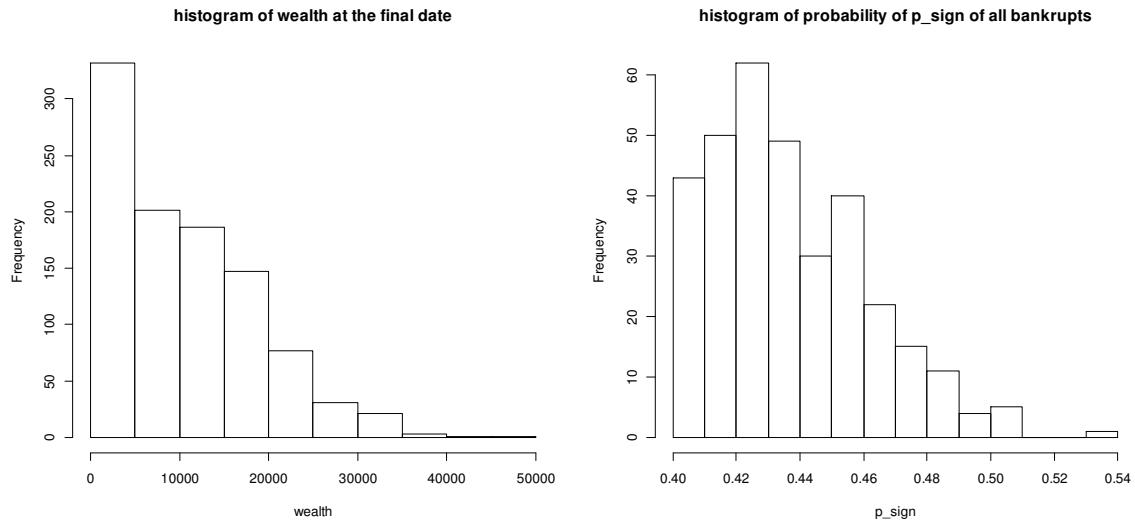


Рисунок 1.26 – Гистограмма распределения благосостояния агентов на конец эксперимента (слева) и гистограмма распределения параметра  $p$  среди обанкротившихся агентов (справа) для случая  $p \sim R[0.4; 0.6]$ .

Далее мы исследовали, как указанные три характеристики (среднее благосостояние необанкротившихся агентов, доля агентов, увеличивших свое благосостояние по сравнению с начальным и доля агентов-банкротов в общей популяции) зависят от значения  $p$ . Мы проводили эксперименты с параметром  $p$ , не выбранным с помощью равномерно распределенной величины на некотором ле  $R[p_{min}, p_{max}]$ , а заданным конкретным числом для всех агентов на один эксперимент, и повторяли эксперименты с этим конкретным числом  $p$  100–150 раз.

Рисунок 1.27 и Таблица 1.3 показывают результаты случая с полным запретом маржинальной торговли ( $leverage = 0$ ) для  $p$  от 0.47 до 0.57. Видно, что для агентов с  $p \geq 0.52$  вероятность банкротства меньше 1%, кроме того, во всех наших экспериментах агенты с  $p \geq 0.56$  никогда не терпели банкротства.

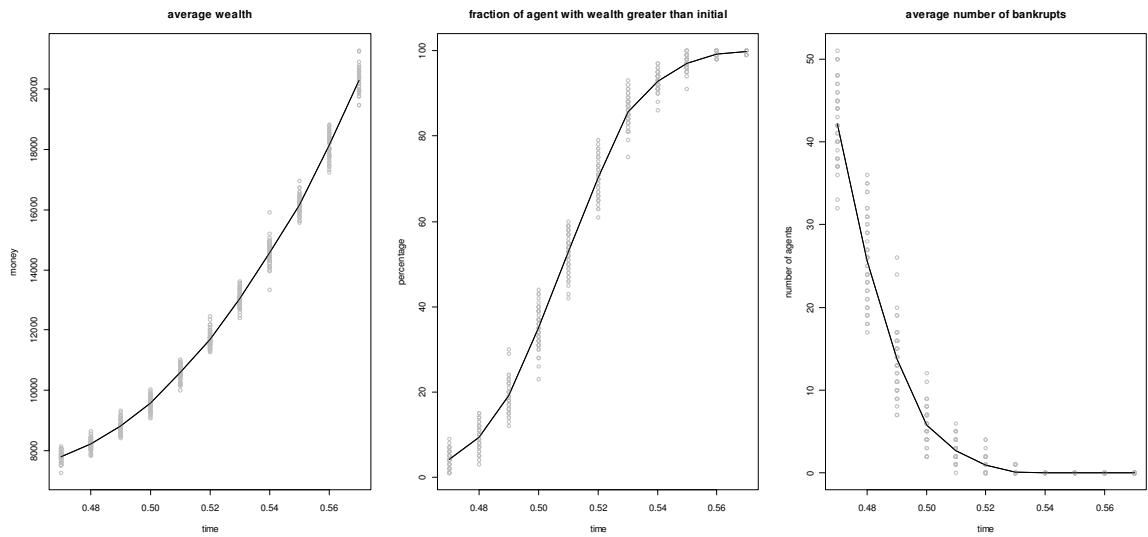


Рисунок 1.27 – Среднее благосостояние необанкротившихся агентов (слева), доля агентов с финальным благосостоянием, превышающим начальное (в центре) и доля банкротов (справа) в зависимости от  $p = 0.47, \dots, 0.57$  для случая с запретом маржинальной торговли (leverage=0)

Из Таблицы 1.3 видно, что с увеличением  $p$  растет благосостояние необанкротившихся агентов и доля агентов, увеличивших свое благосостояние по сравнению с начальным, а доля банкротов снижается.

Таблица 1.3 – Результаты экспериментов с запретом маржинальной торговли (leverage=0)

$p$	№ эксперимента (leverage=0)							Среднее значение
	№1	№2	№3	№4	№5	№6	...	
Среднее благосостояние необанкротившихся агентов на финальную дату								
1 0,51	10 396	10 511	11 076	10 796	10 542	10 657	...	10 594
2 0,52	12 213	11 854	11 993	11 720	12 424	11 669	...	11 703
3 0,53	13 117	13 187	13 184	13 035	12 915	12 776	...	13 068
4 0,54	14 735	14 920	14 744	14 390	15 156	14 288	...	14 588
5 0,55	16 292	16 112	16 079	16 569	16 078	15 852	...	16 162
6 0,56	17 763	18 337	18 783	17 755	18 424	18 620	...	18 140
Доля агентов, чье благосостояние на финальную дату превышает начальное, %								
1 0,51	46	54	56	55	52	53	...	52.8
2 0,52	76	71	78	71	78	69	...	70.3
3 0,53	86	83	84	86	85	86	...	85.7
4 0,54	94	96	94	96	94	93	...	92.8
5 0,55	99	97	94	100	99	98	...	97.1
6 0,56	99	100	100	100	98	100	...	99.3
Доля банкротов, %								
1 0,51	1	2	4	3	2	1	...	2.7
2 0,52	0	0	1	0	0	1	...	0.9
3 0,53	0	0	0	0	0	0	...	0.2
4 0,54	0	0	0	0	0	0	...	0.0
5 0,55	0	0	0	0	0	0	...	0.0
6 0,56	0	0	0	0	0	0	...	0.0

Конечно, если агенты могут использовать короткие позиции и покупать ценные бумаги в кредит, то благосостояние агентов и частота банкротств возрастают (Таблица 1.4).

Таблица 1.4 – Результаты экспериментов для разрешенной маржинальной торговли с различным уровнем рычага

		Доля агентов с $wealth_{i,T} \geq wealth_0$ , %			
	$p$	leverage = 0	leverage = 2	leverage = 5	leverage = 10
1	0.50	35.4	29.8	10.3	1.3
2	0.51	52.8	47.7	20.2	3.6
3	0.52	70.3	67.6	38.0	8.7
4	0.53	85.7	85.4	56.2	18.2
5	0.54	92.8	93.1	69.3	29.2
6	0.55	97.1	97.4	78.5	40.0
7	0.56	99.3	98.7	86.3	50.6
8	0.57	99.7	99.3	89.1	59.2
9	0.58	99.9	99.5	92.7	67.6
10	0.59	99.9	99.8	94.9	73.5
11	0.60	100.0	99.9	97.3	78.2
12	0.61	100.0	99.9	98.2	82.1
13	0.62	100.0	100.0	98.5	84.5
14	0.63	100.0	100.0	98.6	86.7
15	0.64	100.0	100.0	99.5	90.4
16	0.65	100.0	100.0	99.5	92.9
		Доля банкротов, %			
1	0.50	6.2	52.2	88.5	98.6
2	0.51	2.7	37.5	77.6	96.2
3	0.52	0.9	20.7	60.6	90.8
4	0.53	0.2	10.2	42.4	81.4
5	0.54	0.0	5.0	30.3	70.5
6	0.55	0.0	2.4	21.4	59.8
7	0.56	0.0	1.0	13.7	49.3
8	0.57	0.0	0.7	10.9	40.8
9	0.58	0.0	0.5	7.3	32.4
10	0.59	0.0	0.0	5.1	26.5
11	0.60	0.0	0.0	2.7	21.8
12	0.61	0.0	0.0	1.8	17.9
13	0.62	0.0	0.0	1.5	15.5
14	0.63	0.0	0.0	1.4	13.3
15	0.64	0.0	0.0	0.5	9.6
16	0.65	0.0	0.0	0.5	7.0

В Таблице А.1 Приложения А приведены результаты для всех шести мировых фондовых индексов. Из этой таблицы видно, что даже в случае запрета маржинальной торговли агентам необходимо иметь значение  $p$  выше 0,5, чтобы с достаточной долей уверенности получить финальное благосостояние, превышающее начальное, и не обанкротиться. А при использовании маржинальной торговли агенту нужны все

более и более высокие значения  $p$  для достижения этих целей. Например, для случая торговли с кредитным плечом 1:10 трейдер должен обладать запредельно высокими значениями  $p$  для уверенности в том, что он не обанкротится и что-то выиграет от торговли на рынке.

В Таблице 1.5 представлены результаты агентов, угадывающих направление движения цены с вероятностью 0,5, т.е. попросту подбрасывающих монетку для принятия решений. Интересно, что без маржинальной торговли такие агенты не могут выиграть на бирже (в среднем финальное благосостояние необанкротившихся агентов меньше начального), но при использовании коротких продаж и покупок в кредит сразу же значительно увеличивает вероятность банкротства. Немногие люди согласились бы заплатить 10 000 за участие в лотерее с вероятностью выиграть 130 000 с вероятностью 1% и получить 0 с вероятностью 99%.

Таблица 1.5 – Параметры для агентов с  $p = 0.5$

		<i>leverage = 0</i>					
		S&P 500	CAC 40	DAX	FTSE	Nikkei 225	Hang Seng
1	Среднее благосостояние необанкротившихся агентов на финальную дату эксперимента	9 584	9 464	11 098	9 667	8 929	12 719
2	Доля агентов, чье финальное благосостояние превышает начальное, %	35.35	28.05	45.35	37.36	18.83	71.12
3	Доля банкротов, %	6.17	19.58	23.17	3.95	24.09	5.16
		<i>leverage = 2</i>					
1	Среднее благосостояние необанкротившихся агентов на финальную дату эксперимента	14 131	19 201	17 348	14 110	15 637	19 606
2	Доля агентов, чье финальное благосостояние превышает начальное, %	29.80	20.44	25.73	29.25	18.87	34.99
3	Доля банкротов, %	52.21	72.06	65.20	54.40	71.95	55.87
		<i>leverage = 5</i>					
1	Среднее благосостояние необанкротившихся агентов на финальную дату эксперимента	43 427	64 072	66 643	44 156	56 847	61 566
2	Доля агентов, чье финальное благосостояние превышает начальное, %	10.31	5.47	7.67	10.35	5.51	9.06
3	Доля банкротов, %	88.54	93.95	91.16	88.12	93.66	89.86

## Продолжение таблицы 1.5

		leverage = 10					
1	Среднее благосостояние необанкротившихся агентов на финальную дату эксперимента	2e+05	3e+05	2e+05	3e+05	5e+05	3e+05
2	Доля агентов, чье финальное благосостояние превышает начальное, %	1.32	0.21	0.67	1.26	0.47	0.89
3	Доля банкротов, %	98.62	99.79	99.27	98.63	99.51	99.09

### 1.4.2.2 Результаты модели с лидерами и последователями

В этом разделе мы обсуждаем результаты стратегии «последователей» сначала для экспериментов по данным S&P500 и по всем индексам в конце раздела. Как видно из Таблицы А.2 Приложения А, эта стратегия для осторожных агентов (когда leverage=0) приводит к неплохим результатам, поскольку в целом вероятность банкротства невелика и финальное благосостояние превышает начальное с ненулевой вероятностью. И опять же, если агенты используют возможности маржинальной торговли, то увеличивается и финальное благосостояние, и вероятность стать банкротом. В целом, стратегия «последователя» более эффективна, чем «подбрасывание монетки» (см. Таблицу 1.5), особенно если агенты не используют маржинальные сделки.

Большой разброс значений среднего благосостояния необанкротившихся агентов в случае, когда агенты могут брать маржинальные кредиты на сумму, в десять раз превышающую их капитал, связан с тем, что выборка значений финального благосостояния очень мала вследствие того, что подавляющее большинство агентов стали банкротами.

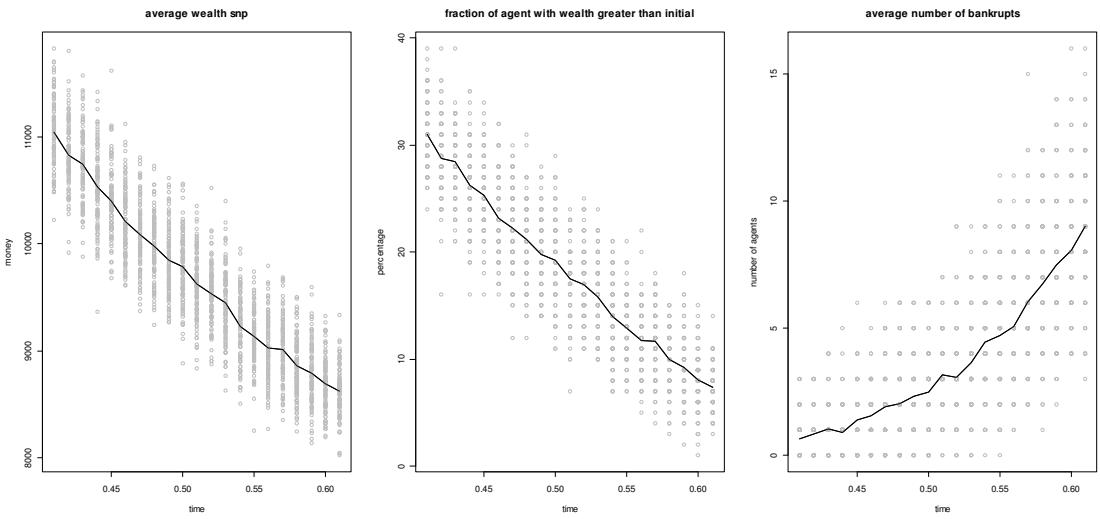


Рисунок 1.28 – Графики показывают зависимость среднего благосостояния (слева), доли увеличивших свое благосостояние агентов (по центру) и доли банкротов в общей выборке (справа) для  $p = 0.4–0.6$  для отсутствия маржинальных сделок ( $leverage=0$ ). Серые точки соответствуют результатам конкретных экспериментов, черные линии обозначают средние значения указанных характеристик по совокупности проведенных экспериментов.

Результаты для случая  $leverage = 0$  показаны на рисунке 1.28. Наклон линии средних значений параметров, указывающий на небольшое преимущество агентов-последователей лидеров с меньшим значением  $p$  является следствием выбранной стратегии и особенностей данных. Дело в том, что в нашей модели последователи придерживаются самой простой модели имитации, повторяя действия своих лидеров с предыдущего шага, и ключевым фактором здесь является то, как часто меняется направление движения цен. Если правильным решением для 1-го дня (см. рисунок 1.28) было «купить», а для 2-го дня – «продать», и лидер был достаточно опытен, чтобы принять верное решение (т.е. лидер имеет высокое значение  $p$ ), то его последователь ошибется, повторив действие «купить» на второй день, поскольку во второй день бычий тренд сменится медвежьим и цена пойдет вниз. Решение же последователя «продать» на третий день будет верным, поскольку тренд сохранится. И наоборот, если у лидера невысокое значение  $p$  и он, например, ошибается оба раза, выбрав «продать» в первый день и «купить» во второй, то его последователь сможет заработать во второй день и проиграть в третий. Аналогичный пример можно привести для точки смены тренда с медвежьего на бычий (см. день 5 на рисунке 1.29).

Данные по S&P500 содержат 2514 наблюдений (дней) и 54,5% из них являются днями смены тренда, таким образом, в этом случае действительно чуть более выгодно следовать за малоопытным лидером. В данных по СAC 40 – 52,7% дней смены тренда, по DAX – 51,5%, по FTSE – 52,5%, по Nikkei 225 – 51,5% и по индексу Hang Seng – 51,35%.

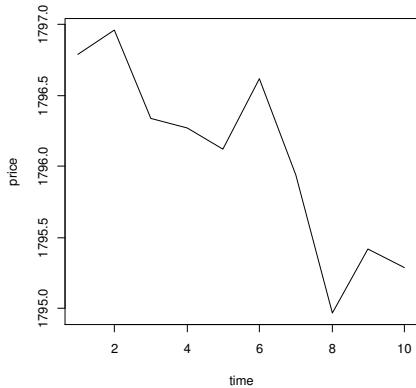


Рисунок 1.29 – Цена актива

Результаты по всем шести индексам очень схожи. Для случая отсутствия маржинальной торговли вероятность банкротства невысока и финальное благосостояние необанкротившихся агентов остается на уровне начального капитала 10 000, а для случая использования маржинальных сделок с кредитным плечом 1:10 вероятность банкротства становится экстремально высокой. Таким образом, стратегия «последователь» демонстрирует схожие результаты со стратегией «подбрасывания монет», если последователь использует короткие продажи и маржинальные кредиты; для случая leverage = 0 стратегия «последователь» демонстрирует такие результаты по среднему выигрышу, что и стратегия «подбрасывание монет», но имеет преимущества в вероятности банкротства – она почти всегда ниже для первой стратегии.

#### 1.4.2.3 Результаты модели с черными лебедями

Мы проводили эксперименты для  $N = 1000$  агентов и  $\delta = 0.4$ . Половина агентов использовала стратегию Талеба, т.е. зарабатывала меньше в спокойные дни и много в кризис – для них  $p^Q$  выбирался из  $R[0.3; 0.5]$  и  $p^R$  из  $R[0.7; 0.9]$ . осталось

ные агенты используют традиционную стратегию (см. подпункт 1.4.2.1) и для них  $p^Q$  из  $R[0.5; 0.6]$  и  $p^R$  из  $R[0.1; 0.2]$ . Результаты приведены на рисунке 1.30.

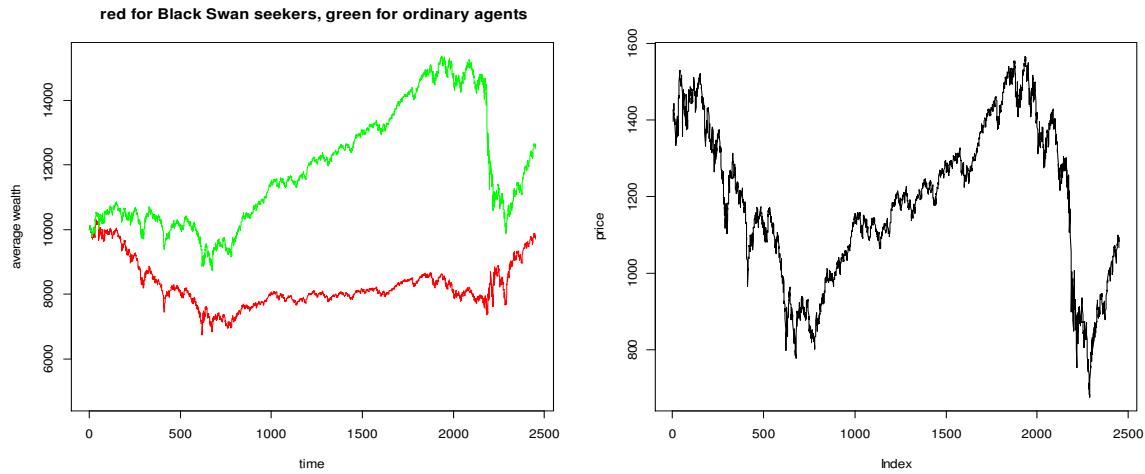


Рисунок 1.30 – Среднее благосостояние агентов традиционной стратегии (слева, зеленая линия) и агентов – «искателей Черных лебедей». Цена актива на правой панели.

Благосостояние агентов традиционной стратегии в среднем превышает благосостояние приверженцев стратегии Талеба, хотя и сильно снижается в кризис. Гистограмма распределения благосостояния представлена на рисунке 1.31. Возможно, низкая эффективность стратегии «искателей Черных лебедей» в периоды отсутствия серьезных потрясений на рынке не может быть уравновешена большими выигрышами в моменты кризиса.

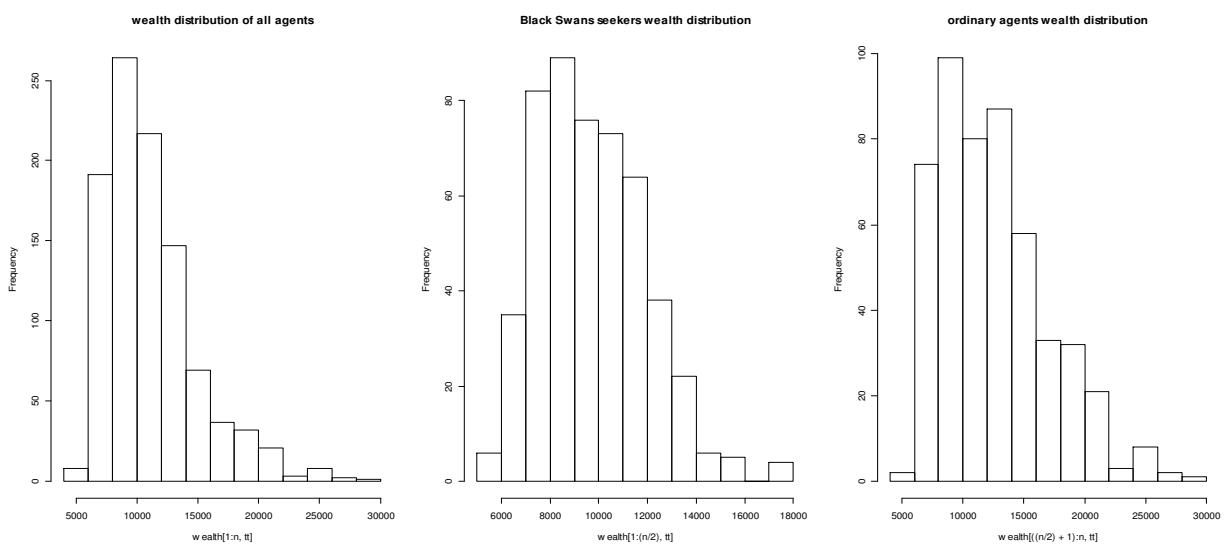


Рисунок 1.31 – Гистограмма распределения благосостояния всех агентов (слева), агентов-«искателей Черных лебедей» (по центру) и агентов, использующих традиционные стратегии (справа).

«Искатели Черных лебедей» гораздо более подвержены риску банкротства (рисунок 1.32) по сравнению с агентами традиционной стратегии. В этом эксперименте обанкротились 239 агентов из группы «искателей Черных лебедей» и всего 12 из группы агентов-«традиционалистов».

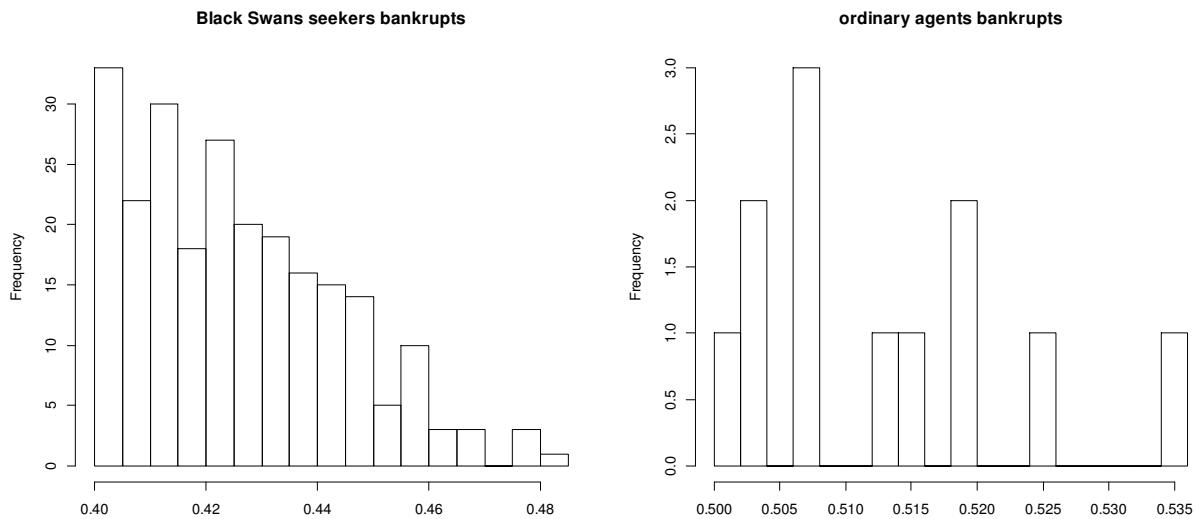


Рисунок 1.32 – Распределение параметра  $p$  среди банкротов в группе «искателей Черных лебедей» (слева) и «традиционалистов» (справа)

Распределение параметра  $p$  среди банкротов в обеих группах совпадает с результатами из подпункта 1.4.2.1. Следовательно, традиционная стратегия не хуже стратегии Талеба.

#### 1.4.3 Некоторые выводы

Были проанализированы различные торговые стратегии мелких и средних трейдеров, не имеющих возможности оказывать влияние на цену актива, и последствия использования маржинальной торговли.

Результаты наших экспериментов показывают, что существует некоторый критический уровень опыта (или удачливости) агентов, такой что агенты, имеющие показатель успешности распознавания движения цен равный или превышающий этот критический уровень, почти наверняка «выживут» на рынке. Если агент не использует возможности маржинальной торговли и заключает сделки только на собственный капитал, то такой критический уровень располагается чуть выше  $\frac{1}{2}$ . Такой показатель является интуитивно привлекательным и сулит достаточно высокие шансы

на выживание и получение прибыли, что может объяснить, почему так много людей стремится попробовать себя в торговле ценными бумагами. Однако если трейдер торгует с использованием заемных средств (особенно с большим кредитным плечом), то критическое значение будет намного выше и для успешной долговременной торговли на рынке потребуется высокая вероятность принятия верных решений.

Стратегия абсолютно случайного выбора решений о покупке или продаже активов (вероятность принятия верного решения равна 0.5) неэффективна без маржинальных сделок и очень опасна, если разрешить их заключать, поскольку вероятность стать банкротом растет очень быстро. В то же время известно, что многие трейдеры, даже профессиональные, не дотягивают даже до уровня в 50% [119, 153].

С этой точки зрения для мелких и средних инвесторов без большого опыта или доступа к инсайдерской информации для принятия решений стратегия имитирования представляется весьма разумной, особенно если агент не использует маржинальных сделок. Но в противоречии с естественным, казалось бы, суждением о том, что выгоднее должно быть повторение действий наиболее удачливых или опытных коллег, мы нашли, что разница между стратегиями «следование за хорошо угадывающим лидером» (с высоким  $p$ ) и «следование за не очень хорошо угадывающим лидером» (с низким  $p$ ) незначительна и первая стратегия даже менее выигрышна, чем вторая.

Еще один интересный вывод из наших экспериментов касается стратегии «ожидания Черных лебедей». В долгосрочной перспективе в экономике период стабильной экономической жизни и отсутствия серьезных потрясений на рынке может быть настолько продолжительным, что трейдер может просто обанкротиться в ожидании Черных лебедей, на которых зарабатывают последователи подобной стратегии. Хотя, разумеется, существуют агенты, успешно применяющие такую инвестиционную стратегию.

Результаты исследований этого подраздела нашли отражение в работе [95]

1. Egorova L. Behavioral Models of Stock Exchange// статья подготовлена для публикации

## 1.5 Анализ эффективности функционирования банковского и финансового секторов экономики

В этом подразделе отчета приведены результаты по анализу эффективности функционирования банковского и финансового секторов экономики. Данное исследование продолжает цикл работ прошлых лет. В подразделе два пункта. Первый пункт посвящен моделированию оптимального хеджирующего соотношения с учетом междневного и внутридневного рисков торговых позиций, второй – моделированию последствий регулирования российских национальных системно значимых банков.

### 1.5.1 Моделирование оптимального хеджирующего соотношения с учетом междневного и внутридневного рисков торговых позиций

Частной задачей формирования оптимального инвестиционного портфеля является задача хеджирования. Суть данной операции состоит в минимизации (или сохранении) уровня риска по занятию позиции в активе. Хеджирование – некоторый набор методов, использование которых позволяет уменьшить риск, часто измеряемый стандартным отклонением доходности портфеля, состоящего из единицы базового (хеджируемого) актива и доли иного (хеджирующего) актива. Такую долю называют хеджирующим соотношением. В качестве текущих (базовых) инструментов обычно берутся акции. В качестве срочных инструментов чаще всего используются фьючерсы, опционы и т.д.

Необходимо отметить, что большинство методов выбора оптимального портфеля заключается в использовании лишь цен закрытия (close цены). В данной работе выделяются междневной, внутридневной и полный дневной период доходности. Междневной период – период с закрытия биржи в базовый день до открытия биржи на следующий день. Внутридневной период – период с открытия биржи до её закрытия в один и тот же день. Полный дневной период – период с закрытия биржи в базовый день до закрытия биржи на следующий день.

Цель данного исследования – проверить гипотезу о том, что использование дифференцированного в течение суток хеджирующего соотношения между текущими и срочными инструментами позволяет сформировать более доходный портфель, обладающий тем же уровнем риска, в силу неоднородности распределения междневных и внутридневных доходностей, чем использование единого соотношения на основе данных о распределении полных дневных доходностей

Объектом исследования являются распределения доходностей индексов и фьючерсов на них. А предметом исследования является хеджирующее соотношение между позициями в индексе и фьючерсе, используемое для формирования инвестиционного портфеля.

Дальнейшее изложение структурировано следующим образом. В подпункте «Обзор литературы» рассматривается, как исследовались вопросы соотношения внутри- и междневных рисков, а также некоторые работы по хеджированию и изучению соотношения между риском и доходностью на различных временных периодах в целом. Кроме того, здесь же сформулированы гипотезы данного исследования. В следующем подпункте обсуждается методология исследования, а именно подход регрессии в скользящих окнах и модель коррекции ошибкой. Далее приводится описание данных, а, наконец, последний подпункт содержит основные результаты и проверку надежности данных результатов.

#### 1.5.1.1 Обзор литературы и формулировка гипотезы исследования

В рамках данного исследования рассмотрены работы по тематикам:

- изучения доходности и риска на различных временных периодах [15, 62, 65, 167];
- хеджирования риска [30].

Авторы [167] изучали совместную динамику доходностей акций (индексов) между различными странами. Особенностью данной работы является то, что авторами был выделен междневной период доходности. Важный для текущего исследования результат состоит в том, что при анализе корреляции между S&P 500 и фьючерсом Nikkei 225 авторы показали, что одни и те же шоки по-разному влияют на

корреляцию между внутридневными доходностями индексов и соответствующую корреляцию междневных доходностей индексов разных стран. Кроме того, авторы выявили, что корреляция внутридневных доходностей больше, чем корреляция междневных доходностей при учете разницы в часовых поясах.

В статье [62] большее внимание было уделено распределению волатильности доходности индекса Nikkei 225 на внутридневном. Значимым для данной работы результатом было то, что авторы выявили аномально большое значение волатильности в первые минуты торгов на бирже, которое теоретически может влиять на доходность с утра. Более того, авторы ссылаются на работу [132], в которой так же был выявлен данный факт, но уже для других индексов.

В работе [65] авторами, используя различные меры риска и волатильности, было показано существование положительной и статистически значимой связи между риском и ожидаемой доходностью на внутридневном периоде. Данный результат не соответствует результатам многих других работ, которые данной связи не обнаружили (см. [65]). Но в данных работах преимущественно использовались менее частные данные (дневные), что могло повлиять на результат.

В статье [15] авторы рассмотрели влияние горизонта инвестирования на соотношение между риском и доходностью для 10 – летних американских казначейских облигаций и индекса Dow Jones. В теории облигации являются сравнительно менее рисковыми ценными бумагами. Это выражается в меньшем стандартном отклонении доходности облигаций по сравнению с доходностями акций. Но в данной работе было показано, что с увеличением сроков инвестирования акции становятся менее рисковым инструментом по сравнению с облигациями и дают большую среднюю доходность. Результаты данной работы говорят о том, что взаимосвязь между риском и доходностью меняется с изменением временных горизонтов инвестирования.

Работа [30] ценна тем, что в ней проведен обзор наиболее общеупотребительных понятий и методов хеджирования и предложен относительно новый метод, основывающийся на применении моделей «копула», для моделирования совместного распределения доходностей текущих и срочных инструментов. Но в данной работе использовались лишь дневные данные (полная дневная доходность).

Проанализировав работы, представленные выше можно сделать вывод, что существует неисследованные области:

- среди известных работ нигде не было исследовано соотношение риска и доходности на междневном и внутридневном периоде;
- для цели определения оптимального хеджирующего соотношения рассмотрение внутридневных и междневных периодов по отдельности не проводилось.

Сформулируем гипотезы исследования.

### 1. Гипотезы о распределениях доходностей:

- математическое ожидание внутридневной доходности меньше, чем междневной;
- риск, измеренный стандартным отклонением, междневной доходности меньше, чем внутридневной; данное предположение основано на том, что рынок в течение дня, в среднем, более волатилен, чем в период между днями;
- предполагается неоднородность распределений внутри- и междневных доходностей.

Первые две гипотезы дополняют результаты работы [15], в которой было выявлено непостоянство связи риск – доходность в зависимости от выбранного временного периода инвестирования. Кроме того, связь между риском и доходностью обсуждалась в работе [65], где исследовался лишь внутридневной период. Третья гипотеза будет проверена с помощью критерия Колмогорова – Смирнова, который проверяет нулевую гипотезу о том, что выборки извлечены из генеральной совокупности с одним и тем же распределением.

### 2. Гипотезы о хеджирующем соотношении:

- предполагается, что хеджирующее соотношение между текущей ценой и котировкой фьючерса отличается для разных временных горизонтов: хеджирующее соотношение внутри дня не равно хеджирующему соотношению между днями;

– последняя гипотеза является следствием предыдущей: учет неоднородности распределений рисков и доходности ведет к более эффективным решениям задачи хеджирования в терминах повышения доходности при неизменном уровне риска.

### 1.5.1.2 Методология исследования

Необходимо математически записать формулы доходностей, определения которых были даны ранее: полная дневная доходность (1.38), междневная доходность (1.39) и внутридневная доходность (1.40):

$$R_t^{\text{дневная}} = \frac{P_t^{\text{закрытия}} - P_{t-1}^{\text{закрытия}}}{P_{t-1}^{\text{закрытия}}}, \quad (1.38)$$

$$R_t^{\text{междневная}} = \frac{P_t^{\text{открытия}} - P_{t-1}^{\text{закрытия}}}{P_{t-1}^{\text{закрытия}}}, \quad (1.39)$$

$$R_t^{\text{внутридневная}} = \frac{P_t^{\text{закрытия}} - P_t^{\text{открытия}}}{P_t^{\text{открытия}}}, \quad (1.40)$$

где  $R_t^i$  – доходность соответствующего периода (полная дневная, междневная и внутридневная),  $P_t^j$  – цена открытия или закрытия,  $t$  – время, измеряемое в днях.

Доходности считаются как прирост цены за соответствующий период. Дневная доходность приблизительно равна сумме междневной и внутридневной доходностей (формулы (1.41)–(1.43)):

$$R_t^{\text{дневная}} = \frac{P_t^{\text{закрытия}} - P_{t-1}^{\text{закрытия}}}{P_{t-1}^{\text{закрытия}}} = \frac{P_t^{\text{закрытия}} - P_t^{\text{открытия}} + P_t^{\text{открытия}} - P_{t-1}^{\text{закрытия}}}{P_{t-1}^{\text{закрытия}}}, \quad (1.41)$$

$$(1 + R_t^{\text{дневная}}) = (1 + R_t^{\text{внутридневная}})(1 + R_t^{\text{междневная}}), \quad (1.42)$$

$$R_t^{\text{дневная}} \approx R_t^{\text{междневная}} + R_t^{\text{внутридневная}}. \quad (1.43)$$

Основная задача при применении операции хеджирования заключается в выборе соотношения, в котором нужно взять срочный инструмент в инвестиционном портфеле. Стандартный подход заключается в определении соотношения на основе

знания распределения лишь полных дневных доходностей активов. Запишем доходность инвестиционного портфеля, состоящего из текущих и срочных инструментов

$$R_H^{[j]} = R_{\text{cash}}^{[j]} - h^{[j]} R_{\text{fwd}}^{[j]}, \quad (1.44)$$

где индекс  $j \in \{\text{дневная; внутридневная; междневная}\}$ , индекс  $H$  указывает на доходность захеджированного портфеля, индекс  $\text{cash}$  – доходность текущего актива, индекс  $\text{fwd}$  – доходность срочного актива, коэффициент  $h^{[j]}$  – хеджирующее соотношение соответствующего периода.

Захеджированный инвестиционный портфель есть линейная комбинация инструментов, но коэффициент такой комбинации у срочных инструментов берется с отрицательным знаком в связи с тем, что по данному активу необходимо занять противоположную по отношению к текущему активу позицию.

Запишем риск данного портфеля, измеренного дисперсией доходности

$$\sigma_h^2 = \sigma_{\text{cash}}^2 + h^2 \sigma_{\text{fwd}}^2 - 2h \sigma_{\text{cash}, \text{fwd}}, \quad (1.45)$$

где  $\sigma_h^2$  – дисперсия захеджированного портфеля,  $\sigma_{\text{cash}}^2$  – дисперсия текущего актива,  $\sigma_{\text{fwd}}^2$  – дисперсия срочного актива,  $\sigma_{\text{cash}, \text{fwd}}^2$  – ковариация текущего и срочного активов.

Минимизируя выражение (1.45) по  $h$ , получаем оптимальное значение хеджирующего соотношения, что было показано в [144]:

$$h^{*[j]} = \frac{\sigma_{\text{cash}, \text{fwd}}}{\sigma_{\text{fwd}}^2}. \quad (1.46)$$

Решение задачи минимизации дает, что оптимальное соотношение равно отношению ковариации доходностей и дисперсии срочного инструмента. Данное соотношение, при определенных допущениях, соответствует коэффициенту регрессии без константы хеджируемого актива на хеджирующий (то есть текущего актива на срочный), что было показано в [30].

При учете неоднородности распределения рисков междневной и внутридневной доходности задача хеджирования разбивается на два этапа:

- находятся оптимальные хеджирующие соотношения на междневном и внутридневном периода; составляются оптимальные захеджированные портфели;
- итоговая доходность является суммой доходностей двух оптимальных портфелей, определенных на междневном и внутридневном периодах.

Для проверки четвертой гипотезы о неэффективности использования единого хеджирующего соотношения будет проведен тест Чоу [84] по данным междневной и внутридневной доходностей с гипотезами

$$H_0: h_{\text{междневная}}^* = h_{\text{внутридневная}}^*, \quad (1.47)$$

$$H_1: h_{\text{междневная}}^* \neq h_{\text{внутридневная}}^*. \quad (1.48)$$

При выполнении нулевой гипотезы статистика теста Чоу равна

$$\frac{(RSS_{1+2} - RSS_1 - RSS_2) / k}{(RSS_1 + RSS_2) / (n - 2k)} = F(k; n - 2k), \quad (1.49)$$

где  $RSS_{1+2}$  – сумма квадратов остатков модели, построенной по междневным и внутридневным данным вместе, а  $RSS_1$  и  $RSS_2$  – сумма квадратов остатков моделей, построенных отдельно по данным междневной и внутридневной доходности,  $k$  – число параметров модели, которое в данном случае равно единице. Тогда если нулевая гипотеза о равенстве коэффициентов отвергается на определенном уровне значимости, то делается вывод о необходимости учета неоднородности, то есть использования разных хеджирующих соотношений внутри дня и между дней.

Для проверки надежности результатов тестирования будет оценена система одновременных внешненесвязанных уравнений с помощью обобщенного метода наименьших квадратов:

$$\begin{cases} R_{\text{меж},t}^{\text{cash}} = h_{\text{меж}} R_{\text{меж},t}^{\text{fwd}} + \varepsilon_{\text{меж},t}, \\ R_{\text{внутр},t}^{\text{cash}} = h_{\text{внутр}} R_{\text{внутр},t}^{\text{fwd}} + \varepsilon_{\text{внутр},t}, \end{cases} \quad (1.50)$$

где  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i)$  и ковариации

$$\begin{cases} Cov(\mathcal{E}_{\text{меж},m}; \mathcal{E}_{\text{внутри},k}) \neq 0, \text{ при } m = k, \\ Cov(\mathcal{E}_{\text{меж},m}; \mathcal{E}_{\text{внутри},k}) = 0, \text{ при } m \neq k. \end{cases} \quad (1.51)$$

Нулевая гипотеза (1.47) о равенстве междневного и внутридневного соотношений проверяется с помощью  $t$ -статистики.

Более того, будет построена еще одна альтернатива тесту Чоу, которая позволяет проверить нулевую гипотезу (1.47) лишь с помощью одного уравнения

$$R_h^{\text{cash}} = h_{\text{меж}} R_{\text{меж}}^{*fwd} + h_{\text{внутри}} R_{\text{внутри}}^{*fwd} + \varepsilon,$$

где

$$R_h^{\text{cash}} = \begin{pmatrix} R_{\text{меж}}^{\text{cash}} \\ R_{\text{внутри}}^{\text{cash}} \end{pmatrix}, \quad R_{\text{меж}}^{*fwd} = \begin{pmatrix} R_{\text{меж}}^{fwd} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_{\text{внутри}}^{*fwd} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{\text{внутри}}^{fwd} \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Нулевая гипотеза (1.47) о равенстве хеджирующих соотношений проверяется с помощью  $t$  – статистики.

Регрессия в скользящих окнах.

Метод оценки регрессии для коэффициента (1.46) на полном массиве неадекватен в связи с изменчивостью корреляции между доходностями. Поэтому в данной работе реализуется подход регрессии в скользящих окнах (Moving Window Regression), который используется для задачи динамического хеджирования, суть которой заключается в пересчете хеджирующего соотношения в каждый момент времени  $t$ . Поскольку оценка хеджирующего соотношения (1.46) зависит от выбора окна  $m$ , в работе будут сравнены несколько вариантов окон для определения наиболее предпочтительного в терминах эффективности хеджирования. Применив данную процедуру к данным, будут получены вектора значений оптимального соотношения для трех периодов: полного дневного, междневного и внутридневного. Используя данные соотношения, подсчитываются доходности портфелей по следующему алгоритму:

- при использовании полного дневного хеджирующего соотношения, доходность захедированного портфеля в момент  $t$  считается как разность доходности теку-

щего актива (базового) и срочного, помноженного на полное дневное хеджирующее соотношение, рассчитанное на массиве  $[t-m-1, t-1]$ ;

– разделяя соотношения на междневное и внутридневное, берется сумма доходности внутридневного и междневного портфеля, которые подсчитываются аналогично предыдущему случаю.

Заметим, что при подсчете используются доходности, реализованные в период  $t$  и прогноз хеджирующего соотношения, полученное по данным на  $t-1$ -й период:

$$R_t^{H,[j]} = R_t^{\text{cash},[j]} - h_{t-1}^{*[j]} R_t^{\text{fwd},[j]}, \quad (1.53)$$

$$R_t^{H,\text{new}} = R_t^{H,\text{меж}} + R_t^{H,\text{внутри}}, \quad (1.54)$$

где  $R_t^{H,\text{new}}$  – портфель, являющийся суммой двух других: междневного и внутридневного,  $[j]$  – индекс доходности (внутридневной, междневной и полной дневной). Портфель, определенный в (1.54) является портфелем с учетом неоднородности, так как по сравнению с портфелем, где используется одно хеджирующее соотношение, он составляется из двух других портфелей, оцененных отдельно по данным междневной и внутридневной доходности. Затем сравниваются характеристики (стандартное отклонение доходности и средняя доходность) этих портфелей.

Для проверки устойчивости результатов будет проведен непараметрический тест на наличие структурных сдвигов в «копуле» многомерного распределения межи внутридневных доходностей текущих и срочных активов. Данный тест предложен в работе [16], основанный на модификации статистики Колмогорова – Смирнова. Тест применяется для трех пар доходностей по каждому индексу (двумерное распределение междневных, внутридневных и полных дневных доходностей текущих и срочных инструментов). Из трёх дат сдвига выбирается самая поздняя дата и с неё запускается процедура динамического хеджирования, то есть модель оценивается на однородных данных.

Модель ЕСМ.

Для проверки надежности и сравнения результатов будет использоваться модель коррекции ошибкой (ЕСМ). Рассматриваются два временных ряда, которые в уровнях не стационарны, но стационарны в первых разностях  $X_t \sim I(1)$ ,  $Y_t \sim I(1)$ . В рамках данного исследования временной ряд  $X_t$  соответствует ценам на срочные активы, а  $Y_t$  на текущие. Рассмотрим их линейную комбинацию  $Z_t$ , которая в общем виде также не стационарна, но стационарна лишь в первых разностях:

$$Z_t = aY_t + \beta X_t + c \sim I(1), \quad (1.55)$$

где  $a, \beta, c$  – оцениваемые коэффициенты. В работе [96] постулируется, что данная линейная комбинация может оказаться стационарной, тогда коэффициенты такой линейной комбинации называются коинтегрирующими.

Теперь рассмотрим приложение модели коррекции ошибкой для задачи хеджирования, которая по сути своей является преобразованной моделью с распределенными лагами (более подробное описание моделей коинтеграции в задачах оценки хеджирующего соотношения можно найти в работах [106, 135]):

$$\Delta Y_t = \lambda + h\Delta X_t + \sum_{i=1}^p \lambda_i \Delta X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \theta_i \Delta Y_{t-i} + \phi(Y_{t-1} - c_1 - \beta_1 X_{t-1}) + \xi_t v, \quad (1.56)$$

где  $h$  – хеджирующее соотношение,  $c_1 = \frac{c}{a}$ ,  $\beta_1 = \frac{\beta}{a}$ ,  $\lambda_i, \theta_i, i = \overline{1; p}$  – оцениваемые коэффициенты,  $\xi_t$  – случайные ошибки модели. Оценки, полученные в данной модели, являются состоятельными при отсутствии эндогенности и автокорреляции остатков, что при необходимости достигается путем добавления необходимого количества лагов прироста переменных  $X_t$  и  $Y_t$ . Кроме того, все переменные в модели являются стационарными, что также позволяет оценивать параметры модели по МНК (отсутствует проблема мнимых регрессий).

В итоге используется следующий алгоритм, состоящий из четырех этапов:

- 1) ряды в уровнях тестируются на стационарность  $I(1)$  с помощью расширенного теста Дикки–Фуллера;
- 2) оценивается по МНК следующая модель:

$$Y_t = \beta_1 X_t + c_1 + \varepsilon_t, \quad (1.57)$$

где используются обозначения моделей (1.55) и (1.56);

- 3) остатки  $e_t$  из теоретической модели (1.57) тестируются на стационарность с помощью расширенного теста Дикки–Фуллера (с критическими значениями Мак–Кинона); нулевая гипотеза при данном тестировании заключается в наличии единичного корня, то есть ряд не является стационарным; если нулевая гипотеза отвергается, то делается вывод о коинтегрированности рядов;
- 4) рассматривается уравнение

$$\Delta Y_t = \lambda_1 + h\Delta X_t + \sum_{i=1}^p \lambda_i \Delta X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \theta_i \Delta Y_{t-i} + \phi e_{t-1} + \xi_t, \quad (1.58)$$

в котором используются обозначения из уравнений (1.56), (1.57) и количество лагов дифференциала выбирается так, чтобы отсутствовала эндогенность, автокоррелированность остатков; остатки из уравнения (1.57) корректируют краткосрочную динамику между переменными с учетом наличия долгосрочной связи.

### 1.5.1.3 Описание данных

Информационную базу исследования составили данные по ценам закрытия и открытия пяти индексов, которые соответствуют пяти крупным биржам Европы, Америки и Китая. Данные собраны по дням за период с первого Января 1991 года по Декабрь 2012, исключая выходные дни. Таким образом, число наблюдений по каждому индексу составило 5720 наблюдений. Источник данных – Bloomberg, finance.yahoo.com.

В качестве хеджирующего инструмента был выбран фьючерсный контракт. Значением фьючерса на индекс является цена контракта наиболее близкого к исполнению. Данному ряду соответствует термин generic (составной), поскольку в отличие от индекса акций у фьючерса на индекс есть ограниченная срочность и необходимо взять несколько срочных контрактов для охвата всего периода.

Необходимо отметить, что период данных (число наблюдений) для срочного контракта несколько короче (см. Таблица Б.1 в Приложении Б, индекс Nasdaq). Это связано с отсутствием данных для более раннего времени.

#### 1.5.1.4 Результаты исследования

С помощью дескриптивного анализа были выявлены следующие стилизованные факты о распределениях междневных и внутридневных доходностей, которые одновременно проверяют поставленные ранее гипотезы исследования:

Имеет место статистически значимое превышение средней междневной доходности над средней внутридневной, что не противоречит первой гипотезе исследования. В Таблице Б.2 приведены тесты проверки нулевой гипотезы о равенстве средних и дисперсий двух доходностей. Нулевая гипотеза о равенстве средних отвергается на уровне значимости 5% почти для всех индексов, кроме индекса Гонконга. Для данного индекса нулевая гипотеза отвергается на 10% уровне.

Стандартное отклонение междневной доходности статистически значимо меньше (примерно в два раза), чем внутридневной для всех индексов (Таблица Б.3, F-тест и тест Левена). Нулевая гипотеза о равенстве дисперсий отвергается для всех индексов.

С помощью критерия Колмогорова–Смирнова была проверена гипотеза о том, что междневная и внутридневная доходности одинаково распределены. Результаты теста представлены в Таблице 1.6, из которой видно, что нулевая гипотеза о равенстве распределений доходности отвергается, что говорит об их неоднородности.

Таблица 1.6 – Критерий Колмогорова–Смирнова

KS тест	Dax	Cac	Nasdaq	Hang - Seng	Nikkei
d	0,154	0,098	0,145	0,125	0,185
p-значение	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Значения эксцесса междневной и внутридневной доходностей отличаются от значений нормального распределения. Причем значение эксцесса междневной доходности больше, чем внутридневной почти для всех индексов, кроме Nikkei 225.

Таким образом, хотя разброс междневных доходностей меньше внутридневных первые, скорее всего, характеризуются более тяжелыми хвостами.

Был проведен тест Чоу проверки нулевой гипотезы о равенстве моделей, построенных по данным междневной и внутридневной доходности текущих и срочных активов. В результате нулевая гипотеза о равенстве моделей отвергалась на уровне значимости 5% для четырех из пяти индексов. Исключением был индекс Nasdaq, для которого нулевая гипотеза не отвергалась. Данный результат говорит о том, что существуют статистически значимые различия в моделях определения оптимального хеджирующего соотношения, оцененных по междневным и внутридневным доходностям, то есть результаты данного теста не противоречат гипотезе №4.

Таблица 1.7 – Тест Чоу

Индекс	Dax	Cac40	Nasdaq	Hang – Seng	Nikkei 225
h_внутри	0,89	0,91	0,67	0,79	0,80
h_меж	0,51	0,92	0,69	0,71	0,39
h_общая	0,78	0,91	0,67	0,75	0,70
F	1297	4,13	0,2	105,8	1236,6
F крит.(1;N–2), $\alpha=0,05$	3,84	3,84	3,84	3,84	3,84
Степени свободы	(1;11081)	(1;11101)	(1;8381)	(1;10223)	(1;10773)
Вывод: H0	отвергается	отвергается	не отвергается	отвергается	отвергается

Для проверки надежности результатов была оценена система одновременных внешненесвязанных уравнений (см. Таблицы 1.8, 1.9):

Таблица 1.8 – Коэффициенты системы уравнений

Index	Значение соотношения		Стандартная ошибка	
	Inter	Intra	Inter	Intra
Dax	0,607	0,901	0,007	0,006
Cac	0,927	0,954	0,005	0,003
Nasdaq	0,771	0,775	0,019	0,004
Hang - Seng	0,773	0,820	0,005	0,005
Nikkei	0,551	0,882	0,008	0,006

Таблица 1.9 – Проверка гипотезы (1.47) о равенстве коэффициентов

Index	Dax	Cac	Nasdaq	Hang - Seng	Nikkei
T - статистика	-31,48	-4,58	-0,19	-6,34	-34,43
p - value	0,00	0,00	0,85	0,00	0,00

Результаты оценки системы линейных уравнений аналогичны результатам теста Чоу (Таблицы Б.7–Б.9). Нулевая гипотеза о равенстве хеджирующих соотношений отвергалась на уровне значимости 5% для четырех индексов из пяти.

Аналогичные результаты были получены при использовании третьей альтернативы, что говорит о необходимости учета дифференциации хеджирующего соотношения (Таблица 1.10):

Таблица 1.10 – Тест Чоу в одно уравнение

Chow(2)	Dax	Cac	Nasdaq	Hang - Seng	Nikkei
T-статистика	-36,010	2,030	0,430	-10,290	-35,160
Стандартная ошибка	0,011	0,009	0,026	0,008	0,012
p - значение	0,000	0,042	0,667	0,000	0,000

Подсчет доходности. Регрессия в скользящих окнах.

Для подсчета доходности захеджированного портфеля используется подход регрессии в скользящих окнах. Поэтому возникает задача выбора ширины окна регрессии. На рисунке Б.4 в Приложении Б отображены графики динамики хеджирующего соотношения в зависимости от ширины окна, где для примера указаны графики лишь для индекса Cac40. Было решено остановиться на окне в 500 наблюдений, так как динамика соотношения не настолько волатильна по сравнению с шириной 100 или 300 наблюдений. Динамика соотношений с шириной в 500 и 1000 наблюдений близкая, но использование первого варианта позволяет получить более длинный ряд доходности портфеля (за счет разности в 500 наблюдений).

На рисунке 1.33 изображена динамика хеджирующих соотношений для индекса Cac40 оцененных по разным типам доходностей: полным дневным, внутридневным и междневным. По графику видно, что динамика иногда схожа, но зачастую качество прироста соотношения разное. Заметно, что с 1992 по 1997 год все соотношения растут: внутридневное и полное дневное соотношения растут линейно, а междневное выпукло.

Подсчет доходности двух портфелей (с учетом и без учета неоднородности) показал эффективность учета неоднородности распределений рисков. В Таблицах 1.11 и 1.12 указаны характеристики данных портфелей. Из данных таблиц следует, что

учет неоднородности позволяет увеличить среднюю (суммарную) доходность портфеля для всех индексов в большей степени, чем растут показатели риска (стандартное отклонение). Абсолютный прирост стандартного отклонения достаточно мал: от двух десятитысячных, до двух тысячных.



Рисунок 1.33 – Хеджирующее соотношение

Таблица 1.11 – Характеристики портфелей

Индекс	Dax	Cac40	Nasdaq	Hang - Seng	Nikkei 225
Без учета неоднородности:					
средняя доходность	0,00008	0,00002	-0,00003	0,00002	0,00001
стандартное отклонение	0,0051	0,0029	0,0049	0,005	0,004
суммарная доходность	0,41	0,11	-0,12	0,08	0,05
С учетом неоднородности:					
средняя доходность	0,00021	0,00005	0,00005	0,00003	0,00012
стандартное отклонение	0,0065	0,003	0,0061	0,0061	0,0064
суммарная доходность	1,09	0,24	0,18	0,15	0,57

Таблица 1.12 – Характеристики портфелей

Index	Dax	Cac40	Nasdaq	Hang - Seng	Nikkei 225
Темп прироста суммарной доходности	165,85%	118,18%	250,00%	87,50%	1040,00%
Темп прироста стандартного отклонения	27,84%	5,84%	23,85%	21,76%	60,00%
Абсолютный прирост отклонения	0,0014	0,0002	0,0012	0,0011	0,0024

Рисунок 1.34 демонстрирует преимущества предложенного подхода: суммарная доходность портфеля с учетом неоднородности почти всюду лежит выше суммарной доходности портфеля без учета. Учитывая, что при использовании предложенного метода инвесторы получают значительное повышение уровня доходности при сохранении уровня риска можно сделать вывод о повышении эффективности хеджирования.



Рисунок 1.34 – Суммарная доходность

#### Проверка надежности результатов.

В дальнейшем была проверена надежность данного результата относительно выбора ширины окна регрессии. Результаты проверялись для ширины окон в 100, 300 и 1000 наблюдений (Таблица Б.5 в Приложении Б). В итоге получено, что показатели портфелей, оцененных с помощью окна в 500 наблюдений, в среднем лучшие относительно окон в 100 и 1000 наблюдений, но примерно одинаковые с шириной окна в 300 наблюдений.

#### Сдвиги в «копуле» распределения.

В Таблице 1.13 приведены результаты проверки наличия структурного сдвига в двумерных рядах доходностей текущих и срочных инструментов. С отчетной даты применяется подход динамического хеджирования. Результаты получились схожими с оцениванием модели по всем данным за исключением индекса Nikkei, для ко-

торого подход учета неоднородности распределений не дал преимущества в уровне доходности (Таблицы 1.13 и 1.14), хотя уровень риска остался примерно на том же уровне.

### Результаты оценивания ЕСМ.

Использовалось две модели с корректирующей ошибкой: первая оценивалась по ценам закрытия; а вторая как по ценам закрытия, так и открытия. Причем второй ряд строился так, чтобы подряд стояли цены открытия и закрытия для одного и того же дня (два ряда встраиваются друг в друга). То есть ряд при использовании как цен открытия, так и цен закрытия в два раза длиннее, чем в первой модели. Абсолютный прирост цены представляет собой прирост цены за ночь, либо за дневное время.

Таблица 1.13 – Структурные сдвиги в двумерных рядах доходностей

	Доходность	Значение статистики	Номер наблюдения	Дата	Отчетная дата
Dax:	междневная	0,09	2200	8 июн 99	2200
	внутридневная	0,08	1666	21 май 97	
	Дневная	0,06	1707	17 июл 97	
Cac40:	Доходность	Значение статистики	Номер наблюдения	Дата	Отчетная дата
	междневная	0,04	3414	2 фев 04	3249
	внутридневная	0,04	1892	2 апр 98	
Nasdaq:	Дневная	0,04	3249	16 июн 03	
	Доходность	Значение статистики	Номер наблюдения	Дата	Отчетная дата
	междневная	0,09	3150	28 янв 03	3328
Hang - Seng:	внутридневная	0,08	3265	8 июл 03	
	Дневная	0,08	3328	3 окт 03	
	Доходность	Значение статистики	Номер наблюдения	Дата	Отчетная дата
Nikkei:	междневная	0,08	1535	19 ноя 96	2902
	внутридневная	0,06	2902	14 фев 02	
	Дневная	0,03	2873	4 янв 02	
	Доходность	Значение статистики	Номер наблюдения	Дата	Отчетная дата
	междневная	0,13	2581	22 ноя 00	3214
	внутридневная	0,04	3214	28 апр 03	
	Дневная	0,03	3214	28 апр 03	

Таблица 1.14 – Оценивание модели на однородных данных

Индекс	Dax	Cac40	Nasdaq	Hang - Seng	Nikkei 225
Без учета неоднородности:					
средняя доходность	-0,000004	0,000014	-0,000104	0,000028	-0,0000005
стандартное отклонение	0,0044	0,0027	0,0043	0,0046	0,0034
суммарная доходность	-0,013	0,027	-0,191	0,062	-0,001
С учетом неоднородности:					
средняя доходность	0,000178	0,000021	0,000012	0,000039	-0,000043
стандартное отклонение	0,0065	0,0028	0,0057	0,0047	0,0057
суммарная доходность	0,524	0,041	0,021	0,086	-0,080
Число наблюдений	2949	1939	1826	2224	1888

В Таблицах Б.10 и Б.11 Приложения Б отражены результаты проверки рядов на стационарность в уровнях. Нулевая гипотеза о не стационарности ряда не отвергалась почти для всех рядов, кроме цен закрытия индекса Nasdaq. Ошибка из модели (1.57) оказалась не стационарна для индекса Nasdaq, что говорит об отсутствии коинтеграции рядов для данного индекса. Более того, при оценивании модели ЕСМ коэффициент при корректирующей ошибке оказался незначим, что также говорит о неприменимости данного подхода к индексу Nasdaq (Таблицы Б.13 и Б.14 Приложения Б). Поэтому принято решение, что в данном анализе Nasdaq использоваться не будет.

Оценивается модель из уравнения (1.57), и остатки тестируются на стационарность. Результаты данного тестирования можно найти в Таблице Б.12, из которого видно, что для всех четырех индексов остатки из модели (1.57) являются стационарными. Данный факт говорит о коинтегрированности временных рядов.

Результаты оценивания модели (1.58) представлены в Таблице 1.15, из которой видно, что хеджирующие соотношения при оценивании лишь на дневных данных и меж- и внутридневных отличаются не так значительно как при предыдущем оценивании (использовании регрессии в скользящих окнах без константы), но необходимо отметить, что и сама процедура оценивания отличается. Число лагов дифференциала определялось с помощью информационных критериев Акайке, Ханна–Куина. Затем

при выбранном числе лагов остатки тестировались на автокоррелированность с помощью теста Бреуша–Годфри.

Модель оценивалась на 500 наблюдениях (от 5100 до 5600 наблюдения) для со-поставимости результатов с регрессией в скользящих окнах. Затем на оставшихся наблюдениях (порядка 100 наблюдений) строился прогноз с помощью полученного хеджирующего соотношения. Результаты прогнозирования отображены в Таблице 1.16. Абсолютный прирост средней доходности  $\Delta\bar{R}$  считается по формуле

$$\Delta\bar{R}_k = \bar{R}_k^{\text{с учетом}} - \bar{R}_k^{\text{без учета}}, \quad (1.59)$$

где  $\bar{R}$  – средняя доходность для модели  $k \in \{\text{ECM}; \text{MWR}\}$ , ECM – модель коррекции ошибкой, MWR – регрессия в окнах.

А темп прироста стандартного отклонения  $T\sigma_{R_k}$  равен

$$T\sigma_{R_k} = \left( \frac{S_k^{\text{с учетом}}}{S_k^{\text{без учета}}} - 1 \right) \cdot 100\%, \quad (1.60)$$

где  $S_k^{\text{с учетом}}$  – стандартное отклонение доходности портфеля с учетом неоднородности,  $S_k^{\text{без учета}}$  – стандартное отклонение портфеля без учета неоднородности.

Таблица 1.15 – Результаты оценивания модели ECM

Index	Dax	Cac	HS	Nikkei
h_закрытия	1,005	0,987	0,924	0,991
стандартная ошибка	0,008	0,006	0,010	0,008
h_меж/внутри	0,969	0,972	0,913	0,856
стандартная ошибка	0,010	0,009	0,009	0,028
Число лагов прироста цены:				
по ценам закрытия	7	2	7	6
по ценам открытия и закрытия	6	6	5	4
Число наблюдений в модели:				
по ценам закрытия	500	500	500	500
по ценам открытия и закрытия	1000	1000	1000	1000

Под моделью с учетом неоднородности следует понимать модель, в которой используются как цены закрытия, так и цены открытия. В модели без учета неоднородности используются лишь цены закрытия. Результаты данного оценивания аналогичны результатам, полученным в модели с корректирующей ошибкой: использо-

вание цен открытия наряду с ценами закрытия позволяет значительно увеличить среднюю доходность портфеля, но также дает рост стандартного отклонения. Причем данный рост больше, чем при использовании регрессии в скользящих окнах.

Таблица 1.16 – Прогнозирование на основе модели ЕСМ

номер строки	Индекс	Dax	Cac40	Hang-Seng	Nikkei 225
1	Без учета неоднородности:				
2	средняя доходность*105	0,8	2,5	7,5	0,4
3	риск*105	148,9	176,5	242,0	206,6
4	хеджирующее соотношение	1,005	0,987	0,924	0,991
5	С учетом неоднородности:				
6	средняя доходность*105	9,4	9,7	15,8	3,9
7	риск*105	336,4	369,0	310,5	895,5
8	хеджирующее соотношение	0,969	0,972	0,913	0,856
9	$T\sigma_R$	125,98%	109,04%	28,30%	333,38%
10	$\Delta\bar{R}^{*10^5}$	8,57	7,27	8,33	3,46

Показатели умножены на  $10^5$  для лучшей отражаемости результатов.

При оценивании регрессии в окнах на тех же наблюдениях, что и при оценке модели с корректирующей ошибкой, были получены следующие результаты (Таблица 1.17). Количество наблюдений (с 5100 по 5600) соответствует размеру окна регрессии, которое использовалось в модели с корректирующей ошибкой, то есть для прогноза используется одно хеджирующее соотношение.

Результаты показывают, что модель с учетом неоднородности позволяет значительно увеличить эффективность хеджирования для трех из четырех индексов по сравнению с моделью без учета неоднородности. Показатели темпа прироста стандартного отклонения и абсолютного прироста средней доходности считаются аналогично с моделью ЕСМ.

Модель с учетом неоднородности (см. Таблицу 1.17) позволяет значительно увеличить среднюю доходность портфеля для трех из четырех индексов (строка 12) за исключением индекса Nikkei при незначительном увеличении стандартного отклонения (строка 11). Результаты качественно повторяют результат, полученный в ранее.

Таблица 1.17 – Прогнозирование на основе регрессии в скользящих окнах

Номер строки	Индекс	Dax	Cac40	Hang-Seng	Nikkei 225
1	Без учета неоднородности:				
2	средняя доходность*105	-0,2	3,1	5,6	-1,4
3	стандартное отклонение доходности*105	147,2	177,8	242,2	208,6
4	хеджирующее соотношение	1,012	0,982	0,943	1,013
5	С учетом неоднородности:				
6	средняя доходность*105	9,1	8,8	13,0	36,9
7	стандартное отклонение доходности*105	178,2	200,5	261,2	493,9
8	междневное соотношение	0,897	0,909	0,960	0,633
9	внутридневное соотношение	0,952	0,938	0,832	0,524
10	число наблюдений	120	120	116	116
11	$T\sigma_R$	21,1%	12,8%	7,8%	136,7%
12	$\Delta\bar{R}^*105$	9,35	5,68	7,43	38,27

При сравнении результатов прогнозирования моделями ECM и регрессией без константы были сделаны следующие выводы:

- ECM дает прирост доходности при том же уровне риска, что и для регрессии в скользящих окнах на данных без учета неоднородности;
- регрессия в скользящих окнах при том же уровне доходности позволяет достичь меньшего уровня риска по сравнению с ECM на данных с учетом неоднородности.

При хеджировании на полных дневных данных (без учета неоднородности) модель ECM показывает лучшие результаты по сравнению с регрессией в скользящих окнах. А при хеджировании по междневным и внутридневным данным регрессия в скользящих окнах обладает преимуществом по сравнению с ECM. Поэтому, в совокупности с результатами из Таблиц 1.17 и 1.18, для проведения задачи хеджирования рекомендуется использовать модель регрессии в скользящих окнах, дифференцированную по междневным и внутридневным периодам.

#### 1.5.1.5 Некоторые выводы

В данной работе выявлены определенные стилизованные факты о внутридневных и междневных распределениях доходности. Показано, что средняя междневная доходность значимо больше средней внутридневной. Обратная ситуация наблюдается с дисперсией доходности: дисперсия междневной доходности значимо меньше

дисперсии внутридневной. Данные результаты дополняют работу [15], где рассматривались более длинные временные промежутки.

Используя подход регрессии в скользящих окнах, была проверена гипотеза о возможном преимуществе учета неоднородности распределений доходности в задаче хеджирования. Показано, что разделение доходностей ведет к более эффективным исходам. В дальнейшем результаты данной модели хеджирования были проверены на однородных данных, где была показана достаточная устойчивость результатов, за исключением одного индекса (Nikkei 225), для которого предложенный подход разбиения доходностей не дал увеличения эффективности (в терминах риска и доходности). Затем регрессия в окнах сравнивалась с моделью коррекции ошибкой, где она показывала лучшие результаты по сравнению с моделью ECM (в терминах средней доходности и стандартного отклонения). Изучение меж- и внутридневных распределений было проведено впервые. Более того, метод разбиения доходности, использованный в текущей работе, указывает на недостатки классических подходов к хеджированию, описанных в [106, 135, 144], где не учитывалась неоднородность распределений доходности междневного и внутридневного периодов.

Таблица 1.18 – Сравнение модели ECM и регрессии в окнах

Индекс	Формула №	Dax	Cac40	Hang – Seng	Nikkei 225
<b>Без учета неоднородности</b>					
$\bar{R}^*_{105}$	(1.59)	1,04	-0,61	1,96	1,79
$T\sigma_R$	(1.60)	1,16%	-0,73%	-0,06%	-0,94%
<b>С учетом неоднородности</b>					
$\bar{R}^*_{105}$	(1.59)	0,25	0,98	2,86	-33,02
$T\sigma_R$	(1.60)	88,73%	84,01%	18,89%	81,34%

В качестве базисных значений были выбраны значения по регрессии в скользящих окнах.

## 1.5.2 Моделирование последствий регулирования российских национальных системно значимых банков

В 2011 году Базельским комитетом были введены предложения по дополнительному регулированию системно значимых банков. Цель данных предложений заключается в том, чтобы уменьшить вероятность банкротства системно значимых банков путем увеличения их собственного капитала. В соответствие с Базель III предлагается на основе индикаторного метода разбить банки на 6 групп, в 5 из которых попадут банки, выявленные как системно значимые. Для этих пяти групп предлагается ввести дополнительные требования к минимальному уровню достаточности капитала.

Под руководством Базельского комитета было проведено исследование, которое изучало возможное влияние введения новых требований к капиталу на рост представительной национальной экономики. В результате было выявлено, что введение дополнительных требований к капиталу системно значимых банков повлечет за собой издержки в виде сокращения объема кредитования и замедления экономического роста.

Однако не было установлено то, от каких факторов будет зависеть величина издержек внедрения регулирования системно значимых банков, а так же то, как можно на эти издержки повлиять. В виду того, что введение регулирования системно значимых банков планируется и в России, анализ последствий регулирования для России является особенно важным.

В данном пункте отчета представлены результаты по изучению влияния регулирования системно значимых банков на экономику, а так же выявление факторов влияющих на результат регулирования. Для реализации цели исследования была построена теоретическая игровая модель, которая описывает взаимодействие большого числа банков на олигополистическом рынке кредитования. На основе данной модели, анализируются возможные стратегии банков в ответ на введение регулирования системно значимых банков, а так же параметры, влияющие на выбор стратегий банками.

Другой задачей исследования был анализ последствий регулирования системно значимых банков в России. Для этого была проведена оценка построенной модели на реальных российских данных. Было исследовано, какие параметры и каким образом влияют на уровень кредитования и накопления капитала банками в России после введения регулирования.

В подпункте 1.5.2.1 представлен обзор литературы по тематике исследования, а в подпункте 1.5.2.2 описывается сама модель. Оценка построенной модели на российских данных представлена в подпункте 1.5.2.3, а оценка чувствительности модели к параметрам в подпункте 1.5.2.4. Выводы и направления дальнейшего исследования приводятся подпункте 1.5.2.5.

### 1.5.2.1 Обзор литературы

В данном подпункте дан краткий обзор существующей литературы по регулированию системно значимых банков и анализу влияния данного регулирования на экономику.

Для оценки влияния регулирования системно значимых банков, необходимо в первую очередь рассмотреть основы регулирования, предложенные Базельским комитетом. Для этого рассмотрим консультационный документ [70] в котором подробно изложены основные цели, способы и последствия введения регулирования системно значимых банков.

Целью установленной Базельским комитетом политики является уменьшение вероятности банкротства системно значимых банков, а так же уменьшение влияния данного банкротства на экономику. Данные цели достигаются путем выявления системно значимых банков и установления для них более высоких требований к достаточности капитала.

Для выявления системно значимых банков, комитетом было предложено использовать индикаторный подход, так как он позволяет оценить множество факторов, связанных с системной значимостью.

Рассмотрим способ построения индикатора. Он состоит из взвешенной суммы отдельных индикаторов, которые разбиты по пяти группам: размер, взаимозависимость, заменяемость, международной деятельность и степень сложности организации. Каждой группе соответствует одинаковый вес – 20%. Для каждого банка значения отдельных индикаторов строятся как отношения значения показателя для этого банка к суммарному значению показателя в выборке. То есть индикатор является относительной величиной.

На основе вычисленных значений индикаторов, комитет предлагает разбить выявленные системно значимые банки на четыре равные группы, для каждой из которой установлен свой уровень минимальной добавки к коэффициенту достаточности капитала. При этом предлагается так же создать отдельную, пустую пятую группу с более высоким требованием достаточности капитала, для того чтобы снизить стимулы банков к увеличению их системной значимости (см. Таблицу 1.19).

Таблицу 1.19 – Группы банков с установленными уровнями минимальной добавки к коэффициенту достаточности капитала

Группа	Пороговое значение	Минимальная добавка к коэффициенту достаточности капитала
5	D	3.5%
4	C–D	2.5%
3	B–C	2%
2	A–B	1.5%
1	Пороговое значение – A	1%

Оценка по каждому банку будет обновляться ежегодно, с целью стимулирования банков к уменьшению их системной значимости. Пороговые значения будут пересматриваться раз в 3–5 лет, чтобы учесть возможные нововведения и изменения в банковском секторе.

Согласно отчету макроэкономической оценочной группы [69] введение регулирования системно значимых банков имеет определенные издержки для экономики. Эти издержки возникают в виду того, что системно значимым банкам приходится уменьшать объемы выданных кредитов и увеличивать ставки процента, чтобы удовлетворять повышенным требованиям к капиталу. Согласно эмпирическому исследованию банковского сектора, увеличение требований к капиталу 30 потенциальных

системно значимых банков на 1% приведет к снижению роста ВВП на 0,06%. Однако вскоре после введения регулирования тренд роста ВВП возвращается на предсказанную ранее траекторию. Так же было определено, что оптимальный уровень надбавки к капиталу системно значимых банков составляет 2%.

В [148] приводится анализ индикаторного подхода к выявлению системно значимых банков. Авторы выделяют основной особенностью данного подхода слишком большое значение размера банка, так как все входящие в индикатор переменные связаны с размером. Авторами статьи разрабатывается теоретическая модель, которая описывает стратегическое поведение банков в условиях введения дополнительных требований к капиталу системно значимых банков. Банковская система в модели представляется двумя банками, их взаимодействие моделируется с помощью теории игр, в рамках модели Курно. Исходя из результатов модели, авторы статьи пришли к выводу о том, что регулирование системно значимых банков приводит к снижению уровня кредитования в экономике и к повышению процентной ставки по заемным средствам. Отсюда, авторы заключают, что регулирование достигает своей цели и уменьшает уровень риска в банковской системе.

Однако моделирование банковского сектора в виде только двух банков накладывает определенные ограничения на анализ последствий регулирования. Поэтому рассмотрение взаимодействия большего числа банков является важным шагом в развитии модельного подхода к анализу данной проблемы.

Регулирование российских системно значимых банков почти не исследовано. В [25] рассматривается системная значимость участников денежного рынка в России. В связи со спецификой деятельности банков в этом секторе, авторы статьи определяют системный риск как распространение проблем ликвидности, вызванное дефолтом банка. Тогда системная значимость определяется не комплексностью, как в [70], а многочисленностью связей на рынке, размерами позиций по отдельным инструментам и финансовой устойчивостью контрагентов. Исходя из этого, авторы статьи сделали вывод, что к системно значимым банкам на денежном рынке не применимы макропруденциальные меры, так как выявленные факторы системной значимости подвержены быстрым изменениям во времени. Но к таким банкам необходимо

димо применять более тщательные процедуры надзора и контроля. Авторы статьи используют модельный подход для определения системно значимых банков в денежном секторе. Данный подход основывается на методе анализа сетевых взаимосвязей на межбанковском кредитном рынке, позволяющем охарактеризовать негативный эффект домино в случае невыполнения одним или несколькими контрагентами своих обязательств. Данный метод позволяет определить убытки от не возврата всех кредитов в случае дефолта определенного банка. Системная значимость в этом случае определяется по признаку наибольших потерь для банковского сектора.

На основе теоретической модели исследовалось влияние регулирования системно значимых банков на экономику. Модель анализирует стратегическое взаимодействие большого числа банков с помощью теории игр, а именно модели Курно. Таким образом, построенная модель является развитием теоретического подхода, представленного в [148]. Поэтому ожидалось, что построенная модель покажет, что введение регулирования системно значимых банков приведет к снижению объемов кредитования в экономике. Однако, учитывая тот факт, что модель описывает взаимодействие большого числа банков, результат регулирования может оказаться более сложным, чем предсказывалось в статье.

Кроме того, оценивалось влияния регулирования и расчет оптимальных параметров регулирования для России. Ожидалось, что результаты будут согласованы с расчетами, приведенными в [69].

### 1.5.2.2 Теоретическая модель

Для исследования влияния регулирования системно значимых банков на российскую экономику, строится модель, которая описывает стратегическое поведение банков после введения регулирования. В данной модели в целях упрощения рассматриваются две группы банков разных размеров. Так как рынок предложения кредитов является олигополистическим, взаимодействие между банками описывается с помощью модели Курно.

Системная значимость определяется исходя из относительного размера выданных кредитов. Данное упрощение исходит из того, что в индикаторном методе все переменные связаны с размером, и являются относительными величинами.

#### A. Предпосылки модели

Существует две различные группы банков. Первая группа благодаря своей репутации и особому положению на рынке имеет более дешевый доступ к денежным ресурсам, иначе меньшие предельные издержки, чем вторая группа. При этом реалистично предположить, что численность первой группы значительно меньше, чем второй, так как привилегированное положение обычно получает меньшинство банков. За  $n_1, c_1$  обозначим численность и предельные издержки первой группы, за  $n_2, c_2$  – численность и издержки второй. Тогда  $n_1 < n_2; c_1 < c_2$ . Банк может привлекать ресурсы путем внешнего и внутреннего заимствования, тогда стоимость привлечения ресурсов можно представить как  $cA = r_dF + r_kK$ , где  $F, K$  – объемы внешнего и внутреннего заимствования соответственно,  $r_d$  – ставка процента по депозитам,  $r_k$  – требуемая доходность на собственный капитал. Предполагается, что  $r_k > r_d$ .

Рынок акционерного капитала является совершенно эластичным. То есть банк может привлечь любое необходимое ему количество капитала.

Предполагается, что внутри каждой из групп издержки банков равны.

Банки конкурируют по Курно путем выбора объемов выдаваемых кредитов.

#### Б. Банки рациональны и знают модель.

Спрос на кредиты имеет линейный вид и представлен в виде  $r_m = a - bL$ , где  $r_m$  – ставка процента по кредитам,  $L$  – суммарный объем выданных кредитов.

Банки конкурируют в течение бесконечного числа периодов. Дисконтирующий множитель одинаков для всех банков и обозначен за  $\rho$ .

В периоде  $t=1$  регулятор объявляет, что, начиная с периода  $t=2$ , он вводит дополнительные требования к капиталу для системно значимых банков. В момент времени  $t$  системно значимыми считаются группа банков, для которых выполняется

условие:  $\frac{l_{it-1}}{L_{t-1}} > \Theta$ , где  $l_{it-1}$  – объем кредитов, выданный банком  $i$  в периоде  $t-1$ ,  $L_{t-1}$  – совокупный объем кредитов, выданных в период  $t-1$ ,  $\Theta$  – экзогенный параметр, который задается регулятором.

Регулятор назначает такое  $\Theta$ , что выполняется условие:  $\frac{l_{2t=0}}{L_{t=0}} < \theta < \frac{l_{1t=0}}{L_{t=0}}$ , если  $l_1(t=0) > l_2(t=0)$  и  $\frac{l_{1t=0}}{L_{t=0}} < \theta < \frac{l_{2t=0}}{L_{t=0}}$ , если  $l_1(t=0) < l_2(t=0)$ .

Статус банка определяется один раз и до  $t \rightarrow +\infty$ .

## В. Влияние регулирования

Дополнительные требования к капиталу системно значимых банков означают рост величины

$$CAR = \frac{K}{A}, \quad (1.61)$$

$$cA = r_d F + r_k, \quad (1.62)$$

$$c = r_d + (r_k - r_d)CAR, \quad (1.63)$$

$$\frac{dc}{dCAR} = r_k - r_d > 0. \quad (1.64)$$

Таким образом, дополнительные требования к капиталу увеличивают издержки банков

$$dc = (r_k - r_d)dCAR = \delta. \quad (1.65)$$

Введение дополнительных требований к капиталу системно значимых банков увеличивает их издержки на величину  $\delta$ , тогда

$$c_1^{gs} = c_1 + \delta. \quad (1.66)$$

## Г. Первоначальное равновесие

Рассмотрим равновесие в банковском секторе до появления регулятора. Обозначим за  $L$  – совокупный объем выданных кредитов, за  $l_i$  – кредиты, выданные  $i$ -ым

банком, за  $L_{-i}$  – совокупный объем кредитов, выданный всеми банками, кроме банка  $i$ .

Банк, выбирая объем кредитов в каждом периоде, максимизирует свою прибыль:

$$\pi_i = (a - b(L_{-i} + l_i) - c_i) l_i \rightarrow \max_{l_i},$$

где

$$l_i = \frac{a - c_i}{b} - L, \quad (1.67)$$

$$L = \frac{\sum_{i=1}^N (a - c_i)}{b(N+1)} = \frac{n_1(a - c_1) + n_2(a - c_2)}{b(n_1 + n_2 + 1)}, \quad (1.68)$$

$$r_m = \frac{a + c_1 n_1 + c_2 n_2}{n_1 + n_2 + 1}. \quad (1.69)$$

Тогда в равновесии:

$$l_1 = \frac{a - c_1}{b} - \frac{n_1(a - c_1) + n_2(a - c_2)}{b(n_1 + n_2 + 1)} = \frac{a + n_2(c_2 - c_1) - c_1}{b(n_1 + n_2 + 1)}, \quad (1.71)$$

$$l_2 = \frac{a - c_2}{b} - \frac{n_1(a - c_1) + n_2(a - c_2)}{b(n_1 + n_2 + 1)} = \frac{a - n_1(c_2 - c_1) - c_2}{b(n_1 + n_2 + 1)}. \quad (1.70)$$

Вывод:  $l_1 > l_2$ , где  $l_1$  – объем кредитов, выдаваемый банком из первой группы,  $l_2$  – объем кредитов, выдаваемый банком из второй группы.

#### Д. Стратегии банков

У банков из первой группы после введения дополнительных требований для системно значимых банков может быть две стратегии: увеличить свой собственный капитал, чтобы удовлетворять новым требованиям, или снизить объем выдаваемых кредитов, чтобы покинуть категорию системно значимых.

Первая стратегия заключается в том, что в периоде  $t=1$  банк из первой группы не меняет объем выдаваемых кредитов, тогда, начиная с периода  $t=2$ , он начинает считаться системно значимым и несет более высокие издержки.

Вторая стратегия заключается в том, что в периоде  $t=1$  банк из первой группы уменьшает объем выдаваемых им кредитов ровно настолько, чтобы в следующих периодах не считаться системно значимым.

Банк выберет ту стратегию, используя которую он получит большую сумму дисконтированных будущих прибылей.

Банки первой группы используют стратегию 1. Тогда приведенная стоимость их будущих прибылей равна

$$S_1 = (a - bL(1) - c_1)l_1(1) + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(a - bL(t) - c_1 - \delta)l_1(t)}{(1+\rho)^t},$$

$$S_1 = \frac{(a + n_2(c_2 - c_1) - c_1)^2}{b(n_1 + n_2 + 1)^2} + \frac{(a + n_2(c_2 - c_1 - \delta) - c_1 - \delta)^2}{b(n_1 + n_2 + 1)^2 \rho}. \quad (1.72)$$

Банки из первой группы используют стратегию 2. Тогда приведенная стоимость их будущих прибылей равна

$$S_2 = \left( a - \frac{(a - c_2)n_2}{(1 - \theta n_1 + n_2)} - c_1 \right) \frac{\theta(a - c_2)n_2}{b(1 - \theta n_1 + n_2)} \frac{1 + \rho}{\rho}. \quad (1.73)$$

Банк второй группы выберет стратегию 2, если:

$$S_2 - S_1 = \left( a - \frac{(a - c_2)n_2}{(1 - \theta n_1 + n_2)} - c_1 \right) \frac{\theta(a - c_2)n_2}{b(1 - \theta n_1 + n_2)} \frac{1 + \rho}{\rho} - \frac{(a + n_2(c_2 - c_1) - c_1)^2}{b(n_1 + n_2 + 1)^2} -$$

$$- \frac{(a + n_2(c_2 - c_1 - \delta) - c_1 - \delta)^2}{b(n_1 + n_2 + 1)^2 \rho} > 0. \quad (1.74)$$

Вывод 1: с увеличением параметра  $\theta$ , который обозначает границу группы системно значимых банков, увеличиваются стимулы системно значимых банков по выбору стратегии занижения объема выдаваемых кредитов.

Вывод 2: с увеличением параметра  $\delta$ , который отражает издержки системно значимых банков от дополнительных требований к капиталу, увеличиваются стимулы системно значимых банков по выбору стратегии занижения объема выдаваемых кредитов.

### 1.5.2.3 Оценка модели на Российских данных

Определим параметры модели на основе реальных данных для России. Учитывая тот факт, что в модели рассматривается взаимодействие банков на основе модели Курно, включение в модель крайне мелких банков будет искажать ее результаты, ввиду малой вероятности их воздействия на рыночные параметры равновесия. Поэтому в выборку были включены 220 банков, суммарная величина активов которых составляет 95% от совокупной величины активов банков в экономике. Данные банки были предварительно разделены на две группы: системно значимые (первые 10 банков по величине активов) и остальные. Для данных банков были рассчитаны процентные расходы ( $r_d$ ) как отношение процентных расходов за год к совокупной величине привлеченных средств на текущую дату. Так же на основе статьи [24] были взяты значения ROE для крупных и догоняющих банков за основу расчета издержек внутреннего финансирования ( $r_k$ ). Получаем следующие параметры:

$n_1$	$n_2$	$r_{d1}$	$r_{d2}$	$r_{k1}$	$r_{k2}$
10	210	5,87	7,6	24	20

На основе работы [44] уравнения спроса на кредиты было специфицировано следующим образом

$$L_d = \alpha_d + \beta_{1d}r + \beta_{2d}Y + \beta_{3d}\pi + \varepsilon_d, \quad (1.75)$$

где  $L$  – объем кредитов и прочих размещенных средств (в миллионах руб.),  $r$  – средневзвешенная ставка процента по кредитам,  $Y$  – реальный ВВП (в миллиардах руб.),  $\pi$  – дефлятор ВВП. Источник данных – [www.gks.ru](http://www.gks.ru). Для построения регрессии использовались ежеквартальные данные за период 2004 – 2012 гг.

В результате получаем следующее уравнение спроса на кредиты:

$$r = 62,34 + 0,002Y - 0,61\pi - 0,5L. \quad (1.76)$$

Параметры для конца 2012 года:  $\pi = 107,52$ ,  $Y = 11717$ .

Получаем следующее уравнение спроса на кредиты:

$$r = 22 - 0,5L,$$

где  $L$  – объем кредитов в триллионах рублей.

Таким образом, получаем следующие параметры:  $a = 22$ ,  $b = 0,5$ .

Исходя из стандартов на 2013 год требования к капиталу российских банков составляют минимум 10%. То есть для всех банков  $CAR = 0,1$ . Так же предполагается, что дисконт фактор  $\rho$  равен 10%.

#### 1.5.2.4 Оценка чувствительности модели к параметрам

В данном подпункте, на основе рассчитанных параметров модели, была проведена ее калибровка.

##### 1.5.2.4.1 Изменение значения границы $\theta$

Зафиксируем значение  $CAR$  для системно значимых банков на уровне 12%, то есть  $\Delta CAR = 0,02$ . Тогда  $\delta = (r_{k1} - r_{d1})\Delta CAR = 0,36$ . Далее была выведена зависимость совокупного объема выданных кредитов от параметра  $\theta$ , начиная с периода  $t=2$ .

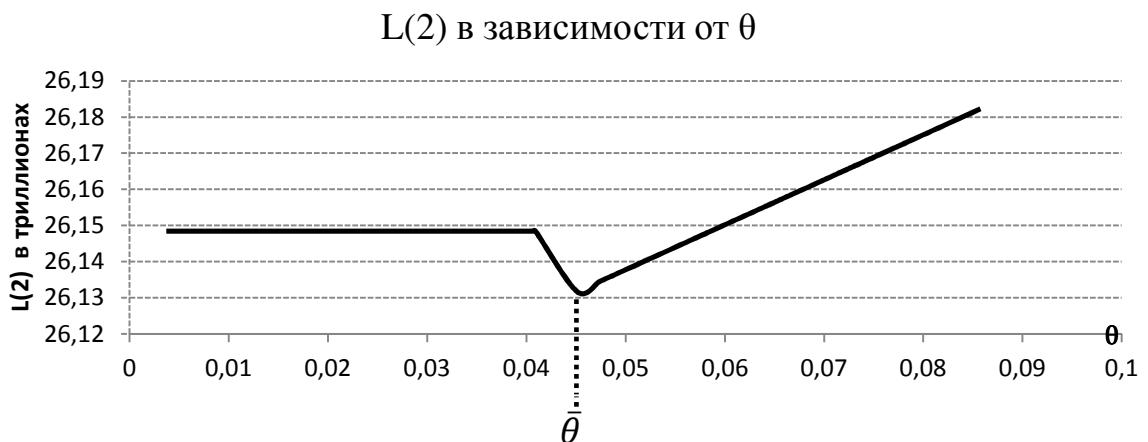


Рисунок 1.35 – Влияние изменения границы группы на совокупный объем кредитования

## L(2) для банков группы 1 в зависимости от $\theta$

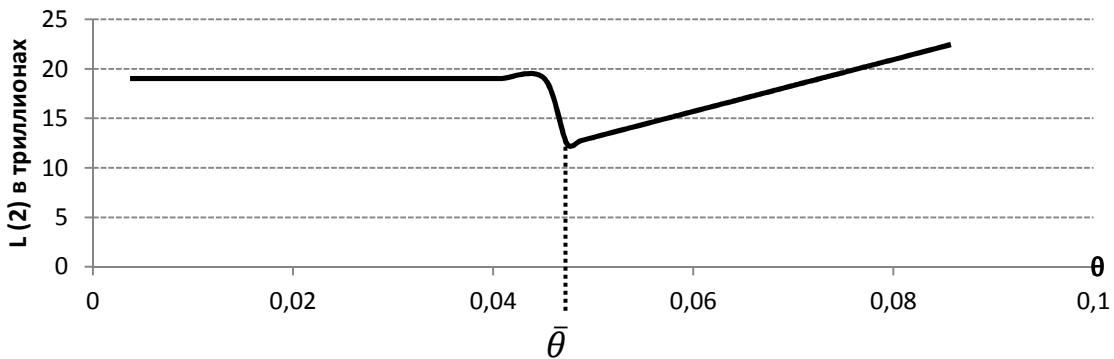


Рисунок 1.36 – Влияние изменения границы группы на объем кредитования системно значимых банков

На рисунках 1.35 и 1.36 видно, что существует определенное значение  $\bar{\theta} = 0,045$ , такое, что при  $\theta > \bar{\theta}$  банки с меньшими издержками (из первой группы) выбирают стратегию занижения объема выдаваемых кредитов с целью перехода в группу не системно значимых банков.  $\bar{\theta} = 0,045$  означает, что регулятор определяет системно значимыми те банки, доля кредитования которых в совокупной величине выданных кредитов составляет более 4.5%. При  $\theta < \bar{\theta}$  банки с меньшими издержками остаются в группе системно значимых банков. В точке  $\theta = \bar{\theta}$ , совокупный объем выданных кредитов сокращается, но с дальнейшим ростом  $\theta$ , объем кредитования растет и достигает максимального значения при наибольшем приближении  $\theta$  к величине  $\frac{l_{1t=0}}{L_{t=0}}$ .

Данная зависимость объясняется тем, что чем меньше значение параметра  $\theta$ , тем на большую сумму банку из первой группы необходимо снизить объем выдаваемых кредитов, чтобы перестать числиться системно значимым. Поэтому чем больше  $\theta$ , тем выгоднее системно значимому банку выбрать стратегию уменьшения размера, что и происходит при  $\theta > \bar{\theta}$ .

Тот факт, что при достаточно больших значениях  $\theta$ , совокупный объем кредитования достигает более высоких значений, чем при  $\theta < \bar{\theta}$  объясняется тем, что банкам необходимо снизить объем выдаваемых кредитов на совсем небольшую величину, чтобы перестать считаться системно значимыми, поэтому их издержки от занижения объема выдаваемых кредитов невысоки.

#### 1.5.2.4.2 Изменение величины дополнительных требований к капиталу

Величина дополнительных требований к капиталу положительно влияет на величину дополнительных издержек системно значимых банков:  $\delta = (r_k - r_d)\Delta CAR$ .

Зафиксировав  $\theta=0,04$ , была выведена зависимость совокупного объема кредитов в экономике, начиная со второго периода, от параметра  $\Delta CAR$ .

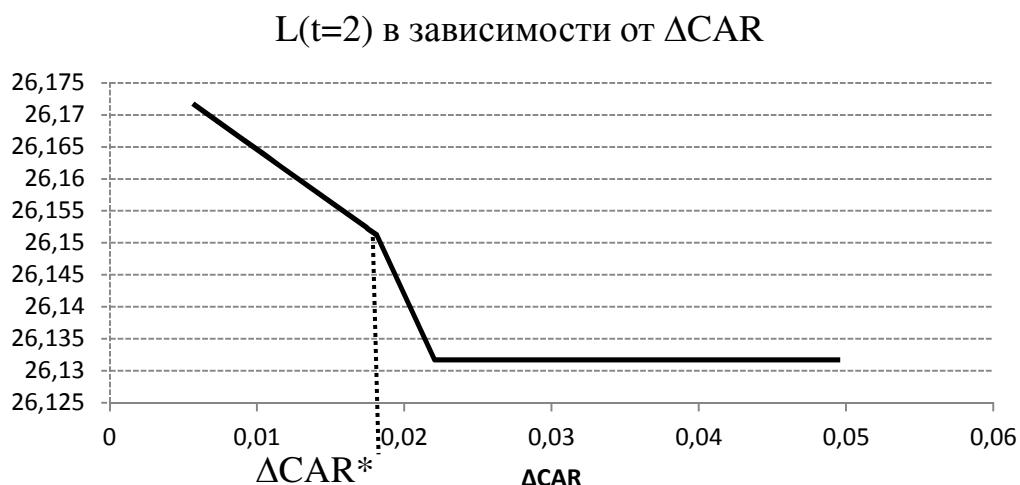


Рисунок 1.27 – Влияние изменения надбавки к капиталу на объемы кредитования

При этом наблюдается следующая зависимость капитализации банковской системы от параметра  $\Delta CAR$ :

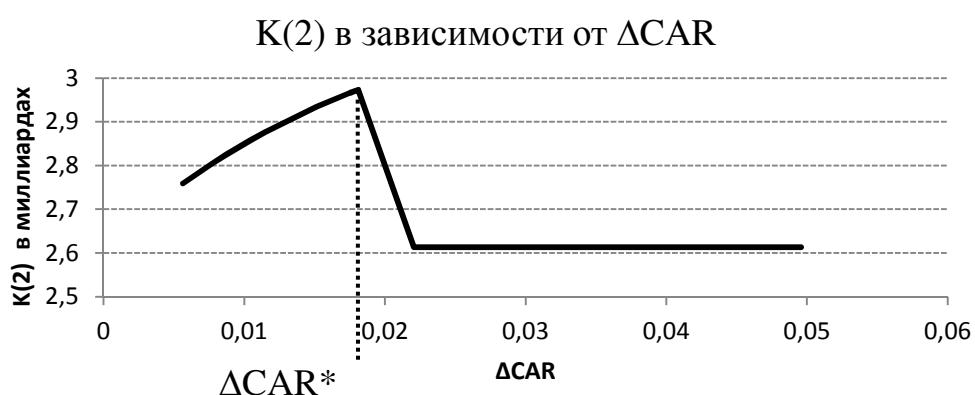


Рисунок 1.38 – Влияние изменения надбавки к капиталу на уровень капитала в банковской системе

Таким образом, увеличение требований к капиталу системно значимых банков приводит к росту капитализации банковской системы, однако одновременно умень-

шает объемы кредитования в экономике. Но, при достижении определенной величины требований к капиталу ( $\Delta CAR^*=2,2\%$ ), как капитализация банков, так и объем выданных ими кредитов, резко снижаются. Это объясняется тем, что при данных значениях  $\Delta CAR > \Delta CAR^*$ , системно значимые банки выбирают стратегию уменьшения размера, вместо стратегии увеличения собственного капитала.

Рассмотрим влияние изменения величины дополнительных требований к капиталу системным банкам на уровень достаточности их капитала:

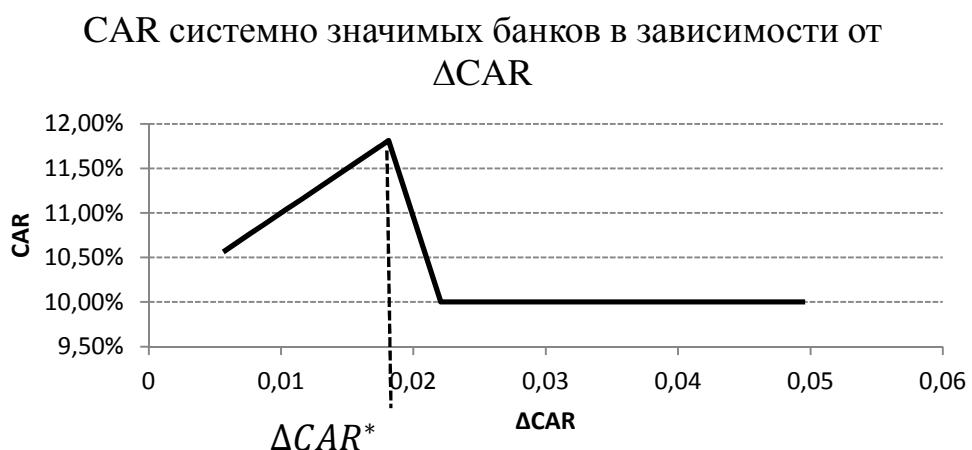


Рисунок 1.39 – Влияние изменения надбавки к капиталу на достаточность капитала системных банков

Из рисунка 1.39 видно, что первоначально рост надбавки к капиталу приводит к росту его достаточности у системно значимых банков. Однако когда надбавка превышает пороговое значение  $\Delta CAR^*$ , достаточность капитала снижается и фиксируется на первоначальном уровне 10%.

Таким образом, размер надбавки равный 2.2% является оптимальным с точки зрения достаточности капитала системно значимых банков и капитализации банковской системы.

#### 1.5.2.4.3 Влияние регулирования

Здесь будет рассмотрено, как введение регулирования системно значимых банков повлияет на основные характеристики развития банковского сектора: на динамику объемов кредитования, на динамику капитала банков и на цикличность кредитования.

## Объемы кредитования.

Рассмотрим влияние регулирования на совокупный объем кредитования в России. В зависимости от того, какую стратегию выберут системно значимые банки, влияние будет различным.

Общим следствием регулирования является снижение объема выданных кредитов и увеличение ставки процента. Однако в случае, если системно значимые банки выбирают стратегию уменьшения размера вместо увеличения капитала, снижение совокупного объема кредитования является более значительным.

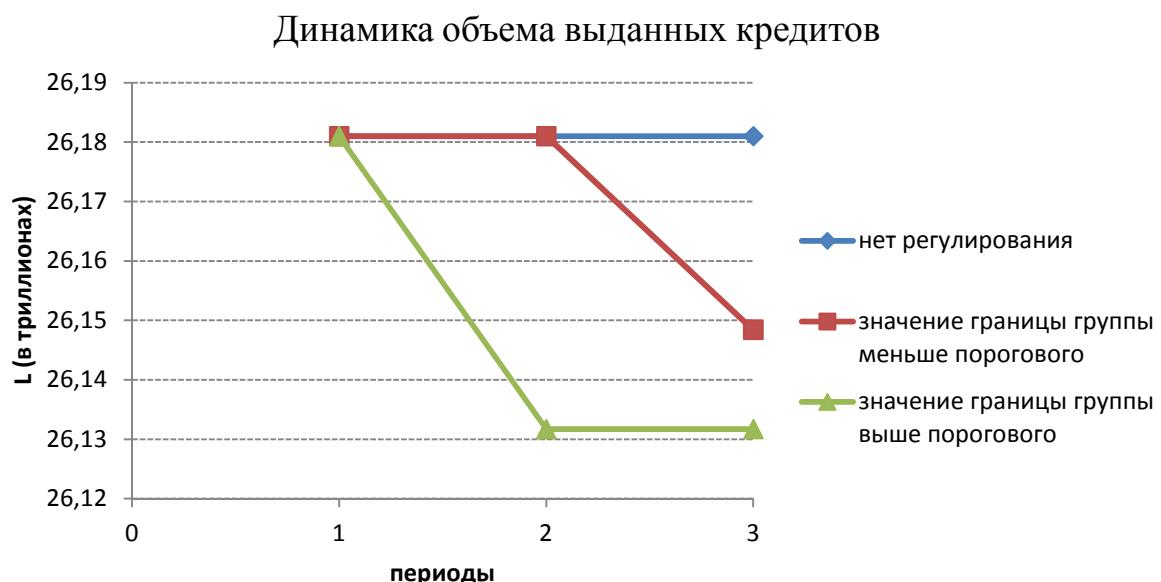


Рисунок 1.40 – Влияние регулирования на динамику объемов кредитования

## Капитализация.

Теперь рассмотрим влияние регулирования на уровень капитализации банковской системы



Рисунок 1.41 – Влияние регулирования на динамику капитала в банковской системе

Из рисунка 1.40 видно, что регулирование системно значимых банков может оказаться двумя разными способами на уровне капитала в банковской системе. При надбавки к капиталу, не превышающей, порогового значения (2,2%) капитал в банковской системе возрастает по сравнению с ситуацией отсутствия регулирования. Однако если надбавка к капиталу системно значимым банкам превышает пороговое значение, результатом регулирования является, наоборот, снижение капитала в банковской системе.

Рассмотрим, как изменяется уровень достаточности капитала системно значимых банков в результате регулирования:

Эффект цикла в спросе на кредит.

Рассмотрим, как влияет регулирование на изменение объемов кредитования в результате цикличности спроса на кредит. Для этого зафиксируем  $\delta = 0,36$ ,  $\Theta=0,04$  и смоделируем цикл, как изменение параметра  $a$  в спросе на кредиты.

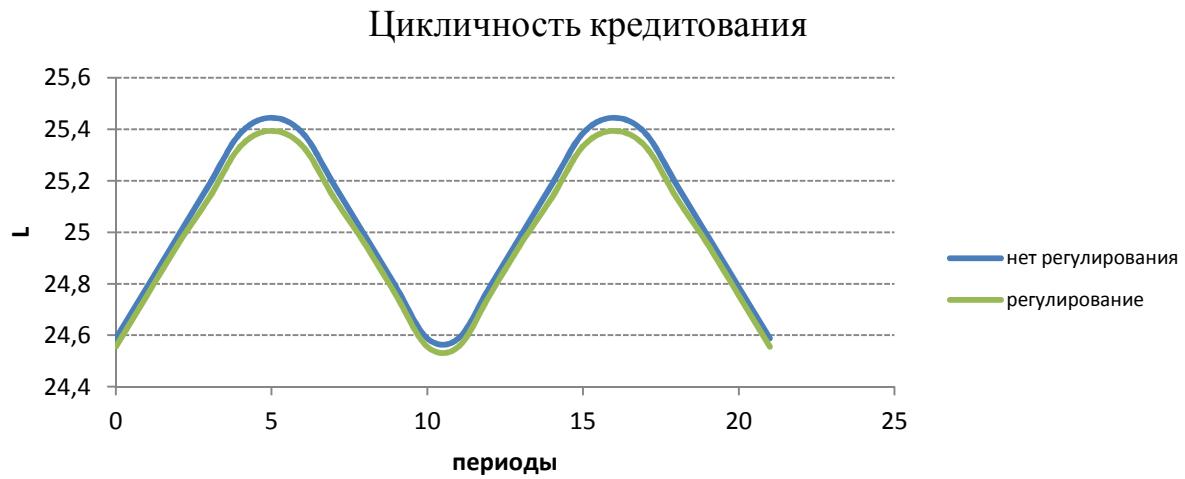


Рисунок 1.42 – Влияние регулирования на цикличность кредитования

Из рисунка 1.42 видно, что регулирование системно значимых банков является контрциклическим: на фазе пика цикла регулирование снижает объем кредитования в экономике сильнее, чем на фазе спада цикла.

Для того чтобы рассмотреть подробнее влияние регулирования на цикличность, исследуем как в зависимости от параметра  $a$  изменяется разница между уровнем кредитования в отсутствие регулирования и уровнем кредитования после регулирования:  $L_{nonreg}(2) - L_{reg}(2)$ .

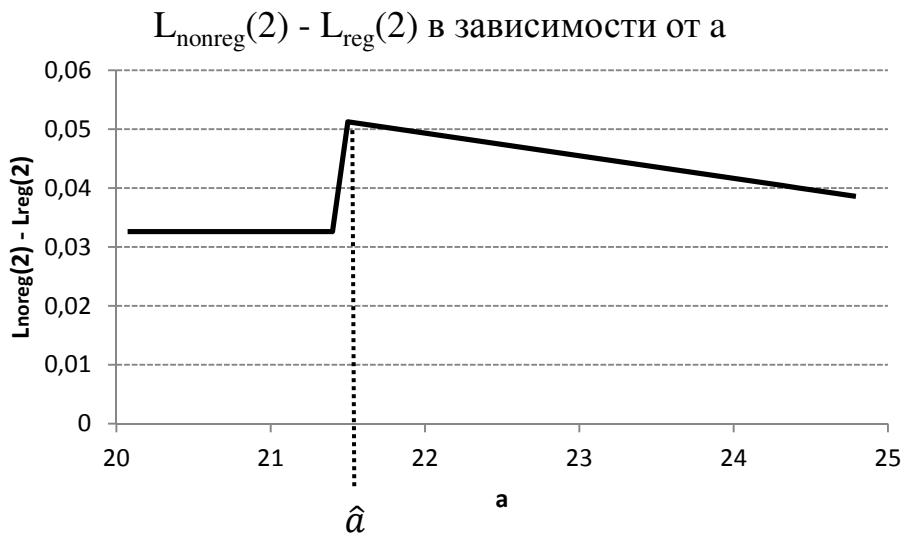


Рисунок 1.43 – Влияние параметра  $a$  на уровень кредитования в экономике

Из рисунка 1.43 видно, первоначально, с ростом спроса на кредиты (рост  $a$ )  $L_{nonreg}(2) - L_{reg}(2) = const$ , что означает, что регулирование не влияет на цик-

личность кредитования. Однако, при значении  $a = \hat{a}$ ,  $L_{nonreg}(2) - L_{reg}(2)$  возрастает, то есть усиливается контрцикличность объемов кредитования. С дальнейшим ростом спроса на кредиты дополнительный эффект контрцикличности постепенно снижается. Это связано с тем, что, при  $a \geq \hat{a}$  системно значимые банки выбирают стратегию уменьшения объемов кредитования, вместо увеличения капитала, что приводит к более сильному снижению объемов кредитования.

#### 1.5.2.5 Выводы и направления дальнейшего исследования

Регулирование системно значимых банков было создано с целью улучшения стабильности банковской системы. Данная цель должна достигаться путем увеличения достаточности капитала системно значимых банков. Однако на основе построенной в данной работе модели можно сделать вывод, что регулирование не всегда может достичь поставленной цели. Системно значимые банки могут придерживаться стратегии уменьшения размера вместо наращивания капитала, чтобы покинуть категорию системной значимости и избежать более высоких издержек. В этом случае регулирование приведет только к снижению объемов кредитования и не изменит достаточности капитала системных банков.

На выбор стратегии банком влияют как параметры, задаваемые регулятором: величина надбавки к капиталу и граница группы системных банков; так и экзогенные параметры: стоимость капитала в экономике и величина спроса на кредиты. На основе построенный модели, можно сделать вывод, что при достаточно высоких значениях границы системных банков и надбавки к капиталу, системно значимым банкам будет выгодно выбирать стратегию снижения объемов кредитования.

Симуляции модели на российских данных показали, что результатами введения регулирования является снижение объемов кредитования на 0.1 базисных пункта. Таким образом, подтверждаются результаты предыдущих исследований о том, что регулирование системно значимых банков негативно сказывается на уровне кредитования в экономике. Однако если системные банки выбирают стратегию уменьше-

ния размера, то происходит более значительное снижение объемов кредитования: на 0.2 базисных пункта.

Было выявлено, что рост дополнительных требований к капиталу российских системно значимых банков выше порогового значения (2,2%) приведет, наоборот, к снижению достаточности их капитала и к снижению капитализации банковской системы. Таким образом, надбавка к капиталу в 2,2% является оптимальной с точки зрения увеличения достаточности капитала системно значимых банков. Данный результат объясняется тем, что при высоких дополнительных требованиях к капиталу, банкам становится выгодно уменьшить свой размер и перестать числиться системно значимыми. При этом полученный результат согласуется с результатами исследования [69], которые рекомендуют введение надбавки к капиталу, равной двум процентам.

Так же было выявлено, что чем ближе значение границы группы системно значимых банков к наблюдаемым значениям их индикаторов, тем более вероятно, что банки выберут стратегию уменьшения размера, вместо увеличения капитала. Значит, определяя группу системно значимых банков, регулятору важно выделить наиболее разнородную с оставшимися банками группу. Тогда он сможет создать низкие стимулы системно значимым банкам по выбору стратегии уменьшения размера.

Анализ влияния регулирования на цикличность кредитования в России, показал, что регулирование системно значимых банков имеет контрциклический эффект, так как рост спроса на кредиты повышает стимулы системно значимых банков к выбору стратегии снижения кредитов. В то же время данную цель преследовало введение иного инструмента, а именно, контрциклического буфера капитала.

Таким образом, подтвердились гипотезы исследования о том, что регулирование системно значимых банков негативно влияет на объемы кредитования в экономике. При этом были определены факторы, которые определяют степень негативного влияния: границы групп системно значимых банков, надбавка к капиталу системным банкам и стоимость капитала в экономике. Были выдвинуты предложения по определению оптимальных параметров регулирования в России, которые согласуются с предложениями, изложенными в [69]. Важным нововведением является то,

что определяя границы групп банков по показателю системно значимости, регулятору необходимо выделять наиболее разнородные группы банков. Так же важным выводом является то, что введение высоких дополнительных требований к капиталу в странах с высокой стоимостью капитала в экономике, может привести, наоборот, к снижению достаточности капитала системно значимых банков.

Однако в модели был принят ряд предпосылок, которые влияют на реалистичность результатов модели. Так было принято, что внутри групп банки однородны по издержкам, и, следовательно, по размеру, что в реальности не выполняется. При нарушении данной предпосылки может оказаться, что системно значимые банки будут придерживаться разных стратегий: часть банков останется в категории системно значимых, а часть перейдет в категорию обычных банков. Так же была введена предпосылка о том, что регулятор разделяет банки только на две группы. В предложениях Базельского комитета рекомендуется разделять банки на пять групп, что может изменить стратегии системно значимых банков. Так они будут выбирать не только между тем, чтобы остаться в категории системно значимых или выйти из нее, но и между тем, чтобы перейти в более низкую категорию системной значимости. Поэтому для получения более полных данных о последствиях регулирования необходимо дальнейшее развитие исследования, с целью изучения разнородных банков и различных категорий системной значимости.

Результаты исследований этого подраздела нашли свое отражение в публикациях [21, 31]:

1. Сироткин И.Н., Пеникас Г.И. Моделирование оптимального хеджирующего соотношения с учетом междневного и внутридневного рисков торговых позиций// В кн.: Первые чтения памяти профессора Б.Л. Овсиевича «Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии». СПб.: Нестор–История, 2013, с.191–193.
2. Комиссарова К.А., Пеникас Г.И. Моделирование последствий регулирования российских национальных системно значимых банков// Управление финансовыми рисками, 4, 2013, с.256–273.

## 1.6 Применение методов теории коллективного выбора для построения ранжирований научных журналов

В этом подразделе приведены результаты применения методов теории коллективного выбора для построения ранжирований в различных прикладных задачах, в частности, научных журналов.

В настоящее время для объективной оценки качества научных журналов, количества которых непрерывно растет, используются различные библиометрические показатели, такие как импакт-фактор, индекс оперативности, индексы SNIP, SJR и другие. На основании расчета значений этих индексов строятся рейтинги, отражающие сравнительную значимость журнала как средства внутринаучной коммуникации. Однако множественность показателей приводит к несовпадению оценок влиятельности журналов, сделанных на их основе.

Цель работы, результаты которой отражены в данном подразделе, состояла в том, чтобы на основании массива эмпирических данных о 212 международных научных журналах по экономике, 93 научных журналах по менеджменту и 99 научных журналах по политологии дать количественную оценку степени (не)согласованности различных библиометрических показателей, построить рейтинги журналов, агрегирующие информацию об их сравнительной значимости, которую дают ранжирования по отдельным показателям, определить, являются ли построенные рейтинги более эффективными инструментами оценки влиятельности журналов, чем ранжирования по значению одного индекса.

Использован новый подход к построению таких рейтингов, основанный на использовании ординальных методов ранжирования, впервые предложенных в теории коллективного выбора, а затем примененных в задачах многокритериального оценивания. Различными критериями, по которым оцениваются журналы, в данном случае, являются такие библиометрические показатели, как двух- и пятилетний импакт-факторы, индекс оперативности, индекс влияния статьи, индекс Хирша, индексы SNIP и SJR. Критериальные оценки агрегируются на основании мажоритарного правила (правила большинства). Результатом агрегирования становится бинарное отношение, называемое мажоритарным. Это отношение содержит информацию о пар-

ных сравнениях журналов, то есть дает ответ на вопрос – какой из двух сравниваемых журналов лучше по большинству критериев. С помощью мажоритарного отношения можно определить те журналы, которые следует считать наилучшими с точки зрения всей совокупности показателей. Для этого можно использовать либо основанные на мажоритарном отношении правила ранжирования, такие как правило Копупланда и марковский метод, либо сортировку с помощью турнирных решений – правил оптимального выбора, основанных на обобщении принципа выбора максимального (т.е. наилучшего) элемента отношения, например, с помощью отбора альтернатив, принадлежащих непокрытому множеству, или альтернатив, принадлежащих минимальному внешнеустойчивому множеству.

### 1.6.1 Библиометрические индексы

Данное исследование было построено по образцу исследования влиятельности научных журналов по менеджменту [11]. Часть результатов опубликована в [10].

Ниже даются краткие определения нескольких показателей цитируемости журналов. Подробные описания этих индексов можно найти в [33, 108, 157].

Пожалуй, наиболее известным и широко используемым показателем цитируемости журналов является импакт-фактор (journal impact factor), введенный впервые [105]. Этот индекс показывает среднее число ссылок (цитирований), которое получает одна статья периодического издания за некоторый промежуток времени. В обобщенной формулировке [94, 156] определение импакт-фактора звучит следующим образом. Пусть  $PUB(t)$  – число всех статей, опубликованных в данном журнале в году  $t$ , а  $CIT(T, t)$  число всех ссылок (цитирований), сделанных в году  $T$  на все статьи журнала, опубликованные в году  $t$ . Тогда  $n$ -летний импакт-фактор журнала  $IF$ , вычисленный для года  $T$ , определяется формулой:

$$IF = \frac{\sum_{t=1}^n CIT(T, T-t)}{\sum_{t=1}^n PUB(T-t)}. \quad (1.77)$$

Оптимальный выбор «окна цитирования» (значения параметра  $n$ ), обеспечивающий наилучшую оценку уровня журнала, является предметом научной дискус-

ции. На практике в настоящий момент используются только двухлетний и пятилетний импакт-факторы, значения которых ежегодно публикуются в базе данных Journal Citation Reports (далее — JCR), поддерживаемой компанией Thomson Reuters. Именно эти показатели рассматриваются в настоящей работе.

Наиболее распространенная версия импакт-фактора — двухлетний индекс,  $n=2$ . В этом случае импакт-фактор характеризует среднее число ссылок, сделанных в рассматриваемом году на статьи журнала, опубликованные в течение двух предыдущих лет.

Двухлетний импакт-фактор является классическим показателем, и когда в каком-либо тексте термин «импакт-фактор» упоминается без уточнения временного периода, то имеется в виду именно двухлетний индекс в силу его исторически более широкого использования. Однако в ряде научных дисциплин, особенно в социальных науках, профессиональное сообщество не успевает в полной мере воспринять новое знание за столь короткий срок, как два года, и неоднократно поднимался вопрос о необходимости использовать показатель с более широким окном цитирования. Поэтому в базе данных JCR с 2007 г. публикуются значения пятилетнего импакт-фактора журналов.

Пятилетний импакт-фактор получается, если в формуле (1.77) положить  $n=5$ . Таким образом, он оценивает среднюю цитируемость в отчетном году статей (число ссылок на одну публикацию), вышедших в течение пяти предыдущих лет.

Рейтинг журналов, построенный по пятилетнему импакт-фактору, будет отличаться от ранжирования по двухлетнему показателю: журналы, чьи материалы устаревают медленнее, т.е. те издания, на статьи которых делается значительное число ссылок и через пять лет после их публикации, будут иметь преимущество перед журналами, получающими основное число ссылок на материалы менее чем трехлетней давности. Скорость «старения» публикуемого журналом знания в первую очередь зависит от его дисциплинарной области.

Как следует из определения импакт-фактора, в нем не учитываются ссылки, сделанные на те статьи журнала, которые вышли непосредственно в отчетном году. Тем не менее, такие цитирования встречаются и, более того, их число постепенно

увеличивается по причине все более частого размещения препринтов в Интернете, открытия специальных разделов на сайтах издательств, где публикуются предварительные версии статей, принятых в печать, а также общего ускорения производственного цикла научных издательств. Показатель, фиксирующий цитирования «того же года», также публикуется в базе данных JCR компании Thomson Reuters и называется immediacy index. Устоявшегося русского перевода нет, поэтому вслед за Писляковым [33] мы будем называть его индексом оперативности. Индекс оперативности  $I$  вычисляется по формуле  $I = \frac{CIT(T,T)}{PUB(T)}$

Индекс оперативности показывает, насколько быстро ученый мир реагирует на статьи журнала. Ввиду того что экономика является дисциплиной «медленной» в плане усвоения и воспроизведения знания научным сообществом (по сравнению, например, с биомедицинскими науками), то индекс оперативности журналов по экономике невысок: в 2011 г. его медианное значение по 212 отобранным журналам равно 0,196 (для сравнения: медианный двухлетний импакт-фактор равен 0,929, пятилетний – 1,229).

Ряд библиометрических показателей имеют более сложную структуру и в какой-то мере лишены наглядности и простоты импакт-фактора. Они пытаются более корректно измерить «влиятельность» журнала и избавиться от отдельных недостатков классического импакт-фактора. Здесь мы не будем давать детальные описания этих индикаторов, однако поясним их принципиальный смысл и отличительные особенности.

Одним из новых показателей является введенный в научный оборот в 2009 г. индекс SNIP — «source normalized impact per paper» [142]. Он, так же как и импакт-фактор, оценивает среднюю цитируемость статьи журнала, но при этом относит ее к т.н. «потенциалу цитирования», для расчета которого:

– определяется индивидуальная «дисциплинарная область» журнала – к ней относятся все статьи, которые вышли в отчетном году и цитировали хотя бы раз выпуски данного журнала, опубликованные за последние 10 лет; таким образом, авторы

- индикатора пытаются уйти от привычного деления журналов по тематическим рубрикам в JCR, зачастую негибкого и шаблонного;
- учитывается число позиций, «длина» списков цитируемой литературы в статьях, которые цитируют журнал, – чем больше эти списки, тем больше потенциал цитирования соответствующей индивидуальной дисциплинарной области журнала; учет такого показателя позволяет проводить междисциплинарные сравнения – это одна из наиболее сложных библиометрических задач, поскольку активность цитирования в различных областях науки может отличаться на порядки (и, соответственно, будут отличаться импакт-факторы журналов одинакового научного уровня);
  - учитывается факт наличия/отсутствия в базе данных, используемой для подсчета цитирований, тех документов, которые цитируются статьями из определенной выше дисциплинарной области журнала; при расчете потенциала цитирования не учитываются ссылки, которые ведут «за пределы» базы данных – на публикации, в нее не включенные. Так уравниваются области, где цитируемая литература хорошо представлена в используемой базе данных, и те, где встречается много ссылок на материалы, не охваченные базой (в частности, где больше ссылок на книжные, а не журнальные источники).

Показатель SNIP выражает отношение числа полученных журналом цитирований в расчете на одну статью к вычисленному потенциалу цитирования индивидуальной дисциплинарной области журнала. Эта нормировка на количество существующих ссылок, на «плотность» списков цитирования в соответствующей области науки, называется «source normalization», «нормализация по источникам» (т.е. по источникам ссылок). Таким образом, полное название показателя может быть переведено как «нормализованная по числу ссылок цитируемость в расчете на одну статью».

Повторим, что главное отличие индекса SNIP от импакт-фактора заключается в учете характеристик индивидуального «цитирующего окружения» каждого журнала. Кроме того, вместо двухлетнего «окна цитирования», как у классического импакт-фактора, при подсчете SNIP используется трехлетнее: идет анализ ссылок на статьи, вышедшие в течение трех предыдущих лет. В настоящий момент индекс

SNIP посчитан и опубликован для всех журналов, охваченных базой данных научного цитирования Scopus (производитель — компания Elsevier). Данные по индексу SNIP периодически обновляются. В данной работе используются данные, загруженные с информационного сайта журнальных метрик Scopus в октябре 2012 г.

Индекс Хирша, комплексный показатель, оценивающий одновременно число публикаций и их цитируемость, был предложен Х. Хиршем [114]. Согласно определению, индекс Хирша некоторого массива публикаций равен  $h$ , если  $h$  статей из этого массива получили не менее  $h$  цитирований, а остальные, соответственно, не более  $h$  цитирований. Данный индикатор уходит от подсчета среднего показателя цитируемости по всему массиву и, таким образом, является устойчивым к отдельным выбросам (например, когда в рассматриваемом массиве есть всего одна статья, большое количество ссылок на которую сильно увеличивает средние значения). Для достижения высокого значения индекса Хирша необходимо, чтобы в журнале было много публикаций, на которые часто ссылаются.

Изначально данный показатель был введен для оценки работы отдельного ученика, но его можно рассчитать и для журнала. Например, авторы пионерской работы [75] берут множество статей, опубликованных в журнале в течение одного фиксированного года, и рассматривают их цитируемость на момент наблюдения (четыре года спустя). В настоящей работе был выбран более широкий, а потому более сбалансированный подход: для каждого журнала учитываются статьи, вышедшие за пять лет, с 2007 по 2011 г., и ссылки, сделанные на них в течение того же самого промежутка времени. Индекс Хирша может быть рассчитан по любой базе данных, фиксирующей ссылки, соответственно, его значение может быть разным в зависимости от выбранной базы. В данной работе используется база данных Web of Science компании Thomson Reuters. Именно по этой базе агрегируются журнальные показатели для другого продукта Томсона – базы JCR.

Наконец, следует отметить, что наряду с сильными сторонами у  $h$ -индекса также есть и недостатки. Укажем наиболее очевидный из них: статьи с низкой цитируемостью (ниже и, в некоторых случаях, равной  $h$ ) вообще никак не влияют на индекс. Например, допустим, что два гипотетических журнала опубликовали по 50

статьей каждый. В одном из них каждая статья получила по 10 ссылок, в другом 10 статей получили по 10 ссылок, а остальные 40 статей вообще не цитировались. В этом случае, при очевидном неравенстве «влиятельности» журналов, их индекс Хирша будет иметь одинаковое значение – 10.

Следующие два индикатора называются «взвешенными», поскольку они учитывают полученные цитирования с различным весом — в зависимости от того, насколько «влиятелен» тот источник, из которого получено цитирование. Эта влиятельность, в свою очередь, зависит от цитируемости самого источника. Аналогичная идея лежит в основе расчета ранга «авторитетности» веб-страниц некоторыми поисковыми машинами, например Google (т.н. «page rank»).

Один из подобных показателей предложен испанской исследовательской группой SCImago и называется SCImago Journal Rank (SJR). Так же, как и SNIP, он рассчитывается для всех журналов, входящих в базу данных Scopus. Индекс SJR вычисляется в результате итеративной процедуры. Сначала каждому журналу назначается одинаковый начальный «престиж», затем считается новое значение престижа на основании полученных ссылок из других журналов, на следующем шаге данный престиж вновь перераспределяется с учетом полученных ссылок и текущего уровня престижа цитирующих журналов и т.д. Остановка происходит, когда система журналов достигает стабильного состояния и очередная итерация приводит к изменениям в престиже меньшим некоего малого, заранее заданного порога. За точными математическими формулировками мы отсылаем читателя к работе [109], здесь же отметим, что описанная процедура также эквивалентна подсчету числа посещений каждого журнала неким условным читателем в ходе случайного блуждания по ссылкам. Это бесконечный процесс, при котором читатель переходит от журнала по случайно выбранной в нем ссылке к другому журналу (или к тому же самому, если ссылка является самоцитированием), а для соединения не связанных между собой ссылками изданий дополнительно вводится некоторая ненулевая вероятность того, что читатель выберет следующий журнал случайным образом, а не путем следования по ссылке.

В процедуре определения престижа участвуют ссылки только на те статьи, которые вышли за три последних года. Кроме того, для уменьшения влияния самоцитирования журналов, его величина для каждого издания искусственно ограничивается максимумом в 33% от всех сделанных журналом цитирований. На финальном этапе для определения значения индекса SJR производится нормировка престижа на число статей в журнале, таким образом индекс SJR не зависит от объема издания.

Индикатор, получивший название «собственный фактор» (Eigenfactor), был предложен в 2007 г. специалистами из лаборатории Карла Бергстрома (Университет Джорджа Вашингтона). Разработчики данного показателя интерпретируют его с помощью процесса случайного блуждания по ссылкам, т.е. так же, как и индекс SJR. Для вычисления значения собственного фактора решается задача о нахождении максимального собственного значения модифицированной специальным образом матрицы цитирований (квадратной матрицы, ячейки которой показывают, сколько журнал, соответствующий строке, получил цитирований из журнала, соответствующего столбцу), и для него находится собственный вектор. Компоненты этого вектора рассматриваются в качестве весовых коэффициентов, с которыми учитываются цитирования каждого журнала. После суммирования полученных цитирований с соответствующими весами и нормировки получаются значения собственного фактора для журналов. Однако вместо собственного фактора, сильно зависящего не только от цитируемости, но и от объема издания, удобнее использовать индикатор, нормированный на число статей в журнале. Для обозначения нормированного собственного фактора используется термин «индекс влияния статьи» («Article Influence»). В данной работе мы будем называть его просто индексом влияния.

Индекс влияния во многом похож на индекс SJR, его отличия носят скорее технический, нежели принципиальный характер. При его расчете:

- учитываются ссылки на статьи, вышедшие за 5 последних лет (а не за три года);
- ссылки журнала на свои же статьи исключаются целиком (тогда как SJR ограничивает самоцитирование уровнем 33%);
- вес одной ссылки из журнала нормируется на число всех распознанных ссылок журнала (а при расчете индекса SJR — на общее число ссылок).

При этом наиболее серьезным отличием является то, что индекс влияния и индекс SJR рассчитываются по разным базам цитирования: индекс SJR – по базе Scopus, а индекс влияния (и собственный фактор) — по базе JCR. С 2007 г. данные по собственному фактору и индексу влияния публикуются в самой базе JCR, в настоящей работе используются значения для 2011 г.

Наконец, следует отметить, что и индекс SJR, и индекс влияния сглаживают разницу уровней активности цитирования в различных научных дисциплинах, поскольку «престиж» журнала распределяется поровну между всеми исходящими из него ссылками.

### 1.6.2 Описание данных

Для анализа степени согласованности оценок влиятельности научного журнала, получаемых с помощью семи вышеописанных библиометрических показателей (импакт-фактора, 5-летнего импакт-фактора, индекса оперативности, индекса влияния, индекса Хирша, индексов SNIP и SJR), были выбраны научные журналы по экономике, менеджменту и политологии. В базе JCR за 2011 г. представлено 319 изданий, отнесенных к категории «Economics», 168 изданий – к категории «Management» и 147 изданий – к категории «Political Science». Однако не для всех журналов были опубликованы значения пятилетнего импакт-фактора (обычно такое случается, если журнал включен в базу JCR относительно недавно), поэтому эти издания были исключены из анализа. Также были исключены журналы, для которых не были опубликованы значения индекса оперативности, индексов SNIP или SJR. В результате, для оставшихся 212 журналов по экономике, 93 журналов по менеджменту и 99 журналов по политологии были получены значения импакт-фактора (2011 г.), пятилетнего импакт-фактора (2011 г.), индекса оперативности (2011 г.), индекса Хирша (2007–2011 гг.), индекса SNIP (2011 г.), индекса SJR (2011 г.) и индекса влияния (2011 г.).

На основании значений библиометрического показателя строится рейтинг журналов. Рейтинг – это ранжирование, состоящее из позиций (мест, на которые можно

поставить один или несколько журналов). Журналы с совпадающими значениями показателя соответствуют одной позиции ранжирования, т.е. одинаковому месту в рейтинге, а несовпадающие – разным. Позиции упорядочиваются по «ухудшению» (в нашем случае – убыванию) значения показателя и нумеруются натуральными числами, начиная с позиции, соответствующей «наилучшему» значению. Номера позиций журналов по экономике, менеджменту и политологии в рейтингах по каждому библиометрическому показателю указаны в Таблицах В.1 – В.3 Приложения В, соответственно.

### 1.6.3 Построение агрегирующих рейтингов методами теории коллективного выбора

Полученные значения коэффициентов ранговой корреляции показывают, что использование различных показателей приводит к схожим, но отнюдь не совпадающим ранжированием журналов. Даже наиболее близкие друг к другу индексы, двух- и пятилетний импакт-факторы, дают противоположные оценки более чем в 8% случаев, и, следовательно, основанные на них рейтинги не могут быть согласованы с помощью принципа уточнения. Поскольку мы предполагаем, что расхождения между индексами могут быть обусловлены не сравнительной ущербностью одного из них, а тем, что они связаны с измерением различных сторон такого многомерного понятия, как значимость журнала, возникает необходимость найти способ построения рейтинга журналов на основании информации, которую дает об их значимости каждый из индексов. Таким образом, ранжирование журналов превращается в проблему оценки на основании нескольких критериев, т.е. в многокритериальную задачу.

Классическим решением задачи ранжирования альтернатив, оцениваемых по нескольким критериям, является вычисление взвешенной суммы значений критериев для каждой из альтернатив и их упорядочение по этой величине. Однако у этого метода есть серьезное ограничение – необходимость теоретического обоснования возможности суммирования и выбора весов. Для рассматриваемой задачи такого

обоснования пока нет, следовательно, мы не можем быть уверены в том, что суммирование взвешенных значений библиометрических показателей является корректной процедурой, дающей логически осмысленные результаты. Выходом из положения является возможность использования в многокритериальных задачах ординальных методов, разработанных в теории коллективного выбора.

Основной задачей теории коллективного выбора является описание способов определения альтернатив, которые или *будут* выбраны, или *должны быть* выбраны из числа имеющихся в наличии вариантов на основании мнения о них индивидуальных участников процесса принятия коллективных решений. Применить методы теории коллективного выбора в задаче многокритериального оценивания можно, если оценку альтернатив по каждому из критериев считать мнением одного из членов группы, от каждого из которых зависит выбор коллектива. Соответственно, в задаче построения агрегированного рейтинга журналов альтернативами считаются журналы, а мнением индивидуального участника процесса принятия коллективных решений – их оценки по определенному показателю цитируемости.

Пусть дано множество доступных для выбора альтернатив  $A$ ,  $|A|=m$ ,  $m \geq 3$ , и группа  $G$ ,  $|G|=n$ ,  $n \geq 2$ , лиц, участвующих в процессе принятия коллективного решения, которое сводится к выбору определенных альтернатив из  $A$ . Мнение отдельного участника  $i$ ,  $i \in G$ , об альтернативах из  $A$ , определяющее его индивидуальный выбор, моделируется бинарным отношением  $P_i$  на  $A$ ,  $P_i \subseteq A \times A$ , фиксирующим результаты попарного сравнения альтернатив. Если при сравнении пары альтернатив  $x$  и  $y$  участник  $i$  отдает предпочтение альтернативе  $x$ , то говорят, что упорядоченная пара  $(x, y)$  принадлежит отношению  $P_i$ ,  $(x, y) \in P_i$ , или, что альтернатива  $x$  доминирует над альтернативой  $y$  по отношению  $P_i$ ,  $xP_iy$ . Если выбирающий не способен решить, какая из двух альтернатив лучше, или считает их равноценными, то будем полагать, что он не предпочитает ни одну из них другой, то есть что справедливо утверждение  $(x, y) \notin P_i \& (y, x) \notin P_i$ .

Если известны предпочтения того, кто делает выбор (т.е. бинарное отношение на  $A$ ), и если задано правило выбора, определенное как функция, отображающая

множество бинарных отношений на  $A$  в множество непустых подмножеств  $A$ , то можно предсказать, какие альтернативы должны стать результатом выбора. Таким образом, зная индивидуальные предпочтения, задачу коллективного выбора можно решить, если, во-первых, определить бинарное отношение  $\mu$ ,  $\mu \subseteq A \times A$ , моделирующее коллективные предпочтения (мнение коллектива об альтернативах из  $A$ ), а во-вторых, задать правило выбора  $S(\mu, A)$ :  $\{\mu\} \rightarrow 2^A \setminus \emptyset$ , называемое также решением. Обычно отношение  $\mu$  строится из отношений предпочтений индивидуальных участников с помощью мажоритарного правила и поэтому называется мажоритарным отношением:  $x$  доминирует над  $y$  по отношению  $\mu$ , если число тех членов группы, кто предпочитает альтернативу  $x$  альтернативе  $y$ , больше числа тех, кто предпочитает альтернативу  $y$  альтернативе  $x$ ,  $x\mu y \Leftrightarrow |G_1| > |G_2|$ , где  $G_1 = \{i \in G \mid xP_i y\}$ ,  $G_2 = \{i \in G \mid yP_i x\}$ .

Выбор в качестве способа агрегирования мажоритарного правила однозначно диктуется рядом естественных условий [2], справедливых и для рассматриваемой задачи построения агрегированного рейтинга журналов. Кроме того, в многокритериальных задачах использование мажоритарного правила является способом получать агрегированные оценки альтернатив, не прибегая к арифметическим действиям над критериями, обосновать законность которых, как было сказано выше, затруднительно или вообще невозможно.

Из определения следует, что отношение  $\mu$  асимметрично,  $(x, y) \in \mu \Rightarrow (y, x) \notin \mu$ . Если имеет место  $(x, y) \notin \mu \& (y, x) \notin \mu$ , то говорят, что альтернативы  $x$  и  $y$  находятся в отношении равенства голосов  $\tau$ ,  $\tau \subseteq A \times A$ ,  $(x, y) \in \tau \& (y, x) \in \tau$ . Очевидно, что отношение равенства голосов  $\tau$  – симметрично.

Для проведения компьютерных вычислений мажоритарное отношение  $\mu$  представляется с помощью мажоритарной матрицы  $M = [m_{xy}]$ , определяемой так:

$$m_{xy} = 1 \Leftrightarrow (x, y) \in \mu, \text{ или } m_{xy} = 0 \Leftrightarrow (x, y) \notin \mu.$$

Аналогично мажоритарной матрице  $M$  можно построить матрицу  $T = [t_{ij}]$ , представляющую отношение равенства голосов  $\tau$ .

Для определения правил выбора необходимы также понятия нижнего среза, верхнего среза и горизонта альтернативы  $x$ . Нижним срезом альтернативы  $x$  называ-

ется множество  $L(x)$  альтернатив, над которыми  $x$  доминирует,  $L(x)=\{y \mid x \succ y\}$ , верхним срезом – множество  $D(x)$  альтернатив, доминирующих над  $x$ ,  $D(x)=\{y \mid y \succ x\}$ , горизонтом  $x$  – множество  $H(x)$  альтернатив, находящихся с  $x$  в отношении равенства голосов,  $H(x)=\{y \mid y \equiv x\}$ .

Одним из наиболее простых способов построения рейтинга альтернатив является правило Коупланда [88]. В основе этого правила лежит следующее соображение: чем больше число альтернатив, которые хуже (при парном сравнении), чем альтернатива  $x$ , тем лучше данная альтернатива в целом. Можно рассуждать и так: альтернатива  $x$  тем лучше в целом, чем меньше число альтернатив, которые лучше альтернативы  $x$ . Наконец, эти два правила можно комбинировать.

С формальной точки зрения, агрегированное ранжирование по Коупланду есть упорядочение альтернатив по числу очков  $s(x)$ , которые присуждаются одним из трех способов:

- версия 1,  $s_1(x)=|L(x)|-|D(x)|$ ;
- версия 2,  $s_2(x)=|L(x)|$ ;
- версия 3,  $s_3(x)=|A|-|D(x)|$ .

В настоящем исследовании используются вторая и третья версии. Векторы  $s_2$  и  $s_3$  очков, получаемых журналами по второй и третьей версии правила Коупланда, вычисляется по формулам  $s_2=\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}$  и  $s_3=(\mathbf{I}-\mathbf{M}^{\text{tr}}) \cdot \mathbf{a}$ , соответственно, где  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{a}$  – это матрица и вектор, все компоненты которых равны 1.

Для построения рейтинга также можно использовать известное решение задачи выбора наилучших альтернатив. Рассмотрим следующую итерационную процедуру. Решение  $S(\mu, A)$  определяет множество  $B_{(1)}$  наилучших альтернатив в  $A$ ,  $B_{(1)}=S(\mu, A)$ . По сравнению со всеми остальными альтернативами варианты из  $B_{(1)}$  – это альтернативы «первого сорта». Если повторить процедуру выбора для множества  $A \setminus B_{(1)}$ , то будет определено множество  $B_{(2)}=S(\mu, A \setminus B_{(1)})=S(\mu, A \setminus S(\mu, A))$ , содержащее альтернативы, которые можно назвать альтернативами «второго сорта» (они хуже альтернатив из  $B_{(1)}$ , но лучше альтернатив из  $A \setminus (B_{(1)} \cup B_{(2)})$ ). Повторяя операцию удаления наилучших альтернатив, определенных на предыдущем этапе, за конечное число

шагов мы разделим все множество  $A$  на группы альтернатив разных сортов,  $B_{(k)}=S(\mu, A \setminus (B_{(k-1)} \cup B_{(k-2)} \cup \dots \cup B_{(2)} \cup B_{(1)}))$ , что и будет искомым ранжированием.

В данной работе для построения агрегированного рейтинга с помощью вышеописанной процедуры сортировки были выбраны два решения: непокрытое множество и минимальное внешнеустойчивое множество.

Первое из этих решений основано на следующем принципе выбора: усилим условие доминирования, а затем выберем недоминируемые альтернативы. Если не усиливать условие доминирования, то выбор недоминируемой (по отношению  $\mu$ ) альтернативы в общем случае невозможен, так как таких альтернатив может не быть. Этот результат известен как «парадокс Кондорсе». См., например, [3].

Говорят, что альтернатива  $x$  покрывает альтернативу  $y$ , если  $x$  доминирует и над  $y$ , и над всеми альтернативами, над которыми доминирует  $y$ ,  $x\mu y \& L(y) \subseteq L(x)$  [141]. Т.е. для большинства голосующих  $x$  лучше, чем  $y$ , и не существует такой альтернативы  $z$ , которая была бы хуже (для большинства), чем  $y$ ,  $y\mu z$ , и одновременно не хуже чем  $x$ ,  $z\mu x \vee z\tau x$ . Наилучшими являются альтернативы, не покрытые никакими другими альтернативами, их множество называется непокрытым множеством  $UC$ . Существуют и другие версии определения отношения покрытия и, соответственно, непокрытого множества. Их можно посмотреть, например, в [61].

Второе решение основано на принципе выбора альтернатив, принадлежащих множеству с каким-либо хорошим свойством. Множество  $ES$  обладает внешней устойчивостью (и, соответственно, называется внешнеустойчивым), если для любой альтернативы  $x$ , не принадлежащей  $ES$ , в множестве  $ES$  найдется альтернатива  $y$ , которая лучше (для большинства), чем  $x$ ,  $\forall x \notin ES \exists y: y \in ES \& y \mu x$  [145]. Внешнеустойчивое множество называется минимальным, если ни одно из его подмножеств, кроме него самого, не является внешнеустойчивым. Наилучшей считается альтернатива, принадлежащая хотя бы одному минимальному внешнеустойчивому множеству  $MES$ , поэтому решением является объединение минимальных внешнеустойчивых множеств, которое также обозначается  $MES$  [168]; см. также [61]. Минимальное внешнеустойчивое множество было введено Субочевым [168] по аналогии с другим

решением – минимальным слабоустойчивым множеством (MWS), предложенным Алескеровым и Курбановым [58]. Поэтому в работах [60, 168] минимальное внешнеустойчивое множество называется второй версией минимального слабоустойчивого множества и обозначается  $MWS^{\text{II}}$ . Используемая в нашем анализе версия непокрытого множества в этих работах обозначена  $UC^{\text{II}}$ .

Из данных определений непосредственно следует, что непокрытое множество и объединение минимальных внешнеустойчивых множеств всегда непусты и единственны. Они могут быть вычислены с помощью матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{T}$ , которые были введены ранее. Формулы, выражающие  $UC$  и  $MES$  через  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{T}$ , приведены в [61].

Определив  $UC$  (или, во втором случае,  $MES$ ) для исходного массива журналов, мы приписываем изданиям, вошедшим в это множество, первое место в новом рейтинге и, как было сказано выше, удаляем эти журналы из массива. После этого процедура нахождения  $UC$  (или  $MES$ ) повторяется для нового, усеченного массива журналов и т.д. Поскольку при любом мажоритарном отношении  $\mu$  множества  $UC$  и  $MES$  содержат не меньше одного элемента, за конечное число повторений вышеописанной процедуры отбора и исключения массив будет полностью исчерпан, а журналы разделены на конечное число рангов.

Наконец, мы хотели бы применить одну из версий метода, называемого марковским, поскольку он основан на исследовании марковского процесса случайного блуждания по ориентированному графу, представляющему бинарное отношение  $\mu$ . Первые варианты данного метода были предложены Дэниэлсом [90] и Ушаковым [43], ссылки на другие работы можно найти в статье Чеботарева и Шамис [79].

Рассмотрим действие этого правила на следующем примере. Предположим, что альтернативы из множества  $A$  – это игроки в настольный теннис. За теннисный стол могут встать только два человека, поэтому о силе игроков мы можем судить лишь на основании информации о парных сравнениях, то есть по результатам отдельных игр.

Наша задача – построение общего рейтинга игроков. Поскольку с помощью одной игры это сделать нельзя, мы устраиваем турнир, состоящий из множества игр.

Перед началом турнира мы разделяем игроков на группы, отделяя заведомо более слабых от заведомо более сильных, чтобы в каждой игре участвовали только игроки сопоставимые по своему мастерству. Сортировка игроков осуществляется так, как это описано выше, с помощью турнирного решения, называемого слабым максимальным циклом  $WTC$ . Это решение определяется следующим образом. Множество  $WTC$  называется слабым максимальным циклом, если, во-первых, любая альтернатива из  $WTC$  доминирует любую альтернативу, не принадлежащую  $WTC$ ,  $\forall x \notin WTC, y \in WTC \Rightarrow y \succ x$ , и, во-вторых, ни одно собственное непустое подмножество  $WTC$  не обладает вышеуказанным свойством.

Относительная сила игроков, попавших в разные группы, считается определенной (отношением доминирования), поэтому необходимо определить только относительную силу игроков из одной группы. Таким образом, все игры проводятся только внутри групп, для чего каждой из них выдается игровой стол. Так как игровой стол у группы только один, то игры группы должны идти строго одна за другой.

Игроки, которые встанут за стол в данной игре, выбираются следующим способом: тот, кто был объявлен победителем в предыдущей игре, остается стоять за столом, а его противник по жребию выбирается из оставшихся игроков, в число которых входит также и игрок, в предыдущей игре объявленный проигравшим. Вероятность быть выбранным по жребию для всех одинакова. Если результатом предыдущей игры была ничья, то титул победителя переходит к игроку, который встал к столу, будучи выбран по жребию, то есть, несмотря на возможность ничьи, в каждой отдельной игре есть победитель и проигравший. Очевидно, что относительную силу игрока можно измерять, подсчитывая число игр, в которых он был объявлен победителем.

Для того чтобы начать турнир, одного из игроков нужно назначить победителем в фиктивной «нулевой» игре. Однако, чем дольше будет идти турнир (чем больше в нем будет игр), тем меньше будет зависеть относительное число побед каждого участника от того, кого и как мы выбираем на роль «победителя в предыдущей игре» для самой первой игры. В пределе при стремлении числа игр в турнире к

бесконечности относительное число побед никак не зависит от выбора победителя в нулевой игре.

Вместо предела относительного числа побед можно вычислять предел вероятности стать победителем в последней игре турнира, поскольку данные величины равны. Эта вероятность вычисляется с помощью матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{T}$ , определенных выше.

Допустим, по итогам предшествующих встреч мы знаем относительную силу игроков в каждой паре, и эта сила описывается бинарными отношениями  $\mu$  и  $\tau$ , являясь неизменной во времени величиной. Таким образом, если мы знаем, что имена игроков, которые собираются начать новую игру, –  $x$  и  $y$ , то, зная  $\mu$ , мы можем абсолютно точно предсказать результат встречи: победу  $x$  (если  $x\mu y$ ), победу  $y$  (если  $y\mu x$ ) и ничью (если  $x\tau y$ ).

Пусть  $\mathbf{p}^{(k)}$  – это вектор,  $i$ -ая компонента которого  $p_i^{(k)}$  есть вероятность  $i$ -того игрока получить титул победителя в  $k$ -ой игре. Возможны два взаимоисключающие случая. Если  $i$ -ый игрок был объявлен победителем в  $(k-1)$ -ой игре, то он станет победителем в  $k$ -ой игре, если по жребию будет выбран противник, которого  $i$ -ый игрок побеждает, то есть альтернатива из нижнего среза альтернативы  $i$ . Вероятность того, что  $i$  станет победителем в  $(k-1)$ -ой игре равна  $p_i^{(k-1)}$ , вероятность выбора альтернативы из  $L(i)$  равна  $\frac{s_2(i)}{m-1}$ , где  $s_2(i)$  – это число очков по второй версии правила Коупланда,  $s_2(x)=|L(x)|$ . Таким образом, вероятность данного исхода равна  $p_i^{(k-1)} \frac{s_2(i)}{m-1}$ .

Второй случай –  $i$ -ый игрок не был объявлен победителем в  $(k-1)$ -ой игре. Он станет победителем в  $k$ -ой игре, если  $i$  будет по жребию выбран противником победителя  $(k-1)$ -ой игры, вероятность чего равна  $\frac{1}{m-1}$ , и если победитель  $(k-1)$ -ой игры принадлежит к нижнему срезу или горизонту альтернативы  $i$ , вероятность чего равна  $\sum_{j=1}^m (m_{ij} + t_{ij}) p_j^{(k-1)}$ . Следовательно, вероятность  $p_i^{(k)}$  определяется равенством

$$p_i^{(k)} = p_i^{(k-1)} \frac{s_2(i)}{m-1} + \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (m_{ij} + t_{ij}) p_j^{(k-1)}. \quad (1.78)$$

Формулу (1.78) удобно записать в матрично-векторной форме

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{W}\mathbf{p}^{(k-1)} = \frac{1}{m-1}(\mathbf{M} + \mathbf{T} + \mathbf{S})\mathbf{p}^{(k-1)}. \quad (1.79)$$

Матрица  $\mathbf{S}=[s_{ij}]$  определяется так:  $s_{ii}=s_2(i)$  и  $s_{ij}=0$  при  $i \neq j$ .

Таким образом, передача титула победителя от игрока к игроку есть марковский процесс с матрицей перехода  $\mathbf{W}$ .

Нас интересует вектор  $\mathbf{p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(k)}$ . Нетрудно доказать, что вне зависимости от того каковы начальные условия (т.е. чему равен вектор  $\mathbf{p}^{(0)}$ ), искомый предел будет собственным вектором матрицы  $\mathbf{W}$ , соответствующим собственному значению  $\lambda=1$  (см. например [131]). Соответственно, найти  $\mathbf{p}$  можно, решив систему линейных уравнений  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}$ . Искомое внутригрупповое ранжирование есть упорядочение альтернатив по убыванию значений компонент  $p_i$ . Поскольку мы предварительно отсортировали игроков с помощью  $WTC$ , ни одна из компонент  $p_i$  не будет равна нулю [131].

Агрегированные рейтинги журналов, построенные на основании парных сравнений журналов по семи библиометрическим показателям с помощью правила Коупланда, правила выбора альтернатив, принадлежащих непокрытому множеству, правила выбора альтернатив, принадлежащих минимальному внешнеустойчивому множеству, и марковского метода ранжирования даны в Таблицах В.1–В.3 Приложения В. Списки журналов упорядочены согласно марковскому ранжированию.

#### 1.6.4 Корреляционный анализ

Номер позиции является ранговой переменной, поэтому для оценки согласованности двух различных рейтингов журналов нужно использовать ранговые меры корреляции. В настоящей работе в качестве способов количественной оценки степени различия двух ранжирований используются три схожие, но не идентичные величины: расстояние Кендалла, коэффициент ранговой корреляции Кендалла [125, 126] и долю совпадающих парных сравнений.

Рассмотрим пару журналов и сравним их позиции в двух рейтингах. Если в одном рейтинге позиция первого журнала выше позиции второго журнала, а в другом

рейтинге – ниже, то имеет место инверсия. Расстояние Кендалла между двумя ранжированием – это число инверсий  $N_-$  (число неупорядоченных пар, ранжированных противоположным образом), соответственно, чем больше между рейтингами инверсий, тем дальше они друг от друга. Вместо величины  $N_-$ , зависящей от числа журналов удобно использовать нормированную величину  $d = \frac{N_-}{N}$  (процент инверсий от общего числа пар). Значения  $d$  приведены в Таблице В.4.

Коэффициент ранговой корреляции Кендалла  $\tau_b$  зависит от расстояния Кендалла следующим образом:

$$\tau_b = \frac{N_+ - N_-}{\sqrt{(N - n_1)(N - n_2)}}. \quad (1.80)$$

Здесь  $N_+$  – это число пар, в которых позиция одного из журналов выше позиции другого журнала как в одном рейтинге, так и в другом,  $n_1$  – число таких пар, в которых оба журнала имеют одинаковый ранг в первом рейтинге, а  $n_2$ , соответственно, – это число таких пар во втором рейтинге. Результаты вычислений  $\tau_b$  приведены в Таблице В.5.

Если же позиция одного из журналов выше позиции другого журнала как в одном рейтинге, так и в другом, или если номера позиций обоих журналов совпадают как в одном рейтинге, так и в другом, то можно сказать, что данные рейтинги совпадают в оценке данной пары. Соответственно, в качестве меры согласия рейтингов можно использовать выраженную в процентах долю (неупорядоченных) пар журналов, в оценке которых рейтинги совпадают друг с другом,  $r = \frac{N_+ + N_0}{N} 100$ , где  $N_0$  – число пар, в которых номера позиций обоих журналов совпадают как в одном рейтинге, так и в другом,  $N$  – общее число неупорядоченных пар. Результаты вычислений  $r$  приведены в Таблице В.6.

На основании значений мер согласованности ранжирований можно определить ранжирования, которые являются наилучшими представителями данной совокупности рейтингов (в данном случае семи исходных ранжирований журналов по значению соответствующего библиометрического индекса). Для этого воспользуемся вышеописанной техникой парных сравнений с помощью правила большинства. Бу-

дем считать, что рейтинг  $A$  лучше представляет данную совокупность рейтингов, чем рейтинг  $B$ , если он лучше коррелирует с большинством рейтингов совокупности, которую нужно представить (т.е. агрегировать). В итоге, на множестве рейтингов возникает мажоритарное отношение (свое для своей меры близости рейтингов). Применяя к нему правило Коупланда, получаем ранжирование исходных и агрегированных рейтингов по степени их «представительности». Результаты вычислений для двух мер и четырех совокупностей их значений (отдельно для трех групп журналов и для их объединения) представлены в Таблице 1.20. Рейтинги упорядочены от наиболее согласованного (ранг 1) до наименее согласованного (ранг 12).

Таблица 1.20 – Ранжирование ранжирований с помощью правила Коупланда

ранг	Рейтинги сравниваются на основании $\tau_b$				Рейтинги сравниваются на основании $\tau_g$			
	экономика	менеджмент	политология	все журналы	экономика	менеджмент	политология	все журналы
1	MES	MES	MES	MES	Copeland 3	Copeland 3	Copeland 3/ Copeland 2/ Markov	Copeland 3
2	UC	UC	UC	UC	Copeland 2	Copeland 2		Copeland 2
3	Copeland 3	Copeland 2	Copeland 3	Copeland 3	Markov	Markov		Markov
4	Copeland 2	Copeland 3	Copeland 2	Copeland 2	UC	UC	UC	UC
5	Markov	Markov	Markov	Markov	5–y. impact	5–y. impact/MES	5–y. impact/MES	5–y. impact
6	5–y. impact	5–y. impact	5–y. impact	5–y. impact	impact/MES			MES
7	impact	SNIP	Hirsch	impact	SNIP	AI	impact	
8	SJR	Hirsch	AI/impact/SJR	AI	AI	AI	impact	AI
9	AI	AI		SNIP	impact/Hirsch /SJR	SNIP /SJR	SNIP	SNIP
10	SNIP	SJR		SJR			SJR	SJR
11	Hirsch	impact	SNIP	IP			Hirsch	Hirsch
12	immediacy	immediacy	immediacy	immediacy	immediacy	immediacy	immediacy	immediacy

### 1.6.5 Некоторые выводы

Влиятельность журнала – понятие трудноопределимое. Измерение уровня влиятельности научного издания является задачей, однозначно правильного решения у которой не существует. Различные подходы к измерению влиятельности журнала обуславливают существование различных индексов влиятельности, каждый из которых имеет свое теоретическое обоснование. В настоящем исследовании в качестве исходных данных были использованы значения семи наиболее популярных библиометрических индексов: двух- и пятилетнего импакт-факторов, индекса опе-

ративности, индекса влияния статьи, индекса Хирша, индексов SNIP и SJR. Корреляционный анализ ранжирований по отдельным показателям, в целом, воспроизвел результат предыдущего исследования [11]. Максимальная корреляция наблюдается для пятилетнего импакт-факторов, а менее всего коррелирует с другими показателями индекс оперативности, что также можно было предсказать ввиду слишком узкого «окна цитирования», которое он использует.

Тем не менее, несмотря на то, что рейтинги, основанные на различных индексах, во многом схожи, между ними все-таки имеются существенные противоречия, и выбор рейтинга, который стоит использовать для принятия практических решений, является проблематичным. Поэтому актуальной задачей является построение агрегированных рейтингов, соединяющих в себе преимущества исходных. Для решения этой задачи можно применять различные подходы. Данная работа демонстрирует возможности ординальных методов агрегирования, заимствованных из теории колективного выбора. Это совершенно новый подход к построению агрегированных рейтингов.

Нашей целью было получить ответ на вопрос – будут ли агрегированные рейтинги, строящиеся с помощью ординальных методов и моделей теории колективного выбора, использование которых снимает вопрос об однородности различных измерений степени влиятельности научного журнала, более эффективным инструментом оценки, чем отдельные рейтинги? Под эффективностью рейтинга как инструмента оценки понималась степень его согласованности с остальными рейтингами – эффективный рейтинг должен минимизировать число противоречивых оценок.

Нами были вычислены пять ранжирований, для построения которых использовалось мажоритарное отношение, построенное, в свою очередь, по ранжированием на основе исходных библиометрических показателей. Эти пять ранжирований построены согласно двум версиям правила Коупланда, с помощью марковского метода, а также путем последовательного выделения непокрытого множества и минимального внешнеустойчивого множества.

Корреляционный анализ показал, что величина корреляционных индексов для любого из пяти построенных ранжирований при их сопоставлении с ранжирования-

ми по библиометрическим показателям превосходит значения, получающиеся при сравнении последних между собой, то есть переход от исходных рейтингов к агрегированным действительно является выигрышным. Иначе говоря, агрегированные ранжирования лучше представляют совокупность рейтингов, основанных на семи выбранных библиометрических показателях, чем любой из исходных рейтингов, и могут служить в качестве интегральных рейтингов журналов.

Некоторые из полученных рейтингов (версии правила Коупланда, марковское ранжирование) характеризуются высокой степенью дискриминации, т.е. доля пар журналов, имеющих одинаковый ранг очень мала (в пределах 1%). Марковское ранжирование показало, что мажоритарное отношение позволяет различить почти все журналы – возможность, которую не дает ни один из семи библиометрических индексов.

Другие рейтинги (сортировка с помощью UC и MES) наоборот, представляют из себя объединение журналов в крупные группы, то есть «грубое» ранжирование, которое также может быть ценным. Мы полагаем, что такое более «грубое» разбиение лучше соответствует интуитивным представлениям о различии в значимости журналов. Возможность построения «грубых» рейтингов можно считать еще одним преимуществом предлагаемого подхода.

В данной работе были использованы далеко не все методы ранжирования, основанные на построении мажоритарного отношения. Существуют и другие способы построения коллективного ранжирования помимо правила Коупленда и марковского метода, а также другие решения в задаче наилучшего коллективного выбора, кроме выбора с помощью минимального внешнеустойчивого множества и непокрытого множества. Поэтому следующим шагом в направлении, указанном данным исследованием было бы расширение как спектра используемых методов агрегирования, так и эмпирического материала.

Результаты исследований данного подраздела отражены в работах [10, 61]:

1. Алескеров Ф.Т., Писляков В.В., Субочев А.Н. Построение рейтингов журналов по экономике с помощью методов теории коллективного выбора// препринт WP7/2013/03, М.: НИУ ВШЭ, 2013.

2. Aleskerov F., Subochev A. Modeling optimal social choice: matrix-vector representation of various solution concepts based on majority rule// Journal of Global Optimization, 56(2), 2013, pp.737–756.

### 1.7 Исследование свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции

В этом подразделе приведены результаты исследований свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции.

Интерес к задачам выбора связан с тем, что решение многих проблем прикладной математики и теории управления сводится к решению таких задач.

Задача выбора может быть сформулирована следующим образом. Пусть задано конечное множество  $A$  альтернатив, мощность которого больше или равна 2 ( $\text{card}(A) \geq 2$ ). Любое подмножество  $X \in 2^A$  может быть предъявлено для осуществления акта выбора и называется далее предъявлением. Пусть задана некоторая функция выбора  $C(\cdot)$ , которая является отображением  $C: 2^A \rightarrow 2^A$  с ограничением  $C(X) \subseteq X$  для любого  $X \in 2^A$ . Выбор состоит в выделении из предъявлений  $X$  по некоторому фиксированному правилу непустого подмножества альтернатив  $Y \subseteq X$  (непустого подмножества «лучших» вариантов).

На данный момент существует большое число различных процедур выбора, которые позволяют производить выбор наилучших альтернатив, а также их ранжирование в условиях многокритериальности. Напомним, что под процедурой выбора подразумевается некоторое правило, которое указывает, каким образом необходимо выделить подмножество наилучших альтернатив из исходного множества альтернатив  $A$ . Примером таких процедур могут служить различные процедуры голосования (правило относительного большинства, правило Борда и т.д.), правило Парето и многие другие.

При рассмотрении задачи выбора особое внимание уделяется исследованию существующих процедур выбора, под которым понимается, каким образом может быть изменен конечный выбор при изменении некоторых параметров. Этими параметрами могут быть:

- предъявляемое множество альтернатив  $X$ ;
- оценки альтернатив по критериям;
- набор критериев, по которым осуществляется выбор.

Изменение для некоторых процедур выбора предъявляемого множества альтернатив, их оценок по критериям или набора критериев, по которым осуществляется выбор, может привести к изменению полученного выбора. Эта особенность приводит к необходимости более детального изучения существующих процедур выбора и определения того, какие из них могут применяться в конкретном случае.

В настоящей работе мы исследуем более сложные процедуры выбора, в основе которых лежит принцип суперпозиции. Напомним, что под суперпозицией двух функций выбора  $C_1(\cdot)$  и  $C_2(\cdot)$  подразумевается бинарная операция  $\odot$ , результат которой – новая функция  $C^*(\cdot) = C_2(\cdot) \odot C_1(\cdot)$ , имеющая вид  $\forall X \in 2^A \quad C^*(X) = C_2(C_1(X))$  [1]. Другими словами, суперпозиция заключается в последовательном применении функций выбора, что означает, что выбор на  $X$  по функции выбора  $C_1$  является предъявлением для функции  $C_2$ . При этом изменение порядка применения функций выбора может привести к различным результатам выбора, т.е. операция суперпозиции не обладает свойством коммутативности.

Интерес к подобным процедурам выбора возникает по нескольким причинам. Во-первых, процедуры выбора, основанные на идее суперпозиции, имеют достаточно низкую вычислительную сложность, что критично в том случае, когда число альтернатив и критериев очень большое. Дело в том, что при работе на большом объеме данных, когда каждая альтернатива характеризуется большим количеством различных признаков, большинство существующих одношаговых процедур выбора имеют высокую вычислительную сложность. Использование операции суперпозиции позволяет сокращать на каждом новом этапе общее число альтернатив, а также применять на разных этапах различные с точки зрения вычислительной сложности процедуры выбора, что позволяет получить результат за приемлемое время. Во-вторых, зачастую возникают ситуации, когда в результате применения некоторой процедуры полученный выбор содержит слишком большое число альтернатив. Ис-

пользование операции суперпозиции позволяет избегать таких ситуаций за счет использования дополнительных процедур выбора.

В рамках данной работы рассматриваются следующие процедуры выбора:

- правило относительного большинства;
- обратное правило относительного большинства;
- правило Борда;
- обратная процедура Борда;
- правило Нансона;
- правило Кумбса;
- процедура Симпсона;
- минимаксная процедура;
- одношаговое правило надпорогового выбора с фиксированным значением порога;
- одношаговое правило надпорогового выбора со значением порога, зависящего от исходного набора данных;
- суперпозиция одношагового правила надпорогового выбора с фиксированным значением порога;
- суперпозиция одношагового правила надпорогового выбора со значением порога, зависящего от исходного набора данных.

Кроме того, в работе исследуются двухступенчатые процедуры выбора, у которых на первом этапе используется одна из следующих процедур:

- минимаксная процедура;
- обратное правило Борда;
- обратное правило простого большинства;
- правило Блэка;
- правило Борда.

А на втором этапе – одно из следующих правил:

- минимаксная процедура;
- обратное правило Борда;

- обратное правило простого большинства;
- правило Блэка;
- правило Борда;
- правило Хара.

Целью работы является исследование данных процедур выбора на предмет удовлетворения существующим нормативным условиям, которые показывают, каким образом изменится выбор при добавлении в исходный набор данных новых альтернатив, при удалении из исходного набора не попавших в выбор альтернатив, при удалении из исходного набора попавших в выбор альтернатив, при изменении значения по критерию одной из существующих альтернатив и т.д.

## 1.7.1 Основная часть

### 1.7.1.1 Описание процедур выбора

Рассматриваемые в работе процедуры выбора относятся к позиционным правилам выбора и являются процедурами голосования [8, 47]. Приведем краткое описание перечисленных выше процедур выбора.

#### 1. Минимаксная процедура.

Построим матрицу  $S^-$  такую, что  $\forall a, b \in X, S^- = (n(a, b))$ , где  $n(a, b) = \text{card}\{i \in N \mid aP_i b\}$ ,  $n(a, a) = -\infty$ . Коллективный выбор определяется как

$$x \in C(\vec{P}) \Leftrightarrow x \in \arg \min_{b \in A} \max_{a \in A} \{n(b, a)\}.$$

#### 2. Правило Борда.

Каждой альтернативе  $x \in A$  ставится в соответствие число  $r_i(x, \vec{P})$  равное мощности множества альтернатив, худших, чем  $x$  в критерии  $P_i \in \vec{P}$ , то есть  $r_i(x, \vec{P}) = |L_i(x)| = |\{b \in A : xP_i b\}|$ . Сумма данных значений для  $i \in N$  называется рангом Борда для альтернативы  $x$ ,

$$r(a, \vec{P}) = \sum_{i=1}^n r_i(a, P_i).$$

В выбор входят альтернативы с максимальным рангом

$$a \in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall b \in A, \quad r(a, \vec{P}) \geq r(b, \vec{P})].$$

### 3. Обратное правило простого большинства.

В выбор входят альтернативы, которые являются худшими по наименьшему числу критериев.

$$a \in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall x \in A \quad n^-(a, \vec{P}) = n^-(x, \vec{P})],$$

где  $n^-(a, \vec{P}) = \text{card}\{i \in N \mid \forall y \in A \setminus \{a\} \quad y P_i a\}$ .

### 4. Правило Блэка.

Определим отношения большинства  $\mu$  для профиля  $\vec{P}$ :

$$x \mu y \Leftrightarrow \text{card}\{i \in N \mid x P_i y\} > \text{card}\{i \in N \mid y P_i x\}.$$

Победителем Кондорсе  $CW(\vec{P})$  для профиля  $\vec{P}$  признается альтернатива, недоминируемая на отношении большинства  $\mu$ , т.е.

$$CW(\vec{P}) = [a \mid \exists x \in A, x \mu a].$$

Если существует победитель Кондорсе, то он объявляется коллективным выбором, иначе используется правило Борда.

### 5. Обратное правило Борда.

Каждой альтернативе  $x \in A$  ставится в соответствие число  $r_i(x, \vec{P})$  равное мощности множества альтернатив, худших, чем  $x$  в критерии  $P_i \in \vec{P}$ , то есть  $r_i(x, \vec{P}) = |L_i(x)| = |\{b \in A : x P_i b\}|$ . Сумма данных значений для  $i \in N$  называется рангом Борда для альтернативы  $x$

$$r(a, \vec{P}) = \sum_{i=1}^n r_i(a, P_i).$$

Для каждой альтернативы подсчитывается ранг Борда. Далее альтернатива с наименьшим рангом выбывает. Ранги Борда пересчитываются для множества альтернатив без выбывшей альтернативы. Процедура повторяется до тех пор, пока выбор не останется пустым. Необходимо отметить, что данное правило является суммационным.

## 6. Правило Хара.

Для каждой альтернативы подсчитывается количество первых мест в упорядочениях по критериям. Если с помощью правила простого большинства можно выбрать альтернативу, то процедура Хара останавливается. В противном случае из голосования выбывают альтернативы с наименьшим количеством первых мест. Процедура повторяется, пока выбор остается непустым. Данное правило является суммационным.

## 7. Правило относительного большинства.

В выбор входят альтернативы, которые являются лучшими для наибольшего числа критериев, т.е.

$$a \in C(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall x \in A \quad n^+(a, \vec{P}) \geq n^+(x, \vec{P})],$$

где  $n^+(a, \vec{P}) = \text{card}\{i \in N \mid \forall y \in A \ aP_i y\}$ .

## 8. Правило Нансона.

Подсчитывается ранг Борда для всех вариантов. Затем подсчитывается средняя оценка Борда и исключаются только те варианты  $x$  для которых оценка Борда ниже средней. Затем строится множество  $X = A \setminus \{x\}$ , и процедура применяется к суженному профилю  $\vec{P}/X$ . Процедура продолжается до тех пор, пока не останутся только неисключаемые варианты.

## 9. Правило Кумбса.

Исключается вариант, который считают худшим максимальное число избирателей. Затем профиль сужается до нового множества  $X$  и процедура продолжается до тех пор, пока не останутся только неисключаемые варианты. Отметим здесь разницу между правилом Кумбса и системой передачи голосов. В правиле Кумбса вычеркиваются худшие варианты, в то время как в системе передачи голосов вычеркиваются варианты, лучшие для минимального числа избирателей.

## 10. Процедура Симпсона.

Построим матрицу  $S^+$  такую, что  $\forall a, b \in X, S^+ = (n(a, b))$ , где  $n(a, b) = \text{card}\{i \in N \mid aP_i b\}$ ,  $n(a, a) = +\infty$ . Коллективный выбор определяется как

$$x \in C(\vec{P}) \Leftrightarrow x \in \arg \max_{a \in A} \min_{b \in A} \{n(a, b)\}.$$

## 11. Одношаговое правило надпорогового выбора с фиксированным значением порога.

Пусть на множестве  $A$  задан критерий  $\varphi(x)$ ,  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^1$ , а на множестве  $2^A$  задана функция порога  $V: 2^A \rightarrow \mathbb{R}^1$ , сопоставляющая каждому набору  $X \in 2^A$  пороговый уровень  $V^*$ . Правило надпорогового выбора представлено в виде следующего выражения:

$$\pi_{st}: y \in C(X) \Leftrightarrow (y \in X \& \varphi(y) \geq V^*).$$

## 12. Одношаговое правило надпорогового выбора со значением порога, зависящего от исходного набора данных.

Пусть на множестве  $A$  задан критерий  $\varphi(x)$ ,  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^1$ , а на множестве  $2^A$  задана функция порога  $V: 2^A \rightarrow \mathbb{R}^1$ , сопоставляющая каждому набору  $X \in 2^A$  пороговый уровень  $V(X)$ . Правило надпорогового выбора представлено в виде следующего выражения:

$$\pi_{st}: y \in C(X) \Leftrightarrow (y \in X \& \varphi(y) \geq V(X)).$$

13. Суперпозиция одношагового правила надпорогового выбора с фиксированным значением порога.

Данная процедура выбора представляет собой суперпозицию одношагового правила надпорогового выбора с фиксированным значением порога.

14. Суперпозиция одношагового правила надпорогового выбора со значением порога, зависящего от исходного набора данных.

Данная процедура выбора представляет собой суперпозицию одношагового правила надпорогового выбора со значением порога, зависящего от исходного набора данных.

Теперь перейдем к рассмотрению существующих нормативных условий.

#### 1.7.1.2 Нормативные условия

В [12, 26, 47] приведен набор нормативных условий, которыми могут обладать различные процедуры выбора:

- условия рациональности;
- условия монотонности;
- условие пороговой некомпенсируемости.

Приведем краткое описание этих условий.

##### Условия рациональности.

Выделяют четыре основных условия рациональности для функций выбора.

###### 1. Условие наследования (**H**)

$$\forall X, X' \in 2^A, X' \subseteq X \Rightarrow C(X') \supseteq C(X) \cap X'.$$

Пример 1.1. Допустим, выбор альтернатив осуществляется по обратному правилу простого большинства (см. далее). Рассмотрим следующий пример:

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
a	a	c	a	b

$$\begin{array}{ccccc}
 b & b & b & b & a \\
 c & c & a & c & c \\
 X = \{a, b, c\} \Rightarrow C(X) = \{b\}.
 \end{array}$$

Рассмотрим ситуацию, когда множество  $X$  не содержит альтернативу  $c$ :

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
a	a	b	a	b
b	b	a	b	a

$$X' = \{a, b\} \Rightarrow C(X') = \{a\}.$$

Условие Наследования (**H**) выполняется, если верно следующее выражение:

$$\{a\} \supseteq \{b\} \cap \{a, b\}.$$

Таким образом, условие Наследования (**H**) не выполняется.

## 2. Аксиома выбора Эрроу (**ACA**)

$$\forall X, X' \in 2^A, X' \subseteq X \Rightarrow \begin{cases} \text{если } C(X) = \emptyset, \text{ то } C(X') = \emptyset \\ \text{если } C(X) \cap X' \neq \emptyset, \text{ то } C(X') = C(X) \cap X' \end{cases}.$$

Рассмотрим предыдущий пример. Аксиома выбора Эрроу (**ACA**) выполняется, если верно следующее выражение:

$$\{a\} = \{b\} \cap \{a, b\}.$$

Таким образом, аксиома выбора Эрроу (**ACA**) не выполняется для предыдущего примера.

## 3. Условие согласия (**C**)

$$\forall X', X'' \in 2^A \rightarrow C(X' \cup X'') \supseteq C(X') \cap C(X'').$$

Рассмотрим предыдущий пример. Пусть  $X' = \{a, b\}$ ,  $X'' = \{a, c\}$ . Тогда  $C(X') = \{a\}$  и  $C(X'') = \{a\}$  соответственно. Условие согласия (**C**) выполняется, если верно следующее выражение:

$$\{b\} \supseteq \{a\} \cap \{a\}.$$

Таким образом, условие согласия (**C**) не выполняется.

#### 4. Условие отбрасывания (О)

$$\forall X, X' \in 2^A, X' \subseteq X \setminus C(X) \Rightarrow C(X \setminus X') = C(X).$$

Рассмотрим предыдущий пример. Пусть  $X' = \setminus C(X) = \{a, c\}$ .

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
a	a	c	a	a
c	c	a	c	c

$$X' = \{a, c\} \Rightarrow C(X') = \{a\}.$$

Условие отбрасывания (О) выполняется, если верно следующее выражение:

$$\{a\} = \{b\}.$$

Таким образом, условие отбрасывания (О) не выполняется.

Классическая рациональность включает выполнение условий **H**, **C** и **O**, т.е. условий наследования, отбрасывания и согласия. Условие **ACA** является усилением каждого из условий **H**, **C**, **O**.

#### Условия монотонности

Под условиями монотонности будем понимать следующие три условия.

##### 1. Условие монотонности 1:

$$\forall X \in 2^A, x \in C(\vec{P}), \forall \vec{P}, \vec{P}' : (\forall a, b \in X, a P_i b \Leftrightarrow a P'_i b \ \& \ \exists y \in X, y P_i x \Rightarrow x P'_i y) \Rightarrow x \in C(\vec{P}').$$

Объясним это условие. Предположим, что альтернатива  $x \in A$  выбирается при данных значениях альтернатив по критериям. Если изменить значение по различным критериям для альтернативы  $x$  так, что ее положение улучшается, а относительное сравнение пары любых других альтернатив по критериям остается неизменным, то альтернатива  $x$  по-прежнему будет выбрана.

Пример 1.2.

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
a	a	c	a	b
b	b	b	b	a
c	c	a	c	c

$$X = \{a, b, c\} \Rightarrow C(\vec{P}) = \{b\}.$$

Допустим, положение альтернативы  $b$  улучшилось.

$P'_1$	$P'_2$	$P'_3$	$P'_4$	$P'_5$
$a$	$b$	$c$	$a$	$b$
$b$	$a$	$b$	$b$	$a$
$c$	$c$	$a$	$c$	$c$

$$X = \{a, b, c\} \Rightarrow C(\vec{P}') = \{b\}.$$

Таким образом, условие монотонности выполняется для данного примера.

## 2. Условие монотонности 2:

$$\forall X \in 2^A, x, y \in C(X), X' = X \setminus \{x\}, X'' = X \setminus \{y\} \rightarrow x \in C(X'') \& y \in C(X').$$

Предположим, что альтернативы  $x, y \in A$  выбираются при данных значениях альтернатив по критериям. Условие выполняется, если при удалении альтернативы  $y$  альтернатива  $x$  будет выбрана, и наоборот.

Пример 1.3.

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$b$	$a$	$a$	$a$	$a$
$c$	$b$	$b$	$b$	$c$
$a$	$c$	$c$	$c$	$b$

$$X = \{a, b, c\} \Rightarrow C(X) = \{a, b\}.$$

Пусть  $X' = \{a, c\}$ ,  $X'' = \{b, c\}$ . Тогда  $C(X') = \{a\}$  и  $C(X'') = \{b\}$  соответственно.

Условие монотонности 2 выполняется, если верно следующее выражение:

$$\{a\} \in \{a\} \& \{b\} \in \{b\}.$$

Таким образом, условие монотонности 2 выполняется для данного примера.

## 3. Условие строгой монотонности

$$\forall X \in 2^A, \forall y \in X, y \notin C(\vec{P}), \forall \vec{P}, \vec{P}' : (\forall a, b \in X, a P_i b \Leftrightarrow a P'_i b \& a P_i y \Rightarrow y P'_i a)$$

$$\rightarrow C(\vec{P}') = \begin{cases} C(\vec{P}) \text{ или} \\ \{y\} \text{ или} \\ C(\vec{P}) \cup \{y\}. \end{cases}$$

Если изменить значение по различным критериям для не входящей в выбор альтернативы  $y \in A$  так, что ее положение улучшится, а относительное сравнение па-

ры любых других альтернатив по критериям останется неизменным, то итоговый выбор останется неизменным и/или будет содержать альтернативу  $y$ .

Пример 1.4. Допустим, выбор альтернатив осуществляется по правилу Борда (см. далее). Рассмотрим профили  $\vec{P}$  и  $\vec{P}'$ .

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$a$	$a$	$b$	$b$
$c$	$b$	$a$	$a$
$b$	$c$	$c$	$c$

$$X = \{a, b, c\}, r(a) = 6, r(b) = 5, r(c) = 1 \Rightarrow C(\vec{P}) = \{a\}.$$

Рассмотрим профиль  $\vec{P}'$ , который отличается от профиля  $\vec{P}$  тем, что положение альтернативы  $c$  улучшилось:

$P'_1$	$P'_2$	$P'_3$	$P'_4$
$c$	$a$	$b$	$b$
$a$	$b$	$a$	$a$
$b$	$c$	$c$	$c$

$$r(a) = r(b) = 5, r(c) = 2 \Rightarrow C(\vec{P}') = \{a, b\}.$$

Условие строгой монотонности выполняется, если верно следующее выражение:

$$\{a, b\} = \begin{cases} \{a\} \text{ или} \\ \{c\} \text{ или} \\ \{a, c\}. \end{cases}$$

Таким образом, условие строгой монотонности не выполняется.

### Условие пороговой некомпенсируемости

Рассмотрим две альтернативы  $x, y \in X$ , каждая из которых характеризуется набором критериев  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , где  $n$  – число критериев. Условие пороговой некомпенсируемости может быть сформулировано следующим образом.

$$\forall x, y \in X, \exists j \in \{1, \dots, n\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}: \varphi_i(x) > \varphi_j(y) \Rightarrow x > y.$$

Иначе говоря, низкие оценки по одному критерию не компенсируются высокими оценками по всем остальным критериям.

Пример 1.5. Допустим, выбор альтернатив осуществляется по правилу Борда (см. далее). Рассмотрим следующую ситуацию:

	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>
c	a	b	b	
a	b	a	a	
b	c	c	c	

Запишем этот пример в следующем виде:

X	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$
a	2	3	2	2
b	1	2	3	3
c	3	1	1	1

$$r(a) = r(b) = 5, r(c) = 2 \Rightarrow C(\vec{P'}) = \{a, b\}.$$

Другими словами, на данном профиле альтернатива *c* является наихудшей, а альтернативы *a* и *b* являются равнозначными.

Согласно условию пороговой некомпенсируемости, альтернатива *c* является наихудшей, так как она имеет наибольшее число минимальных оценок. В то же время альтернатива *b* хуже альтернативы *a*, так как имеет минимальную оценку по первому критерию. Поэтому можно сделать вывод, что для данного примера условие пороговой некомпенсируемости не выполняется.

Теперь, перейдем к рассмотрению двухступенчатых процедур выбора.

### 1.7.1.3 Двухступенчатые процедуры выбора

Приведем в Таблице 1.21 список двухступенчатых процедур выбора.

Таблица 1.21 – Двухступенчатые процедуры выбора

№	Этап 1	Этап 2
1	Минимаксная процедура	Минимаксная процедура
2		Обратное правило Борда
3		Обратное правило простого большинства
4		Правило Блэка
5		Правило Борда
6		Правило Хара
7	Обратное правило Борда	Минимаксная процедура
8		Обратное правило Борда
9		Обратное правило простого большинства
10		Правило Блэка
11		Правило Борда
12		Правило Хара

## Продолжение таблицы 1.21

13	Обратное правило простого большинства	Минимаксная процедура
14		Обратное правило Борда
15		Обратное правило простого большинства
16		Правило Блэка
17		Правило Борда
18		Правило Хара
19	Правило Блэка	Минимаксная процедура
20		Обратное правило Борда
21		Обратное правило простого большинства
22		Правило Блэка
23		Правило Борда
24		Правило Хара
25	Правило Борда	Минимаксная процедура
26		Обратное правило Борда
27		Обратное правило простого большинства
28		Правило Блэка
29		Правило Борда
30		Правило Хара

Таким образом, далее рассматриваются 30 различных двухступенчатых процедур выбора.

Перед тем как перейти к исследованию свойств данных процедур выбора, необходимо сделать несколько замечаний. Правило 8 «Обратное правило Борда – Обратное правило Борда» идентично Обратному правилу Борда, так как второй этап данной процедуры не приводит к каким-либо изменениям. Поэтому свойства данного правила совпадают со свойствами Обратного правила Борда.

После применения на первом этапе Обратного правила Борда в выбор входят только альтернативы с одинаковым рангом Борда. Соответственно, использование на втором этапе правил, в основе которых лежит подсчет ранга Борда, не приведет к каким-либо изменениям. Поэтому свойства правила 11, а также правила 12, когда победитель Кондорсе отсутствует, совпадают со свойствами Обратного правила Борда.

Кроме того, свойства правил выбора 19–24 полностью совпадают со свойствами правил выбора 25–30 в случае, когда победитель Кондорсе не был найден на первом этапе.

## 1.7.2 Исследование свойств процедур выбора

Исследование свойств рассматриваемых процедур выбора осуществлялось следующим образом. В случае, когда рассматриваемое свойство не выполняется, приводится пример, который опровергает выполнение данного свойства. Напротив, в случае, когда процедура выбора удовлетворяет рассматриваемому нормативному условию, приводится необходимое доказательство.

Полученные результаты сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1.8. Свойства, которым удовлетворяют приведенные выше процедуры выбора, приведены в Таблице 1.22 и Таблице 1.23.

Таблица 1.22 – Исследование нормативных свойств процедур выбора («+» – процедура выбора удовлетворяет нормативному условию, «–» – процедура выбора не удовлетворяет нормативному условию).

Процедуры выбора		Нормативные условия							
		Условия рациональности				Условия монотонности			
		Условие наследования (Н)	Аксиома выбора Эрроу (ACA)	Условие согласия (С)	Условие отbrasывания (О)	Условие монотонности 1	Условие монотонности 2	Условие строгой монотонности	Условие пороговой некомпенсируемости
Позиционные правила	Правило относительного большинства	–	–	–	–	+	–	–	–
	Обратное правило относительного большинства	–	–	–	–	+	–	–	–
	Правило Борда	–	–	–	–	+	–	–	–
	Обратная процедура Борда	–	–	–	–	–	–	–	–
	Правило Нансона	–	–	–	–	–	–	–	–
	Правило Кумбса	–	–	–	–	–	–	–	–
	Процедура Симпсона	–	–	–	–	+	+	–	–
	Минимаксная процедура	–	–	–	–	+	+	–	–
	Одношаговое правило надпорогового выбора с фиксированным значением порога	+	+	+	+	+	+	+	
	Одношаговое правило надпорогового выбора со значением порога, зависящего от исходного набора данных	–	–	–	–	+	+	–	
Надпороговое правило	Суперпозиция одношагового правила надпорогового выбора с фиксированным значением порога	+	+	+	+	+	+	+	–
	Суперпозиция одношагового правила надпорогового выбора со значением порога, зависящего от исходного набора данных	–	–	–	–	–	+	–	–

Таблица 1.23 – Исследование нормативных свойств двухступенчатых процедур выбора («+» – процедура выбора удовлетворяет нормативному условию, «–» – процедура выбора не удовлетворяет нормативному условию).

Процедуры выбора		Нормативные условия					
		Условия рациональности			Условия монотонности		
		Условие наследования (H)	Аксиома выбора Эрроу (ACA)	Условие согласия (C)	Условие отбрасывания (O)	Условие монотонности 1	Условие монотонности 2
Этап 1	Этап 2						
Минимаксная процедура	Минимаксная процедура	–	–	–	–	–	–
	Обратное правило Борда	–	–	–	–	–	–
	Обратное правило простого большинства	–	–	–	–	–	–
	Правило Блэка	–	–	–	–	–	–
	Правило Борда	–	–	–	–	–	–
	Правило Хара	–	–	–	–	–	–
Обратное правило Борда	Минимаксная процедура	–	–	–	–	–	–
	Обратное правило Борда	–	–	–	–	–	–
	Обратное правило простого большинства	–	–	–	–	–	–
	Правило Блэка	–	–	–	–	–	–
	Правило Борда	–	–	–	–	–	–
	Правило Хара	–	–	–	–	–	–
Обратное правило простого большинства	Минимаксная процедура	–	–	–	–	–	–
	Обратное правило Борда	–	–	–	–	–	–
	Обратное правило простого большинства	–	–	–	–	+	–
	Правило Блэка	–	–	–	–	+	–
	Правило Борда	–	–	–	–	+	–
	Правило Хара	–	–	–	–	–	–

Продолжение таблицы 1.23

Правило Блэка	Минимаксная процедура	–	–	–	–	+	–	–	–
	Обратное правило Борда	–	–	–	–	+	–	–	–
	Обратное правило простого большинства	–	–	–	–	+	–	–	–
	Правило Блэка	–	–	–	–	+	–	–	–
	Правило Борда	–	–	–	–	+	–	–	–
	Правило Хара	–	–	–	–	+	–	–	–
Правило Борда	Минимаксная процедура	–	–	–	–	+	–	–	–
	Обратное правило Борда	–	–	–	–	+	–	–	–
	Обратное правило простого большинства	–	–	–	–	+	–	–	–
	Правило Блэка	–	–	–	–	+	–	–	–
	Правило Борда	–	–	–	–	+	–	–	–
	Правило Хара	–	–	–	–	+	–	–	–

### 1.7.3 Некоторые выводы

В данном подразделе отчета приведены результаты исследования сорока двух различных процедур выбора на предмет удовлетворения нормативным условиям рациональности, монотонности и пороговой некомпенсируемости. Нормативные условия показывают, каким образом может быть изменен конечный выбор при изменении предъявляемого множества альтернатив, оценок альтернатив по критериям, набора критериев, по которым осуществляется выбор. Выявление того, какие процедуры выбора наименее устойчивы, а какие наиболее уязвимы к изменениям этих параметров, приводит к более глубокому пониманию работы существующих процедур выбора, фундаментальных свойств выбора, а также того, насколько постоянен (устойчив) и осмыслен набор альтернатив, полученный в результате применения заданной процедуры выбора. В результате исследования было выявлено, что двухступенчатые процедуры выбора 15–17, 19–30 удовлетворяют только условию монотонности. В остальных случаях ни одно из нормативных условий не выполняется для рассматриваемых двухступенчатых процедур выбора. Кроме того, была разработана программная реализация рассматриваемых процедур выбора.

Результаты исследований этого подраздела отражены в работе [59]:

Aleskerov F., Mitichkin E., Shvydun S., Yakuba V. Super-threshold Procedures and Their Application to the Search Problem// Procedia Computer Science, 17, 2013, pp.1121–1124.

## 2 Исследования по конструированию экономических механизмов

В этом разделе отчета приведены результаты исследований по конструированию экономических механизмов. Результаты в рамках исследования этого раздела были получены в следующих теоретических и прикладных направлениях:

- исследования организационных моделей и механизмов;
- теоретико-игровой анализ обобщенной задачи банкротства;
- некооперативный анализ картельных соглашений;
- развитие теории обобщенных паросочетаний и их применение.

### 2.1 Исследования организационных моделей и механизмов

Системы (сети) электроснабжения и их фрагменты принадлежат к числу важнейших организационных систем любой страны, поэтому анализ и оптимизация функционирования системы электроснабжения страны и отдельных фрагментов (частей) этой системы принадлежит к числу наиболее важных задач организационного управления, которые исследуются учеными разных стран мира как в области энергетики и экономики, так и в области прикладной математики [12, 35, 47, 55].

Одной из центральных проблем здесь является проблема отыскания оптимальной (с точки зрения согласованных интересов государства, производителей и потребителей электроэнергии, а также организаций, занимающихся передачей электроэнергии по высоковольтным линиям электропередач) конфигурации таких сетей с учетом динамики потребления (и истощения) ископаемых природных ресурсов и бурного роста интереса к использованию возобновляемых источников энергии, прежде всего, энергии ветра и солнца для получения электрической энергии. Другой, не менее важной проблемой, является проблема отыскания цен на электроэнергию, приемлемых как для производителей, так и для потребителей электроэнергии, с учетом возможности последних хранить электроэнергию в относительно небольших объемах,

зapasая ее в часы наименьшего спроса на нее в сети в течение суток и используя запасенную электроэнергию в часы пикового спроса в сети. Наконец, к числу важнейших организационных проблем, связанных с функционированием сетей электроснабжения, относится проблема построения хозяйственного механизма, делающего всех участников процесса производства и потребления электроэнергии заинтересованными в эффективном решении первых двух проблем [5, 15, 33, 54, 57].

Конфигурация как сети электроснабжения страны в целом, так и отдельных фрагментов (частей) этой сети существенно зависит от возможности получения и использования электроэнергии из возобновляемых источников энергии, прежде всего из энергии ветра и солнца, а также от возможностей хранения электроэнергии, как в больших, так и в малых объемах. Хотя на сегодняшний день считается, что электроэнергию трудно (или даже невозможно) хранить (по крайней мере, в значительных объемах), что в значительной мере определяет механизм распределения получаемой электроэнергии в рамках различных аукционов по продаже электроэнергии, имеющиеся результаты по разработке разных видов систем хранения электроэнергии [5, 15, 33, 54, 57] заставляют исследовать вопрос о том, как повлияет широкое внедрение систем хранения электроэнергии и возобновляемых источников энергии для получения электроэнергии, как на конфигурацию сетей электроснабжения страны и отдельных фрагментов (частей) этой сети, так и на механизмы ценообразования на электроэнергию, которые определяют способы ее распределения между пользователями сети.

Как первая, так и вторая сформулированная проблема находятся на «стыке наук» и создание инструментария для количественного анализа этих проблем, которое является задачей прикладной математики и информатики, представляет собой непростую, но актуальную задачу. Такой инструментарий должен, в частности, позволять а) количественно оценивать целесообразность и масштабы использования возобновляемых источников энергии для получения электроэнергии и систем хранения электроэнергии как при се-

годняшнем уровне развития соответствующих технологий получения электроэнергии, в частности, из энергии ветра и солнца, а также технологий хранения электроэнергии, так и с учетом перспектив их развития, б) оценивать справедливость розничных цен на электроэнергию для жителей регионов страны, которые устанавливаются производителями и оптовыми покупателями электроэнергии (без участия потребителей электроэнергии в жилых районах региона) в результате торгов на аукционах по продаже электроэнергии (справедливость которых вызывает сомнения у жителей многих стран, где аукционы по продаже электроэнергии по существу определяют розничные цены на электроэнергию).

Актуальность создания указанного инструментария диктуется как бурным развитием технологий получения электроэнергии из альтернативных (возобновляемых) источников электроэнергии и систем хранения электроэнергии, так и естественным нежеланием пользователей сети электроснабжения "переплачивать" за покупаемую электроэнергию, что, по мнению многих пользователей, имеет место, по крайней мере, в ряде развитых стран мира. Новизна предложенного подхода обусловлена, прежде всего, ориентацией анализа функционирования фрагмента сети электроснабжения на согласование интересов пользователей сети электроснабжения страны (или фрагментов этой сети), производителей электроэнергии и оптовых покупателей электроэнергии, в то время как в большинстве работ, исследуются проблемы взаимодействия только производителей и оптовых покупателей электроэнергии в рамках аукционов по продаже электроэнергии. Насколько известно авторам исследования, инструментарий, который мог бы быть использован для анализа функционирования фрагмента сети электроснабжения с целью определения, например, оптимальной подачи электроэнергии генерирующей подстанцией, обслуживающей часть сети электроснабжения, в условиях неопределенности спроса на электроэнергию и возможности хранения электричества и получения электроэнергии из возобновляемых источников энергии, в настоящее время отсутствует.

В настоящей части отчета первые две из трех указанных выше проблем рассматриваются в рамках создания такого инструментария, позволяющего как получать количественную оценку оптимальной подачи электроэнергии в условиях неопределенности, так и оценивать целесообразность и масштабы использования альтернативных источников энергии для получения электроэнергии при существующих и при перспективных технологиях преобразования энергии. Заметим, что задача государственного регулирования использования различных источников энергии, может рассматриваться и в рамках соединения механизма организации государственно-частного партнерства [38]. В частности, рассматривается проблема оценки оптимальной подачи электроэнергии генерирующей подстанцией, обслуживающей часть сети электроснабжения в условиях неопределенности спроса на электроэнергию и возможности хранения электричества и получения электроэнергии из возобновляемых источников энергии. В ней изложены результаты работы автора в части анализа того, какой должна быть структура отдельных фрагментов (частей) сети электроснабжения страны, в рамках которой интересы, как производителей электроэнергии, так и пользователей этих фрагментов сети электроснабжения оказываются согласованными в смысле объемов электроэнергии, требуемых пользователями в разное время суток, и ценами на электроэнергию, по которой производителям электроэнергии выгодно ее продавать этим пользователям.

Предложена математическая модель для анализа функционирования фрагмента сети электроснабжения, в рамках которого электроэнергия вырабатывается как традиционными генераторами (работающими на ископаемом топливе), а также атомными и гидроэлектростанциями, так и получается из энергии ветра и солнца, а функционирование фрагмента сети рассматривается как игра нескольких лиц, в которой исследуется существование и возможность вычисления равновесия. Для этой игры устанавливаются достаточные условия равновесия и показывается возможность отыскания этого равновесия

(в разрешимых играх) из решения трех вспомогательных задач линейного программирования, две из которых образуют двойственную пару.

### 2.1.1 Постановка задачи

Как известно [9, 10] система (сеть) электроснабжения любой страны является системой, в которой интересы по крайне мере четырех групп крупных пользователей требуют согласования. К числу этих пользователей относятся:

- а) компаний (генераторы), производящие электроэнергию в больших объемах;
- б) распределительные компании, которые используют низковольтные распределительные сети для доставки электроэнергии пользователям системы;
- в) компаний, передающие электроэнергию по высоковольтным линиям электропередач;
- г) пользователи, получающие электроэнергию (через низковольтные линии) или напрямую от генератора (который передает электроэнергию на эти низковольтные линии по высоковольтным линиям электропередач) или через упомянутые выше распределительные компании.

В настоящее время существуют две конкурирующие точки зрения по вопросу о том, как должна функционировать система электроснабжения страны. В соответствии с первой точкой зрения генераторы должны заключать долгосрочные контракты с крупными пользователями по снабжению их определенными объемами электроэнергии на постоянной основе, в то время как оставшаяся электроэнергия, произведенная генераторами, должна продаваться всем заинтересованным пользователям посредством аукционов [10]. В соответствии со второй точкой зрения, вся производимая электроэнергия должна быть продана на аукционах. Однако, независимо от того какая точка зрения окажется преобладающей, интенсивное использование энергии солнца и ветра в качестве возобновляемых источников энергии для получения электричества имеет принципиальное значение, хотя их эффективное использо-

зование зависит от имеющихся в настоящее время технологических возможностей по хранению электроэнергии как в больших так и малых объемах.

Первый сценарий управления системой электроснабжения (который соответствует первой точке зрения) требует, чтобы генераторы ежечасно производили определенный постоянный уровень электроэнергии и использовали так называемые пиковые генераторы для покрытия спроса, который может превосходить этот постоянный объем производства электроэнергии в силу неопределенности, связанной с поведением потребителей в какой-либо части системы в части потребления электроэнергии. (Избыточная электроэнергия, которая может быть образовываться в сети результате низкого спроса пользователей в течение конкретного времени суток, может быть преобразована, например, в потенциальную энергию воды в резервуаре, расположенному на определенной высоте, например, в искусственном озере и т.д.) Однако необходимо оценить какой постоянный уровень производства электроэнергии будет оптимальным для каждого генератора, поскольку физические законы производства электроэнергии обуславливают весьма значительные финансовые затраты на многократное (например, ежечасное в течение суток) изменение этих постоянных объемов.

В рамках второго сценария (который соответствует второй точке зрения), как перепроизводство, так и недопоставка электроэнергии генераторами нежелательна, поэтому оценка указанного выше оптимального постоянного объема производства электроэнергии при любом неопределенном спросе на электроэнергию со стороны пользователей также целесообразна.

В настоящем отчете рассматривается часть системы электроснабжения страны, в рамках которой взаимодействуют:

- а) компания (или группа компаний, действующих как одно юридическое лицо), которая является генератором (или считается генератором) электроэнергии, производящим и продающим электричество пользователям части сети (далее в настоящем отчете называемая генератором);

- б) компания (или группа компаний, действующих как одно юридическое лицо), предлагающая услуги по передаче электроэнергии через высоковольтные линии электропередач от генератора к пользователям (далее в настоящем отчете называемая транспортирующей компанией);
- в) компании, снабжающие электричеством индивидуальных пользователей в промышленных и жилых районах через низковольтные распределительные линии электропередач (далее в настоящем отчете называемые распределительными компаниями);
- г) промышленные предприятия и крупные бизнесы, которые получают электричество непосредственно от генератора в рамках прямых контрактов (далее в настоящем отчете называемые промышленными пользователями);
- д) группы пользователей, имеющие лицензии на право оперировать низковольтные распределительные сети передачи электроэнергии, через которые электричество попадает к ним непосредственно от генератора, а не через распределительные компании (далее в настоящем отчете называемые группами продвинутых пользователей);
- е) индивидуальные пользователи, которые могут получать электроэнергию только через указанные выше распределительные компании (далее в настоящем отчете называемые жителями);
- ж) компания (или группа компаний, действующих как одно юридическое лицо), которая является (или считается) пиковым генератором, производящим и продающим электроэнергию всем указанным выше пользователям, когда реальный спрос пользователей на электричество в рассматриваемой части сети электроснабжения превышает объем электроэнергии, поставляемой генератором (далее в настоящем отчете называемая пиковым генератором).

Предполагается, что каждая распределительная компания, каждый промышленный пользователь и каждая группа продвинутых пользователей владеет или может приобрести оборудование (или может иметь доступ к оборудованию)

дованию) как для хранения электроэнергии в определенных объемах, так и для преобразования энергии солнца и ветра в электроэнергию.

Также предполагается, что известны следующие параметры сети электроснабжения:

- а) средний, минимальный и максимальный ежечасный спрос для каждой группы пользователей в течение суток,
- б) средний, минимальный и максимальный суммарный ежечасный спрос на электричество для индивидуальных пользователей в течение суток;
- в) максимальная мощность генератора по производству электроэнергии наряду с потерями при транспортировке энергии через линии электропередач и стоимость передачи единицы электроэнергии для каждой категории пользователя сети электроснабжения;
- г) оценки минимального и максимального часового объема электроэнергии для всех пользователей, получающих эту энергию в течение суток, стоимость эксплуатации оборудования для преобразования энергии солнца и ветра в электроэнергию, а также мощность и стоимость использования оборудования для хранения электроэнергии.

Наконец, предполагается, что генератор продает электроэнергию крупным пользователям электросети по прямым контрактам, заключаемым с ними.

Исходя из указанных предположений, требуется определить:

- а) оптимальный постоянный объем электроэнергии, который должен производиться генератором в разрезе каждого часа в течение суток;
- б) цены на электроэнергию для каждой группы пользователей рассматриваемой части сети электроснабжения;
- в) целесообразность хранения электроэнергии и преобразования энергии солнца и ветра в электроэнергию для каждого типа пользователей сети.

### 2.1.2 Математическая формулировка задачи

Пусть:

$m$  – число промышленных пользователей в пределах рассматриваемой части сети электроснабжения,

$n$  – число распределительных компаний, имеющих доступ к низковольтным сетям передачи электроэнергии, через которые индивидуальные пользователи части сети получают электричество,

$r$  – число групп продвинутых пользователей, имеющих лицензию на эксплуатацию существующих низковольтных распределительных сетей электроэнергии непосредственно, а не через распределительные компании,

$Y^g(l)$  – объем электроэнергии, производимой генератором в период времени от  $l - 1$  до  $l$  часа,  $l \in \overline{1, 24}$ ,

$y_i^g(l)$  – часть объема электроэнергии, производимой генератором, которая покупается промышленным пользователем  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$  в период времени от  $l - 1$  до  $l$  часа,  $l \in \overline{1, 24}$ ,

$z_j^g(l)$  – часть объема электроэнергии, производимой генератором, которая покупается распределительной компанией  $j$ ,  $j \in \overline{1, n}$  в период времени от  $l - 1$  до  $l$  часа,  $l \in \overline{1, 24}$ ,

$u_k^g(l)$  – часть объема электроэнергии, производимой генератором, который покупается группой продвинутых пользователей  $k$ ,  $k \in \overline{1, r}$  в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ .

Будем рассматривать следующие предположения о модели.

Предположение 1 [10]. Потеря энергии при передаче электроэнергии ко всем вышеуказанным крупным пользователям в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ , в пределах определенного «рабочего сегмента» электроэнергии, производимой генератором, может быть описана кусочно-линейной функцией от объема электроэнергии производимой генератором

$$\max_{\lambda_l \in 1, \Lambda_l} (a_{\lambda_l} + b_{\lambda_l} Y^g(l)), l \in \overline{1, 24},$$

где  $a_{\lambda_l} + b_{\lambda_l} Y^g(l)$ ,  $\lambda_l \in \overline{1, \Lambda_l}$ ,  $a_{\lambda_l}, b_{\lambda_l} \in R^1$  линейные функции переменных  $Y^g(l), l \in \overline{1, 24}$ , так что объем электроэнергии, который должен быть произведен генератором в течение периода времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$  (чтобы обеспечить указанных выше потребителей объемами электроэнергии  $y_i^g(l)$ ,  $z_j^g(l)$  и  $u_k^g(l)$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ) равняется

$$Y^g(l) = \left( \sum_{i=1}^m y_i^g(l) + \sum_{j=1}^n z_j^g(l) + \sum_{k=1}^r u_k^g(l) \right) + \max_{\lambda_l \in 1, \Lambda_l} (a_{\lambda_l} + b_{\lambda_l} Y^g(l)),$$

$$l \in \overline{1, 24}. \quad (2.1)$$

Замечание 2.1. Это предположение отражает возможность аппроксимации функции, описывающей потерю электроэнергии при транспортировке электроэнергии в сети электроснабжения от генератора к крупному пользователю, с помощью кусочно-линейной функции. Действительно, как известно из физики транспортировки электроэнергии, потеря электроэнергии в конкретной линии электропередач пропорциональна квадрату передаваемого объема энергии (при условии, что напряжение на этой линии электропередач поддерживается постоянно), которая является выпуклой функцией от этого объема. (Здесь коэффициент пропорциональности зависит от длины линии электропередач, диаметра проводника, свойств материала из которого сделан проводник (сопротивление), и от значения указанного напряжения.)

Далее, пусть:

$p_i^y(l)$  – цена, по которой единица объема электроэнергии продается генератором промышленному пользователю  $i, i \in \overline{1, m}$  в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ ;

$p_j^z(l)$  – цена, по которой единица объема электроэнергии продается генератором распределительной компании  $j, j \in \overline{1, n}$  в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ ;

$p_k^u(l)$  – цена, по которой единица объема электроэнергии продается генератором группе продвинутых пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$  в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ ;

$y^g = (y_1^g(1), \dots, y_1^g(24); y_2^g(1), \dots, y_2^g(24); \dots; y_m^g(1), \dots, y_m^g(24))$  – вектор, чья компонента  $y_i^g(l)$  представляет собой объем электроэнергии, который покупается промышленным пользователем  $i$  от генератора в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, i \in \overline{1, m}, l \in \overline{1, 24}$ ;

$p^y = (p_1^y(1), \dots, p_1^y(24); p_2^y(1), \dots, p_2^y(24); \dots; p_m^y(1), \dots, p_m^y(24))$  – вектор, чья компонента  $p_i^y(l)$  представляет собой цену за единицу объема электроэнергии, которая продается промышленному пользователю  $i$  от генератора в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, i \in \overline{1, m}, l \in \overline{1, 24}$ ;

$z^g = (z_1^g(1), \dots, z_1^g(24); z_2^g(1), \dots, z_2^g(24); \dots; z_n^g(1), \dots, z_n^g(24))$  – вектор, чья компонента  $z_j^g(l)$  представляет собой объем электроэнергии, который покупается распределительной компанией  $j$  от генератора в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, j \in \overline{1, n}, l \in \overline{1, 24}$ ;

$p^z = (p_1^z(1), \dots, p_1^z(24); p_2^z(1), \dots, p_2^z(24); \dots; p_n^z(1), \dots, p_n^z(24))$  – вектор, чья компонента  $p_j^z(l)$  представляет собой цену за единицу объема электроэнергии, которая продается распределительной компании  $j$  от генератора в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, j \in \overline{1, n}, l \in \overline{1, 24}$ ;

$u^g = (u_1^g(1), \dots, u_1^g(24); u_2^g(1), \dots, u_2^g(24); \dots; u_r^g(1), \dots, u_r^g(24))$  – вектор, чья компонента  $u_k^g(l)$  представляет собой объем электроэнергии, который покупается группой продвинутых пользователей  $k$  от генератора в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, k \in \overline{1, r}, l \in \overline{1, 24}$ ;

$p^u = (p_1^u(1), \dots, p_1^u(24); p_2^u(1), \dots, p_2^u(24); \dots; p_r^u(1), \dots, p_r^u(24))$  – вектор, чья компонента  $p_k^u(l)$  представляет собой цену за единицу объема электроэнергии, которая продается группе продвинутых пользователей  $k$  от генератора в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $k \in \overline{1, r}$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ .

Предположение 2 [10]. Генератор может продавать электроэнергию по любым (конкурентоспособным) ценам, которые могут быть различны для различных категорий пользователей в различные периоды времени, при условии, что эти цены не нарушают права потребителей, которые имеют пользователи сети электроснабжения в рамках существующих законов страны.

Замечание 2.2. Объем электроэнергии, продаваемой генератором всем пользователям сети, совпадает с объемом электроэнергии, потребляемой этими пользователями.

Предположение 3 [10]. В пределах определенного «рабочего сегмента» производства электроэнергии расходы генератора, связанные с производством этой электроэнергии, могут быть описаны кусочно-линейной функцией.

Замечание 2.3. Указанные выше затраты генератора могут быть описаны неубывающей выпуклой функцией [34], и эта функция может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией вида [10]

$$\max_{\mu_l \in \overline{1, \Gamma_l}} (c_{\mu_l} + b_{\mu_l} Y^g(l)), l \in \overline{1, 24},$$

где  $c_{\mu_l} + b_{\mu_l} Y^g(l)$ ,  $c_{\mu_l}, b_{\mu_l} \in R^1$  линейные функции переменных  $Y^g(l)$ ,  $l \in \overline{1, 24}$  (в пределах вышеуказанного «рабочего сегмента» производства электроэнергии).

Предположение 4 [10]. Транспортирующая компания получает оплату, как с генератора, так и со всех крупных пользователей рассматриваемой части сети электроснабжения за транспортировку электричества. Цены за транспортировку единицы объема электричества постоянны как для генератора, так и для всех крупных пользователей сети электроснабжения, хотя они могут быть различны для различных пользователей. Мощность линий электро-

передачи достаточна для удовлетворения максимального спроса всех пользователей, которые используют эти линии электропередач для получения электроэнергии.

Предположение 5 [10]. Стоимость обслуживания оборудования, обеспечивающего функционирование линий электропередач, считается фиксированной и не зависящей от транспортируемого объема электроэнергии и от расстояния между генератором, который использует эти линии электропередач и потребителями электричества, получающего это электричество от генератора.

Предположение 6. С целью упрощения дальнейшего рассмотрения закономерностей, описывающих функционирование сети электроснабжения, предполагается, что генератор состоит только из одного предприятия. Подход к определению оптимальной загрузки нескольких предприятий, производящих электроэнергию и в совокупности составляющих генератор, предлагается в [9, 10].

Функционирование генератора при его взаимодействии с пользователями электроснабжения может быть описано следующей математической моделью [10]:

$$\langle \epsilon, Y^g \rangle - (\langle \epsilon^y, y^g \rangle + \langle \epsilon^z, z^g \rangle + \langle \epsilon^u, u^g \rangle) - \langle \epsilon, MAX_{loss}(Y^g) \rangle = 0,$$

$$H_{min} \leq \langle \epsilon, Y^g \rangle \leq H_{max} \quad (2.2)$$

$$\langle y^g, p^y \rangle + \langle z^g, p^z \rangle + \langle u^g, p^u \rangle - \langle \epsilon, MAX_{expen}(Y^g) \rangle - \Psi(Y^g) \rightarrow \max_{(p^y, p^z, p^u)},$$

где  $Y^g = (Y^g(1), \dots, Y^g(24))$ ,  $\epsilon, \epsilon^y, \epsilon^z, \epsilon^u$  – векторы соответствующих размеров, все компоненты которых равны 1,  $H_{min}$  и  $H_{max}$  – соответственно минимальная и максимальная технологически допустимая суточная мощность генератора,  $\Psi(Y^g)$  – функция, описывающая расходы генератора, связанные с транспортировкой электроэнергии к пользователям сети электроснабжения (математическое выражение для этой функции приведено далее в тексте этой части отчета)

$$MAX_{loss}(Y^g) = \left( \max_{\lambda_1 \in 1, \Lambda_1} (a_{\lambda_1}^1 + b_{\lambda_1}^1 Y^g(1)), \dots, \max_{\lambda_{24} \in 1, \Lambda_{24}} (a_{\lambda_{24}}^{24} + b_{\lambda_{24}}^{24} Y^g(24)) \right),$$

$$MAX_{expen}(Y^g) = \left( \max_{\mu_1 \in 1, \Gamma_1} (c_{\mu_1}^1 + d_{\mu_1}^1 Y^g(1)), \dots, \max_{\mu_{24} \in 1, \Lambda_{24}} (c_{\mu_{24}}^{24} + d_{\mu_{24}}^{24} Y^g(24)) \right),$$

и выполняются неравенства для цен  $p^y \leq \hat{p}^y$ ,  $p^z \leq \hat{p}^z$ ,  $p^u \leq \hat{p}^u$ , где векторы  $\hat{p}^y$ ,  $\hat{p}^z$ ,  $\hat{p}^u$  отражают текущий уровень цен на рынке электроэнергии.

Для построения математической модели, описывающей взаимодействие всех групп пользователей сети электроснабжения с генератором и с транспортирующей компанией, необходимо математически описать функционирование каждого пользователя из каждой группы и транспортирующей компании. Эти описания, приведенные в [10], должны включать описания функционирования каждого промышленного пользователя, каждой группы про-двинутых пользователей, каждой распределительной компании и транспортирующей компании.

Для описания функционирования каждого пользователя рассмотрим следующие переменные и параметры:

$y_i^\omega(l)$  – объем электроэнергии, получаемой промышленным пользователем

$i, i \in \overline{1, m}$  из энергии ветра в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$y_i^s(l)$  – объем электроэнергии, получаемой  $i, i \in \overline{1, m}$  из энергии солнца в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$y_i^{st}(l)$  – объем электроэнергии, который промышленный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  может получить из своей системы хранения электроэнергии в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$y_i^{st}(0)$  – объем электроэнергии, который имеется в системе хранения электроэнергии промышленного пользователя  $i, i \in \overline{1, m}$  к началу суток;

$y_i^{st+}$  – максимальный объем электроэнергии, который может храниться в системе хранения электроэнергии промышленного пользователя  $i, i \in \overline{1, m}$ ;

$\Delta_i^y$  – коэффициент, отражающий средние ежечасные потери электроэнергии, связанные с хранением единицы объема электроэнергии в системе хранения электроэнергии промышленного пользователя  $i$ ,  $0 \leq \Delta_i^y \leq 1$ ,  $i \in \overline{1, m}$ ;

$\lambda_i^{y\omega}$  – средние часовые затраты промышленного пользователя  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , которые связаны с получением электроэнергии из энергии ветра;

$\lambda_i^{ys}$  – средние часовые затраты промышленного пользователя  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , которые связаны с получением электроэнергии из энергии солнца;

$\pi_i^y$  – средние часовые затраты промышленного пользователя  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , которые связаны с хранением единицы объема электроэнергии в его системе хранения электроэнергии;

$z_j^\omega(l)$  – объем электроэнергии, получаемой распределительной компанией  $j$ ,  $j \in \overline{1, n}$  из энергии ветра в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$z_j^s(l)$  – объем электроэнергии, получаемой распределительной компанией  $j$ ,  $j \in \overline{1, n}$  из энергии солнца в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$z_j^{st}(l)$  – объем электроэнергии, который распределительная компания  $j$ ,  $j \in \overline{1, n}$  может получить из своей системы хранения электроэнергии в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$z_j^{st}(0)$  – объем электроэнергии, который имеется в системе хранения электроэнергии распределительной компании  $j$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ;

$z_j^{st+}$  – максимальный объем электроэнергии, который может храниться в системе хранения электроэнергии распределительной компании  $j$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ;

$\Delta_j^z$  – коэффициент, отражающий средние ежечасные потери электроэнергии, связанные с хранением единицы объема электроэнергии в системе хранения электроэнергии распределительной компании  $j$ ,  $0 \leq \Delta_j^z \leq 1$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ;

$\lambda_j^{z\omega}$  – средние часовые затраты распределительной компании  $j, j \in \overline{1, n}$ , которые связаны с получением электроэнергии из энергии ветра;

$\lambda_j^{zs}$  – средние часовые затраты распределительной компании  $j, j \in \overline{1, n}$ , которые связаны с получением электроэнергии из энергии ветра;

$\pi_j^z$  – средние часовые затраты распределительной компании  $j, j \in \overline{1, n}$ , которые связаны с хранением единицы объема электроэнергии в ее системе хранения электроэнергии;

$u_k^\omega(l)$  – объемы электроэнергии, получаемой группой продвинутых пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$  из энергии ветра в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$u_k^s(l)$  – объем электроэнергии, получаемой группой продвинутых пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$  из энергии солнца в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$u_k^{st}(l)$  – объем электроэнергии, который группа продвинутых пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$  может получить из своей системы хранения электроэнергии в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$u_k^{st}(0)$  – объем электроэнергии, который имеется в системе хранения электроэнергии продвинутой группы пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$ ;

$u_k^{st+}$  – максимальный объем электроэнергии, который может храниться в системе хранения электроэнергии продвинутой группы пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$ ;

$\Delta_k^u$  – коэффициент, отражающий средние ежечасные потери электроэнергии, связанные с хранением единицы объема электроэнергии в системе хранения электроэнергии продвинутой группы пользователей  $k$ ,  $0 \leq \Delta_k^u \leq 1$ ,  $k \in \overline{1, r}$ ;

$\lambda_k^{u\omega}$  – средние часовые затраты продвинутой группы пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$ , которые связаны с получением электроэнергии из энергии ветра;

$\lambda_k^{us}$  – средние часовые затраты продвинутой группы пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$ , которые связаны с получением электроэнергии из энергии солнца;

$\pi_k^u$  – средние часовые затраты продвинутой группы пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$ , которые связаны с хранением единицы объема электроэнергии в ее системе хранения электроэнергии.

Построим систему ограничений, связывающую эти переменные и параметры в описании баланса электроэнергии, которая поступает в систему хранения электроэнергии каждого из этих пользователей и выходит из нее в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ . В [10] предлагается выбирать указанные ограничения в виде систем линейных уравнений и неравенств.

Далее, пусть [10]:

$\theta^y$  – вектор, у которого компонента  $\theta_i^y$  является ценой, по которой транспортирующая компания предоставляет свои услуги генератору по транспортировке единицы объема электроэнергии от генератора к промышленному пользователю  $i, i \in \overline{1, m}$  в течение часа, причем предполагается, что эта цена не меняется в течение суток;

$\theta^z$  – вектор, у которого компонента  $\theta_j^z$  является ценой, по которой транспортирующая компания предоставляет свои услуги генератору по транспортировке единицы объема электроэнергии от генератора к распределительной компании  $j, j \in \overline{1, n}$  в течение часа, причем предполагается, что эта цена не меняется в течение суток;

$\theta^u$  – вектор, у которого компонента  $\theta_k^u$  является ценой, по которой транспортирующая компания предоставляет свои услуги генератору по транспортировке единицы объема электроэнергии от генератора к группе продвинутых пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$  в течение часа, причем предполагается, что эта цена не меняется в течение суток;

$\theta$  – цена, которую генератор платит транспортирующей компании за единицу объема электроэнергии, которая теряется при передаче электроэнергии от

генератора к пользователям сети электроснабжения, причем предполагается, что эта цена не меняется в течение суток;

$s^y$  – вектор, у которого компонента  $s_i^y$  является ценой, по которой транспортирующая компания предоставляет свои услуги промышленному пользователю  $i$   $i \in \overline{1, m}$  по транспортировке единицы объема электроэнергии от генератора к этому пользователю в течение часа, причем предполагается, что эта цена не меняется в течение суток;

$s^z$  – вектор, у которого компонента  $s_j^z$  является ценой, по которой транспортирующая компания предоставляет свои услуги распределительной компании  $j$   $j \in \overline{1, n}$  по транспортировке единицы объема электроэнергии от генератора к этой распределительной компании в течение часа, причем предполагается, что эта цена не меняется в течение суток;

$s^u$  – вектор, у которого компонента  $s_k^u$  является ценой, по которой транспортирующая компания предоставляет свои услуги группе продвинутых пользователей  $k$   $k \in \overline{1, r}$  по транспортировке единицы объема электроэнергии от генератора к этой группе продвинутых пользователей в течение часа, причем предполагается, что эта цена не меняется в течение суток.

Для векторно-матричного описания взаимодействия всех групп пользователей сети электроснабжения с генератором и с транспортирующей компанией введем следующие обозначения [10]:

$$y_i^g = (y_i^g(1), \dots, y_i^g(24)); y_i^\omega = (y_i^\omega(1), \dots, y_i^\omega(24)); y_i^s = (y_i^s(1), \dots, y_i^s(24));$$

$$p_i^y = (p_i^y(1), \dots, p_i^y(24)); \lambda_i^{y\omega}(av) = (\lambda_i^{y\omega}, \dots, \lambda_i^{y\omega}); \lambda_i^{ys}(av) = (\lambda_i^{ys}, \dots, \lambda_i^{ys});$$

$$y_i^{st} = (y_i^{st}(1), \dots, y_i^{st}(24)); i \in \overline{1, m}, \lambda_i^{y\omega}(av), \lambda_i^{ys}(av) \in R_+^{24};$$

$$z_j^g = (z_j^g(1), \dots, z_j^g(24)); z_j^\omega = (z_j^\omega(1), \dots, z_j^\omega(24)); z_j^s = (z_j^s(1), \dots, z_j^s(24));$$

$$p_j^z = (p_j^z(1), \dots, p_j^z(24)); \lambda_j^{z\omega}(av) = (\lambda_j^{z\omega}, \dots, \lambda_j^{z\omega}); \lambda_j^{zs}(av) = (\lambda_j^{zs}, \dots, \lambda_j^{zs});$$

$$z_j^{st} = \left( z_j^{st}(1), \dots, z_j^{st}(24) \right); j \in \overline{1, n}, \lambda_j^{z\omega}(av), \lambda_j^{zs}(av) \in R_+^{24};$$

$$u_k^g = \left( u_k^g(1), \dots, u_k^g(24) \right); u_k^\omega = \left( u_k^\omega(1), \dots, u_k^\omega(24) \right); u_k^s = \left( u_k^s(1), \dots, u_k^s(24) \right);$$

$$p_k^u = \left( p_k^u(1), \dots, p_k^u(24) \right); \lambda_k^{u\omega}(av) = (\lambda_k^{u\omega}, \dots, \lambda_k^{u\omega}); \lambda_k^{us}(av) = (\lambda_k^{us}, \dots, \lambda_k^{us});$$

$$u_k^{st} = \left( u_k^{st}(1), \dots, u_k^{st}(24) \right); k \in \overline{1, r}, \lambda_k^{u\omega}(av), \lambda_k^{us}(av) \in R_+^{24}.$$

Принимая во внимание, что

$$y^g = (y_1^g, y_2^g, \dots, y_m^g); z^g = (z_1^g, z_2^g, \dots, z_n^g); u^g = (u_1^g, u_2^g, \dots, u_k^g),$$

$$p^y = (p_1^y, p_2^y, \dots, p_m^y); p^z = (p_1^z, p_2^z, \dots, p_n^z); p^u = (p_1^u, p_2^u, \dots, p_k^u),$$

ПОЛОЖИМ

$$\tilde{y} = (y^g; y_1^\omega, y_2^\omega, \dots, y_m^\omega; y_1^s, y_2^s, \dots, y_m^s; y_1^{st}, y_2^{st}, \dots, y_m^{st}),$$

$$\tilde{p}^y = (p^y; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0),$$

$$\tilde{q}^y = (0; \lambda_1^{y\omega}(av), \dots, \lambda_m^{y\omega}(av); \lambda_1^{ys}(av), \dots, \lambda_m^{ys}(av); \pi_1^y, \dots, \pi_m^y),$$

$$\tilde{z} = (z^g; z_1^\omega, z_2^\omega, \dots, z_n^\omega; z_1^s, z_2^s, \dots, z_n^s; z_1^{st}, z_2^{st}, \dots, z_n^{st}),$$

$$\tilde{p}^z = (p^z; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0),$$

$$\tilde{q}^z = (0; \lambda_1^{z\omega}(av), \dots, \lambda_n^{z\omega}(av); \lambda_1^{zs}(av), \dots, \lambda_n^{zs}(av); \pi_1^z, \dots, \pi_n^z),$$

$$\tilde{u} = (u^g; u_1^\omega, u_2^\omega, \dots, u_k^\omega; u_1^s, u_2^s, \dots, u_k^s; u_1^{st}, u_2^{st}, \dots, u_k^{st}),$$

$$\tilde{p}^u = (p^u; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0),$$

$$\tilde{q}^u = (0; \lambda_1^{u\omega}(av), \dots, \lambda_k^{u\omega}(av); \lambda_1^{us}(av), \dots, \lambda_k^{us}(av); \pi_1^u, \dots, \pi_k^u),$$

так что

$$\langle y^g, p^y \rangle = \langle \tilde{y}, \tilde{p}^y \rangle, \langle z^g, p^z \rangle = \langle \tilde{z}, \tilde{p}^z \rangle, \langle u^g, p^u \rangle = \langle \tilde{u}, \tilde{p}^u \rangle.$$

Тогда можно показать [10], что целевые функции (крупных) пользователей части сети электроснабжения могут быть записаны следующим образом:

a) для промышленного пользователя  $i, i \in \overline{1, m}$

$$\langle \tilde{y}, \tilde{p}^y \rangle_i + \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i s_i^y + \langle \tilde{q}^y, \tilde{y} \rangle_i \rightarrow \min_{(\tilde{y})_i}, i \in \overline{1, m}, \quad (2.3)$$

где  $\langle \tilde{y}, \tilde{p}^y \rangle_i$  – часть скалярного произведения векторов  $\tilde{y}$  и  $\tilde{p}^y$ , относящаяся к промышленному пользователю  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$  и  $\langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i$ ,  $\langle \tilde{q}^y, \tilde{y} \rangle_i$  имеют тот же смысл;

б) для распределительной компании  $j, j \in \overline{1, n}$

$$\langle \tilde{z}, \tilde{p}^z \rangle_j + \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j s_j^z + \langle \tilde{q}^z, \tilde{z} \rangle_j \rightarrow \min_{(\tilde{z})_j}, j \in \overline{1, n}; \quad (2.4)$$

в) для группы продвинутых пользователей  $k$   $k \in \overline{1, r}$

$$\langle \tilde{u}, \tilde{p}^u \rangle_k + \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k s_k^u + \langle \tilde{q}^u, \tilde{u} \rangle_k \rightarrow \min_{(\tilde{u})_k}, k \in \overline{1, r}, \quad (2.5)$$

в то время как целевая функция генератора может быть записана как

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \langle \tilde{y}, \tilde{p}^y \rangle_i + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{z}, \tilde{p}^z \rangle_j + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{u}, \tilde{p}^u \rangle_k - \\ & \theta \sum_{l=1}^{24} \max_{\lambda_l \in \underline{1, \Lambda_l}} (a_{\lambda_l}^l + b_{\lambda_l}^l Y^g(l)) - \sum_{l=1}^{24} \max_{\mu_l \in \underline{1, \Gamma_l}} (c_{\mu_l}^l + d_{\mu_l}^l Y^g(l)) - \\ & \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j \theta_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k \theta_k^u \right) \rightarrow \max_{(\tilde{p}^y, \tilde{p}^z, \tilde{p}^u)}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\epsilon}^y = (\epsilon^y; 0, \dots, 0)$ ,  $\tilde{\epsilon}^z = (\epsilon^z; 0, \dots, 0)$ ,  $\tilde{\epsilon}^u = (\epsilon^u; 0, \dots, 0)$  и  $\langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i$ ,  $\langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j$  и  $\langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k$  – части скалярных произведений векторов  $\langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle$ ,  $\langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle$  и  $\langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle$ , относящиеся к промышленному пользователю  $i$ , распределительной компании  $j$  и группе продвинутых пользователей  $k$ , соответственно,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $k \in \overline{1, r}$  и  $\langle \tilde{q}^y, \tilde{y} \rangle_i$ ,  $\langle \tilde{q}^z, \tilde{z} \rangle_j$ ,  $\langle \tilde{q}^u, \tilde{u} \rangle_k$  понимаются аналогично. Как и ранее,  $\epsilon^y$ ,  $\epsilon^z$  и  $\epsilon^u$  – векторы соответствующих размеров, все компоненты которых равны 1.

Целевая функция транспортирующей компании записывается в виде

$$\left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j \theta_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k \theta_k^u \right) +$$

$$\theta \sum_{l=1}^{24} \max_{\lambda_l \in \overline{1, \Lambda_l}} \left( a_{\lambda_l}^l + b_{\lambda_l}^l Y^g(l) \right) + \quad (2.6)$$

$$+ \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i s_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j s_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k s_k^u \right) \rightarrow \max_{(\theta^y, \theta^z, \theta^u, s^y, s^z, s^u)}.$$

Взаимодействие всех пользователей сети электроснабжения, генератора и транспортирующей компании в пределах части сети электроснабжения страны может быть описана как игра  $(m + n + r + 2)$  лиц, в которых платежными функциями игроков являются функции (2.3)–(2.6):

### Игра 1

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \langle \tilde{y}, \tilde{p}^y \rangle_i + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{z}, \tilde{p}^z \rangle_j + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{u}, \tilde{p}^u \rangle_k - \\ & \theta \sum_{l=1}^{24} \max_{\lambda_l \in \overline{1, \Lambda_l}} \left( a_{\lambda_l}^l + b_{\lambda_l}^l Y^g(l) \right) - \sum_{l=1}^{24} \max_{\mu_l \in \overline{1, \Gamma_l}} \left( c_{\mu_l}^l + d_{\mu_l}^l Y^g(l) \right) - \\ & \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j \theta_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k \theta_k^u \right) \rightarrow \max_{(\tilde{p}^y, \tilde{p}^z, \tilde{p}^u)}, \\ & \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j \theta_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k \theta_k^u \right) + \theta \sum_{l=1}^{24} \max_{\lambda_l \in \overline{1, \Lambda_l}} \left( a_{\lambda_l}^l + b_{\lambda_l}^l Y^g(l) \right) \\ & + \\ & + \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i s_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j s_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k s_k^u \right) \rightarrow \max_{(\theta^y, \theta^z, \theta^u, s^y, s^z, s^u)}, \\ & \langle \tilde{y}, \tilde{p}^y \rangle_i + \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i s_i^y + \langle \tilde{q}^y, \tilde{y} \rangle_i \rightarrow \min_{(\tilde{y})_i}, \quad i \in \overline{1, m}, \\ & \langle \tilde{z}, \tilde{p}^z \rangle_j + \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j s_j^z + \langle \tilde{q}^z, \tilde{z} \rangle_j \rightarrow \min_{(\tilde{z})_j}, \quad j \in \overline{1, n}, \\ & \langle \tilde{u}, \tilde{p}^u \rangle_k + \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k s_k^u + \langle \tilde{q}^u, \tilde{u} \rangle_k \rightarrow \min_{(\tilde{u})_k}, \quad k \in \overline{1, r}, \end{aligned}$$

$$(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, Y^g) \in \Omega, (\tilde{p}^y, \tilde{p}^z, \tilde{p}^u) \in M, (\theta_1^y, \dots, \theta_m^y, \theta_1^z, \dots, \theta_n^z, \theta_1^u, \dots, \theta_k^u) \in T,$$

$$(s_1^y, \dots, s_m^y, s_1^z, \dots, s_n^z, s_1^u, \dots, s_k^u) \in S.$$

Далее, рассмотрим следующую вспомогательную игру 3х лиц:

### Игра 2

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \langle \tilde{y}, \tilde{p}^y \rangle_i + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{z}, \tilde{p}^z \rangle_j + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{u}, \tilde{p}^u \rangle_k - \\ & \theta \sum_{l=1}^{24} \max_{\lambda_l \in 1, \Lambda_l} (a_{\lambda_l}^l + b_{\lambda_l}^l Y^g(l)) - \sum_{l=1}^{24} \max_{\mu_l \in 1, \Gamma_l} (c_{\mu_l}^l + d_{\mu_l}^l Y^g(l)) - \\ & \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j \theta_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k \theta_k^u \right) \rightarrow \max_{(\tilde{p}^y, \tilde{p}^z, \tilde{p}^u)}, \\ & \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j \theta_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k \theta_k^u \right) + \theta \sum_{l=1}^{24} \max_{\lambda_l \in 1, \Lambda_l} (a_{\lambda_l}^l + b_{\lambda_l}^l Y^g(l)) \\ & + \\ & + \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i s_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j s_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k s_k^u \right) \rightarrow \max_{(\theta^y, \theta^z, \theta^u, s^y, s^z, s^u)}, \\ & \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{y}, \tilde{p}^y \rangle_i + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{z}, \tilde{p}^z \rangle_j + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{u}, \tilde{p}^u \rangle_k \right) \\ & + \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{q}^y, \tilde{y} \rangle_i + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{q}^z, \tilde{z} \rangle_j + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{q}^u, \tilde{u} \rangle_k \right) + \\ & + \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i s_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j s_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k s_k^u \right) \rightarrow \min_{(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u})}. \end{aligned}$$

Обе игры рассматриваются на выпуклых многогранниках  $\Omega$ ,  $M$ ,  $T$  и  $S$ , которые являются множествами допустимых стратегий игроков, и эти вы-

пуклые многогранники могут быть описаны совместными системами линейных неравенств [10]. (Простой метод для выяснения совместности таких систем линейных неравенств предложен в [8].) Эти выпуклые многогранники образованы линейными неравенствами, которые включают двусторонние ограничения на каждую переменную, наряду с линейными ограничениями на суммы подмножеств переменных и/или на сумму всех переменных, управляемых каким-либо из игроков. Ограничения отражают в частности, верхние ограничения на объемы потребления электроэнергии и на цены на электроэнергию, а также закономерности описывающие функционирование систем хранения электроэнергии, которые могут использовать пользователи участка сети электроснабжения. Также ограничения на конкретные суммы взвешенных переменных могут присутствовать в системах ограничений, описывающих указанные выпуклые многогранники.

Следует иметь в виду, что хотя оптимальные объемы производства, определяются с помощью предложенной модели (Игры 1 и 2) для каждого часа, эта модель позволяет определять оптимальный постоянный объем производства электроэнергии генератором в течение суток, что достигается путем добавления неравенств  $Y^g(l) = Y^g(l + 1), l \in \overline{1,23}$  в систему ограничений, описывающих выпуклый многогранник  $\Omega$ . Более того, предложенная модель позволяет анализировать справедливость цен, которые пользователи сети электроснабжения должны платить генератору (или распределительным компаниям) и транспортирующей компании в рамках существующего подхода к определению этих цен, а именно, когда эти цены устанавливаются в результате проведения аукционов, на которых продается электроэнергия.

Также при анализе конкретной сети электроснабжения (или конкретной части сети электроснабжения) следует принимать во внимание форму использования систем хранения электроэнергии пользователем сети. Например, при формулировке Игры 1 рассматривалась только переменная цена использования систем хранения, которая зависит от объема хранимой электроэнергии. По существу это соответствует случаю аренды систем хранения электро-

энергии пользователем сети на условиях, в соответствие с которыми пользователь платит только за арендованный «объем» в системе хранения электроэнергией (при условии, что этот «объем» не превосходит некоторого оговоренного предела). Однако, постоянные затраты связанные с приобретением или постройкой систем хранения электроэнергии могут быть легко учтены в модели, которые используются при формулировке обеих вышеупомянутых игр.

Как нетрудно заметить, в то время как Игра 1 является игрой  $(m + n + r + 2)$  лиц, в которой стратегии  $m + n + r$  игроков (т.е. стратегии всех пользователей рассматриваемой части сети электроснабжения) связаны в силу ограничений из системы (2.1), которые присутствуют в описании выпуклого многогранника  $\Omega$ , Игра 2 является игрой трех лиц на многогранниках (вообще говоря) несвязанных стратегий игроков (если конечно, некоторые ограничения связывающие переменные из множеств  $\Omega$ ,  $M$ ,  $T$  и  $S$  включены в описание стратегий игроков), и оказывается, что равновесие во вспомогательной игре с несвязанными стратегиями игроков определяют стратегии игроков в исходной игре со связанными стратегиями игроков.

Необходимо заметить, что функция  $\Psi(Y^g)$ , которая является функцией описывающей расходы генератора связанные с транспортировкой электроэнергии пользователям сети имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi(Y^g) = \theta \sum_{l=1}^{24} \max_{\lambda_l \in 1, \Lambda_l} & \left( a_{\lambda_l}^l + b_{\lambda_l}^l Y^g(l) \right) \\ & + \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\epsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\epsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j \theta_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\epsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k \theta_k^u \right). \end{aligned}$$

Для того чтобы упростить анализ вспомогательной игры запишем ее в векторной форме, для чего введем следующие векторные переменные:

$$\tilde{y} = (\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}); \tilde{x} = (\tilde{p}^y, \tilde{p}^z, \tilde{p}^u); \delta = (\tilde{q}^y, \tilde{q}^z, \tilde{q}^u);$$

$$\tilde{\theta}_i^y = (\theta_i^y, \dots, \theta_i^y) \in R_+^{24}; \tilde{\theta}_j^z = (\theta_j^z, \dots, \theta_j^z) \in R_+^{24}; \tilde{\theta}_k^u = (\theta_k^u, \dots, \theta_k^u) \in R_+^{24};$$

$$\tilde{s}_i^y = (s_i^y, \dots, s_i^y) \in R_+^{24}; \tilde{s}_j^z = (s_j^z, \dots, s_j^z) \in R_+^{24}; \tilde{s}_k^u = (s_k^u, \dots, s_k^u) \in R_+^{24};$$

$$i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, n}, k \in \overline{1, r},$$

$$\tilde{\theta}^y = (\tilde{\theta}_1^y, \dots, \tilde{\theta}_m^y); \tilde{\theta}^z = (\tilde{\theta}_1^z, \dots, \tilde{\theta}_m^z); \tilde{\theta}^u = (\tilde{\theta}_k^u, \dots, \tilde{\theta}_k^u);$$

$$\tilde{s}^y = (\tilde{s}_1^y, \dots, \tilde{s}_m^y); \tilde{s}^z = (\tilde{s}_1^z, \dots, \tilde{s}_m^z); \tilde{s}^u = (\tilde{s}_k^u, \dots, \tilde{s}_k^u);$$

$$\tilde{t} = (\tilde{\theta}^y; 0, 0, \dots, 0, \tilde{\theta}^z; 0, 0, \dots, 0, \tilde{\theta}^u; 0, 0, \dots, 0),$$

$$\tilde{s} = (\tilde{s}^y; 0, 0, \dots, 0, \tilde{s}^z; 0, 0, \dots, 0, \tilde{s}^u; 0, 0, \dots, 0),$$

где все нулевые компоненты векторов  $\tilde{t}$  и  $\tilde{s}$  соответствуют компонентам векторов  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  и  $\tilde{u}$ .

$$(y_1^\omega, y_2^\omega, \dots, y_m^\omega; y_1^s, y_2^s, \dots, y_m^s; y_1^{st}, y_2^{st}, \dots, y_m^{st}),$$

$$(z_1^\omega, z_2^\omega, \dots, z_n^\omega; z_1^s, z_2^s, \dots, z_n^s; z_1^{st}, z_2^{st}, \dots, z_n^{st}),$$

$$(u_1^\omega, u_2^\omega, \dots, u_k^\omega; u_1^s, u_2^s, \dots, u_k^s; u_1^{st}, u_2^{st}, \dots, u_k^{st}),$$

Далее, пусть

$$\hat{y} = (\tilde{y}, Y^g), \hat{x} = (\tilde{x}, 0^Y), \hat{t} = (\tilde{t}, 0^Y), \hat{s} = (\tilde{s}, 0^Y), \Delta = (\delta, 0^Y),$$

Пусть все компоненты вектора  $\epsilon \in R_+^{24}$  равны 1, пусть вектор  $0^Y$  имеет тот же размер что и вектор  $Y^g$ , пусть  $\hat{0}$  является нулевым вектором того же размера что и вектор  $\tilde{y}$ , и пусть  $\hat{b}_{\lambda_l}^l = (\hat{0}, \tilde{b}_{\lambda_l}^l)$ ,  $\hat{d}_{\mu_l}^l = (\hat{0}, \tilde{d}_{\mu_l}^l)$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ , где  $\tilde{b}_{\lambda_l}^l, \tilde{d}_{\mu_l}^l \in R_+^{24}$  являются векторами все компоненты которых равны нулю, кроме компонент с номером  $l$ , которые равны  $b_{\lambda_l}^l$  и  $d_{\mu_l}^l$ , соответственно. Тогда,  $b_{\lambda_l}^l Y^g(l) = \langle \hat{b}_{\lambda_l}^l, \hat{y} \rangle$ ,  $\lambda_l \in \overline{1, \Lambda_l}$  и  $d_{\mu_l}^l Y^g(l) = \langle \hat{d}_{\mu_l}^l, \hat{y} \rangle$ ,  $\mu_l \in \overline{1, \Gamma_l}$ ,  $l \in \overline{1, 24}$  так что векторы  $MAX_{loss}(Y^g)$ ,  $MAX_{expen}(Y^g)$  могут быть записаны как  $MAX_{loss}(\hat{y})$ ,  $MAX_{expen}(\hat{y})$ , соответственно.

Тогда Игра 2 может быть записана в виде:

### Игра 3

$$\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle - \langle \hat{y}, \hat{t} \rangle - \langle \theta \epsilon, MAX_{loss}(\hat{y}) \rangle - \langle \epsilon, MAX_{expen}(\hat{y}) \rangle \rightarrow \max_{\hat{x} \in \hat{M}}$$

$$\langle \hat{y}, \hat{t} \rangle + \langle \hat{y}, \hat{s} \rangle + \langle \theta \epsilon, MAX_{loss}(\hat{y}) \rangle \rightarrow \max_{(\hat{t}, \hat{s}) \in \hat{T} \times \hat{S}},$$

$$\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle + \langle \hat{y}, \hat{s} \rangle + \langle \Delta, \hat{y} \rangle \rightarrow \min_{\hat{y} \in \hat{\Omega}},$$

где множества  $\hat{M}$ ,  $\hat{T}$ ,  $\hat{S}$ ,  $\hat{\Omega}$  образованы теми же самыми ограничениями, которые образуют множества  $M$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $\Omega$ , соответственно (хотя они связывают векторные переменные  $\hat{x}$ ,  $\hat{t}$ ,  $\hat{s}$  и  $\hat{y}$ , соответственно), и, как и раньше,  $\epsilon \in R_+^{24}$  является вектором, все компоненты которого равны 1.

Наконец, рассмотрим вспомогательную игру двух лиц на выпуклых многогранниках стратегий игроков  $\hat{\Omega}$  и  $\hat{M} \times \hat{S}$  [10]:

#### Игра 4

$$(\hat{y}^*, (\hat{x}^*, \hat{s}^*)) \in Sp_{(\hat{y}, (\hat{x}, \hat{s})) \in \hat{\Omega} \times (\hat{M} \times \hat{S})}(\langle \hat{y}, \hat{x} + \hat{s} \rangle + \langle \Delta, \hat{y} \rangle),$$

которая является игрой с несвязанными стратегиями игроков (в предположении об отсутствии дополнительных ограничений связывающие переменные  $\hat{y}$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{t}$  и  $\hat{s}$ ).

#### 2.1.3 Основной результат

Утверждение 2.1. Четверка векторов  $(\hat{y}^*, \hat{x}^*, \hat{t}^*, \hat{s}^*)$  является точкой равновесия в Игре 3 тогда и только тогда, когда тройка векторов  $(\hat{y}^*, (\hat{x}^*, \hat{s}^*))$  является седловой точкой в Игре 4 и справедливо включение  $\hat{t}^* \in Argmax_{\hat{t} \in \hat{T}} \langle \hat{y}^*, \hat{t} \rangle$ .

Пусть  $Y^g = (Y^g(1), \dots, Y^g(24))$ .

Утверждение 2.2. Любая точка равновесия

$$((\tilde{y}^*, \tilde{z}^*, \tilde{u}^*, (Y^g)^*), ((\tilde{p}^y)^*, (\tilde{p}^z)^*, (\tilde{p}^u)^*), \\ ((\tilde{\theta}^y)^*, (\tilde{\theta}^z)^*, (\tilde{\theta}^u)^*), ((\tilde{s}^y)^*, (\tilde{s}^z)^*, (\tilde{s}^u)^*))$$

в Игре 2 является точкой равновесия в Игре 1.

Доказательство утверждений 2.1 и 2.2 приведено в [10].

#### 2.1.4 Некоторые выводы

1. В рассмотренной проблеме отыскания оптимального постоянного объема производства электроэнергии генератором, обслуживающим часть системы электроснабжения страны, конкурентоспособность возобновляемых источников энергии при производстве электроэнергии, а также конкурентоспособность систем хранения электроэнергии на существующем рынке электроэнергии анализируется путем отыскания справедливой доли рынка, которую традиционные генераторы электроэнергии (работающие на ископаемых видах сырья (угле, нефти, и т.д.), а также атомные и гидроэлектростанции могут «захватить», исходя из стоимости производства электроэнергии из всех известных источников.

2. Следует иметь в виду, что предложенная модель легко распространяется на случай, когда возможности инвестирования, связанные с развитием систем для получения электроэнергии из энергии ветра и солнца, рассматриваются также и генератором. (В модели, рассмотренной в настоящем разделе отчета и в статье [10], эти возможности анализируются применительно лишь к пользователям сети электроснабжения, т.е. к промышленным пользователям, распределительным компаниям и продвинутым группам пользователей.) Вообще говоря, некоторые известные модели, которые используются для оценки стратегий инвестирования потенциальных инвесторов в систему электроснабжения, которые учитывают стохастическую природу как спроса пользователей, так и наличие энергии полученной из возобновляемых источников энергии [44], могут быть использованы при описании возможностей инвестирования в рамках подхода к анализу части системы электроснабжения страны, предложенного в [10] и рассмотренного в настоящем отчете.

3. Хотя достаточно детальные математические модели, описывающие функционирование систем хранения электроэнергии [28, 36] могут быть включены в модель для анализа функционирования системы электроснабже-

ния страны или некоторой ее части, преимуществом модели, рассмотренной в настоящем отчете, является линейность ее ограничений. Именно эта линейность позволяет использовать методы линейного программирования для отыскания точек равновесия в системах большого размера, которыми являются системы электроснабжения, несмотря на то, что платежные функции игроков в соответствующих играх (Играх 1 и 2, формулируемых с использованием этой модели) являются нелинейными. Эта особенность модели существенно упрощает анализ равновесий и позволяет проводить многократные вычисления для любых наборов значений стоимости использования как возобновляемых источников энергии для получения электроэнергии, так и систем хранения электроэнергии. Таким образом, использование этой модели может существенно упростить оценку целесообразности использования возобновляемых источников энергии и систем хранения электроэнергии, а также масштаба их использования как при существующих, так и при ожидаемых ценах на электроэнергию. Ясно также, что указанное выше свойство линейности ограничений позволяет эффективно рассчитывать равновесие в системе электроснабжения с использованием предложенной модели, даже если размер предложенной модели весьма существенен, что может соответствовать ситуации, когда анализируются конкретные периоды времени (неделя, месяц, год и т.д.) с конкретными временными интервалами (минуты, часы, недели и т.д.).

Результаты исследования данного подраздела отражены в работах [9, 10]:

1. Belenky A. Analyzing the expediency of incorporating renewable sources of energy and electricity storages into a part of an electric grid// Applied Energy (To appear in December 2014).
2. Belenky A. An approach to quantitatively analyzing the expediency of incorporating new sources of energy in an electric grid// Conference “Network Models in Economics and Finance”, National Technical University of Athens, June 13–15, 2013, Abstracts, 2013.

## 2.2 Теоретико-игровой анализ обобщенной задачи банкротства

В этом подразделе рассмотрен новый подход к задаче распределения имущества банкрота. Классическая задача модифицирована путем добавления долговых связей между кредиторами. С помощью моделей кооперативной теории игр, найдено одноточечное решение для обобщенной задачи.

В классической проблеме банкротства [6, 41] рассматривается задача распределения имущества одного банкрота между несколькими кредиторами, при этом заведомо известно, что не все кредиторы смогут в полном объеме вернуть одолженные средства. Данный подход использовался для анализа множества задач, в частности задачи управления радиочастотами [37], музеями [14], проблеме аэропорта [30] и других задачам распределения.

В классической задаче фирма становится банкротом и не все кредиторы могут вернуть свои долги полностью. Банкротство ведет к снижению богатства кредиторов, что в свою очередь может привести к новым банкротствам, если у кредитора есть свои долги. Проблема состоит в нахождении лучшего в некотором смысле способа распределения имущества банкрота. Традиционные подходы использовали информацию только о величине долгов и размере имущества банкрота и не рассматривали проблему возникновения новых банкротств. В данном исследовании предложена обобщенная модель банкротства, в которой учтены долги между кредиторами. Такая постановка отражает существующую на практике проблему возможных последующих банкротств после раздела имущества первого банкрота. Финансовый кризис 2008–2009 актуализировал проблему банкротств крупных предприятий и банков. Неурегулированное банкротство одного агента способно вызвать каскад последующих банкротств. Одним из решений проблемы «слишком велик, чтобы рухнуть» (англ. “too big to fail problem”) стала государственная поддержка, в тоже время данное исследование демонстрирует возможность решения без использования дополнительных средств.

### 2.2.1 Описание модели

Агент 0 становится банкротом. Его имущество  $E_0 \in \mathbb{R}_+$  (бесконечно делимый однородный товар или деньги) разделяется между  $n$  кредиторами,  $\mathcal{N} := \{1, \dots, n\}$ . Долг банкрота каждому кредитору описывается вектором долгов  $c \in \mathbb{R}_+^n$ . Проблема банкротства это пара  $(E_0, c) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n$  такая, что  $\sum_{i \in \mathcal{N}} c_i > E_0$ . Подробный обзор этой задачи можно найти в [50].

Задача состоит в обобщении модели на случай, когда кроме первоначального банкрота все остальные агенты являются и кредиторами и заемщиками, более того каждый обладает собственным имуществом.

Обобщенная проблема банкротства это тройка  $(E, c, C)$ , где  $E \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  – вектор первоначальных запасов имущества агентов,  $(E_0, c)$  – классическая проблема банкротства,  $C$  – неотрицательная матрица межкредиторских долгов ( $c_{ij} \geq 0$  сумма, которую агент  $i$  должен агенту  $j$ ) и никто не должен больше чем сумма его имущества и причитающихся ему долгов

$$E_i + c_i + \sum_{p \in \mathcal{N}} c_{pi} \geq \sum_{p \in \mathcal{N}} c_{ip}, i \in \mathcal{N}.$$

Баланс агента  $i$  определяется как сумма, имеющаяся в распоряжении агента при полной уплате и возврате всех долгов

$$B_i = E_i + c_i + \sum_{p \in \mathcal{N}} c_{pi} - \sum_{p \in \mathcal{N}} c_{ip} \geq 0.$$

Суммарный баланс по всем кредиторам равен

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} B_i = \sum_{i \in \mathcal{N}} (E_i + c_i).$$

В соответствии с некоторым решением по разделу имущества банкрота агент  $i$  получит вместо долга  $c_i$  сумму  $f_i$ . Так как  $c_i - f_i \geq 0$ , то итоговый баланс

$$\Delta_i = E_i + f_i + \sum_{p \in \mathcal{N}} c_{pi} - \sum_{p \in \mathcal{N}} c_{ip}$$

может принимать значение любого знака. Если этот баланс отрицателен, то агент становится банкротом.

### 2.2.2 Основные результаты

Рассмотрим простую игру «Банкрот / Не банкрот», в которой коалиция объявляется банкротом, если её суммарный итоговый баланс отрицателен

$$v_{\pm}(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in S} \Delta_i \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При создании коалиции игроки погашают внутренние долги, объединяют свои первоначальные богатства, платежи от агента 0 и других игроков, а также собственные долги. Так как  $\sum_{i \in \mathcal{N}} \Delta_i = \sum_{i \in \mathcal{N}} (E_i + f_i) = \sum_{i \in \mathcal{N}} E_i + E_0 \geq 0$ , то  $v_{\pm}(\mathcal{N}) = 1$ , (предполагается, что распределение эффективно, т.е.  $\sum_{i \in \mathcal{N}} f_i = E_0$ ). В экономике достаточно денег, что избежать банкротства гранд-коалиции, но избежать банкротства в общем случае невозможно.

Теорема 2.1. Ядро игры “Банкрот / Не банкрот” пусто.

Данная простая игра показывает невозможность нахождения решения  $f_i$ , гарантирующего отсутствие дальнейших банкротств. Причина данного результата в том, что решение  $f_i$  определялось экзогенно, а не внутри игры. Долг банкрота должен делиться с учетом долговых связей между кредиторами.

Для общности добавим агента 0 (банкрота) как отдельного игрока в кооперативную игру, определим  $B_0 := 0$  и  $\mathcal{N}^+ := \mathcal{N} \cup \{0\}$ . Агенты объединяются в коалицию, суммируя все свои долги. Определим минимально гарантированный выигрыш коалиции  $S \subset \mathcal{N}$  как сумму, оставшуюся после выплат всех долгов  $\sum_{i \in S} E_i - \sum_{i \in \mathcal{N}^+ \setminus S} (B_i - E_i) = \sum_{i \in \mathcal{N}^+} E_i - \sum_{i \in \mathcal{N}^+ \setminus S} B_i$ , если данная величина положительна. Коалиции  $S$  достаются все деньги в экономике, за вычетом суммы балансов контроалиции при условии, что остаётся положительная величина

$$v_L(S) := \left( \sum_{i \in \mathcal{N}^+} E_i - \sum_{i \in \mathcal{N}^+ \setminus S} B_i \right)_+$$

Теорема 2.2. Игра  $(\mathcal{N}^+, \nu_{\mathcal{L}})$  является выпуклой.

Выпуклость игры влечет за собой существование компромиссного решения, ядра [48]. Так как характеристическая функция игры принимает только неотрицательные значения, то в ядре будут лежать решения, гарантирующие отсутствие последующих банкротств.

Проблема ядра в неоднозначности решения. Рассмотрим другие концепции решения, удовлетворяющие свойству одноточечности. Для построения этого решения воспользуемся свойством согласованности. Некоторая коалиция  $S$  забирает свой выигрыш  $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$  и покидает игру. Решение новой игры, без коалиции  $S$ , должно давать оставшемуся множеству игроков  $\mathcal{N} \setminus S$  прежний выигрыш. Это своего рода независимость от последовательности выплат выигравших. При изменении множества игроков определяется редуцированная игра.

Макс-редуцированная игра (max-reduced game)  $r_{\mathcal{N}'}^x(\nu)$  игры  $(\mathcal{N}, \nu)$  на коалицию  $\mathcal{N}'$  для решения  $x \in X'$  определяется так

$$r_{\mathcal{N}'}^x(\nu)(T) = \begin{cases} \nu(\mathcal{N}) - \nu(\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}'), & T = \mathcal{N}', \\ \max_{Q \subseteq \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}'} [\nu(T \cup Q) - x(Q)], & \emptyset \neq T \subsetneq \mathcal{N}', \\ 0, & T = \emptyset. \end{cases}$$

Решение  $\sigma$  игры  $(\mathcal{N}, \nu)$  согласовано по Дэвису–Машлеру (или просто согласованно), если для любой коалиции  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$  из  $x \in \sigma(\mathcal{N}, \nu)$  следует, что  $x_{\mathcal{N}'} \in \sigma(\mathcal{N}', r_{\mathcal{N}'}^x(\nu))$  [18, 19], где  $x_{\mathcal{N}'}$  – это вектор без координат, соответствующих игрокам  $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}'$ .

Наша задача предъявляет к решению специфические требования. Никто не должен стать банкротом ( $x_i \geq 0$ ), и не должен получить больше своего баланса ( $x_i \leq B_i$ ).

Лемма 2.1. Если  $x_i \geq 0$ ,  $x_i \leq B_i$   $i \in \mathcal{N}$ , то  $r_{\mathcal{N}'}^x$  действует на  $\nu_{\mathcal{L}}$  транзитивно.

Так как оператор редукции позволяет остаться в рамках допустимых дежей, то по теореме Соболева получаем одноточечное решение.

Теорема 2.3 [43, 49]. Пред- $N$ -ядро (пренуклоелус) является единственным решением игры  $(\mathcal{N}, \nu_L)$ , которое удовлетворяет свойствам одноточечности, редуцирования, ковариантности и анонимности.

Данное решение гарантирует полное распределение имущества банкрота и не приводит к новым банкротствам. Так как используется нуклеолус – концепция решения, минимизирующая эксцессы каждой коалиции, то неудовлетворенность каждой коалиции ограничено.

Модифицируя задачу ближе к реальной практике применения, упорядочим кредиторов по очередности получения долга в соответствии с законом о банкротстве. Для такого упорядоченного разбиения игроков существует единственное решение, удовлетворяющее ряду аксиоматических свойств.

Теорема 2.4 [29]. Во множестве выпуклых игр одноточечное решение удовлетворяет эффективности, однородности, индивидуальной рациональности, нуль-независимости и макс-согласованности тогда и только тогда когда это решение является последовательным нуклеолусом.

В данном решении последовательно на каждом подмножестве агентов имущество банкрота делится исходя из концепции нуклеолуса.

### 2.2.3 Некоторые выводы

В данном подразделе отчета разработана модель обобщенной проблемы банкротства. Новая постановка ближе к реальной экономической практике, чем классическая постановка, так как включает в себя систему межкредиторских долгов. Для данной задачи показано существование ядра в ассоциированной с проблемой игре.

Построено одноточечное решение (пренуклеолус), гарантирующее отсутствие дальнейших банкротств. Данное решение решает проблему банкротства крупных должников без необходимости внешнего финансирования.

Используя некоторые принципы законодательства о банкротстве и последние результаты в области кооперативной теории игр предложено к ис-

пользованию единственное решение, удовлетворяющее аксиоматическим свойствам – последовательный нуклеолус. Данное решение ближе к применению на практике, так как учитывает иерархию должников.

Результаты исследования данного подраздела отражены в работе [32]:  
Kagrov A., Yurkov S. Generalized bankruptcy problem// Working papers by NRU Higher School of Economics, series FE "Financial Economics", 8, 2012.

### 2.3 Некооперативный анализ картельных соглашений

В этом подразделе приведены результаты исследования по некооперативному анализу картельных соглашений.

Ценовой сговор между фирмами – производителями однородной продукции широко распространен, хотя и является незаконным в большинстве стран. В российской практике обвинения в ценовом сговоре звучали в адрес нефтяных и строительных компаний, производителей продуктов питания, химической продукции, на рынке недвижимости – хотя, как правило, доказать в суде такие обвинения обычно не удается. В мировой практике ряд недавних громких дел связан со сговором производителей пива, жидкокристаллических панелей, мобильной связи.

Ярким примером картеля, члены которого координируют объемы производства с целью манипуляции рыночной ценой, является ОПЕК. Будучи наднациональным объединением, он не попадает ни под какую юрисдикцию, поэтому соглашения между членами этого картеля относительно прозрачны для стороннего наблюдателя. ОПЕК – единственный существующий на рынке нефти картель – контролирует не более 35% производства; остальные крупные производители (в первую очередь, Россия) получают выгоду от существования картеля (в виде более высоких цен на нефть), но при этом не вынуждены ограничивать собственный выпуск.

Примечательно, что ценовой сговор характерен не для всех рынков. С одной стороны, гласные и негласные соглашения между производителями преследуются по закону. С другой стороны, иногда картели распадаются са-

мопроизвольно. Так, например, произошло с ОПЕК в середине 1980 годов, когда Саудовская Аравия превысила установленные картелем квоты, ограничивающие производство нефти. Этот конфликт подробно описан в книге Йергина [56].

Определение причин формирования и распада картелей – интересная задача, доступная методам формального моделирования. Можно выделить два подхода к теоретико-игровому моделированию ценового сговора. Во-первых, процесс ценообразования можно рассматривать как следствие некооперативной игры между производителями, в ходе которой последние определяют производимый объем продукции, принимают решение о входе на рынок, и так далее. В основе таких моделей лежат модели ценообразования Курно или Бертрана; типичная работа, как правило, заостряет внимание на одном из аспектов деятельности фирм или из институциональной среды, делающей соблюдение договоренностей о ценовом сговоре более или менее выгодным для индивидуальных фирм. В качестве таких факторов приводится число фирм, структура издержек, эластичность рыночного спроса, вероятность повторения взаимодействия между фирмами, наблюдаемость решений, принимаемых другими фирмами и скорость реакции на них, и так далее. Анализ модели сводится к нахождению равновесий Нэша (или их подмножества) в сформулированной модели. Книги Вайвса [53] и Тироля и Фаденберга [51] являются прекрасными обзорами работ, лежащих в этом русле.

Второй потенциальный подход к анализу формирования и распаду картелей – коалиционный. Под коалицией мы будем подразумевать несколько фирм, между которыми существует какая-то взаимная договоренность – например, об ограничении объема производимой продукции с целью максимизации прибыли. Совокупность коалиций на рынке мы назовем коалиционной структурой. При конкретных предположениях о структуре издержек отдельных фирм, рыночном спросе, и характере имеющихся договоренностей можно рассмотреть, как коалиционная структура определяет рыночную цену, объемы производства, и прибыль отдельных фирм. Далее, устойчивость той

или иной коалиционной структуры можно рассматривать, используя различные концепции решения кооперативных игр. Данная концепция предполагает, что после того, как одна (или несколько) фирм покинули коалицию, все фирмы успевают заключить новые коалиционные соглашения (согласно равновесию Нэша), которые и определяют выигрыш при новой коалиционной структуре. Различные концепции решений, в том числе и итеративно определенные, для кооперативных игр предлагались в работах [16,17,20,24,25,45].

В данной работе предлагается третий метод исследования проблемы формирования картелей. Рассматривается однопериодная некооперативная игра, в которой стратегией каждой фирмы является ее план партнерства – то есть обозначенная коалиция (подмножество) фирм, в которой данная фирма хотела бы состоять. Зависимость между выбранными фирмами стратегиями и конечным разбиением множества фирм на коалиции (картели) определяется при помощи функции разбиения. Далее предполагается зависимость выигрышней фирм от итогового разбиения – возможно, в качестве исхода некоторой некооперативной игры между картелями.

Рассматриваемый в этой работе класс игр был впервые предложен Майерсоном [39]. Эти игры можно соотнести с сетевыми играми, в которых итогом игры является какой-то граф, показывающий, между какими игроками существуют двусторонние отношения, а между какими – нет. В сетевой игре множество стратегий игрока также соответствует множеству остальных игроков, с каждым из которых он может или не может захотеть вступить в двусторонние отношения. Однако для сетевой игры обычно предполагается, что для образования связи между двумя игроками бывает достаточно обоюдного согласия игроков, так что мы не можем утверждать, что рассматриваемый нами класс игр является подклассом сетевых игр (см. [21], а также обзор литературы в [31, 42]).

В работе вводится новая аксиоматика функций, связывающих стратегии игроков и итоговые разбиения множества игроков на коалиции. Аксиоматика, предложенная ранее (см. [2, 13]), имеет несколько недостатков. В первую

очередь, это касается невозможности использования теорем монотонной сравнительной статики (см. книгу Топкинса [52]). Например, увеличение размера коалиции, заявленной фирмой в ее плане партнерства, может привести к распаду существующих коалиций; это не соответствует представлению о монотонности функций разбиения.

### 2.3.1 Формализация некооперативной игры

Рассмотрим игру между  $N = \{1, \dots, n\}$  игроками.

Стратегией  $s_i$  игрока  $i$  будет заявление относительно того, в какую коалицию этот игрок хочет вступить. Например, игрок 1 может предложить игрокам 2 и 3 вступить с ним в коалицию. Тогда  $s_1 = \{1, 2, 3\}$ . Множеством всех стратегий игрока  $i$  будет множество коалиций (подмножеств)  $N$ , содержащих  $S_i = \{T \in 2^N \mid i \in T\}$ . Обозначим через  $S$  множество всех профилей стратегий игроков:

$$S = \prod_{i \in N} S_i.$$

Исход игры ( $P$ ) – итоговая коалиционная структура, т.е. разбиение  $N$  на непересекающиеся подмножества. Формально  $P = \{T_1, \dots, T_k\}$ ,  $T_1 \cup \dots \cup T_k = N$  и  $T_i \cap T_j = \emptyset$ . Обозначим за  $\Pi$  множество всех разбиений  $N$ .

Загрубление (измельчение) называется строгим, если  $Q$  и  $Q'$  не совпадают, т.е. по крайней мере два элемента  $Q'$  являются собственными подмножествами некоторого элемента  $Q$ .

Пусть  $Y \subseteq \Pi$  – множество допустимых разбиений.

Предположим, что полезность каждого игрока  $i$  в итоге зависит только от того, какая коалиционная структура будет превалировать на момент окончания игры. Пусть это соответствие задается функцией

$$U : Y \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Предположим также, что итоговое разбиение на коалиции ( $P$ ) зависит только от того, какие стратегии выбрал каждый из игроков, т.е.

$$P: S \rightarrow Y.$$

Пример 2.1. Рассмотрим процесс ценообразования на рынке с несколькими фирмами, производящими однородный товар. Пусть игроки – это фирмы. Коалиционная структура  $P$  определяет то, какие существуют объединения фирм (картели). Объем производства каждой фирмы определяется в результате некооперативной игры, в которой игроками являются картели, а целевой функцией картели является суммарная прибыль входящих в него фирм. Тогда равновесная прибыль каждой фирмы в итоге зависит от коалиционной структуры  $P$ .

Пример 2.2. Рассмотрим процесс формирования коалиционного правительства в стране с парламентской политической системой. Пусть игроки – это партии, избранные в парламент. Выигрыш каждой партии зависит от того, какой кабинет министров в итоге будет сформирован.

Итак, определим следующую игру в нормальной форме

$$G = \langle N, S, U \rangle. \quad (2.7)$$

Задачей исследования будет анализ свойств равновесия Нэша в игре (2.7) при различных предположениях относительно функций  $P$  и  $U_i$ .

### 2.3.2 Аксиоматика функций разбиения

В данном разделе мы рассмотрим различные подходы к аксиоматике функций, связывающих стратегии игроков и итоговое разбиение на коалиции, введем три набора аксиом и изучим, как они связаны друг с другом.

#### 2.3.2.1 Правила единогласия и сходства

Традиционный подход (см., например, [13]) предполагает следующие свойства:

(A1) правило сохранения единогласия: если для некоторой  $T$ ,  $s_i = T$  для всех  $i \in T$ , то  $T \in P$ ;

(A2) правило строгого единогласия: если  $i \in T$ , такой, что  $|T| > 1$  и  $s_j \in T$  для всех  $j \in T$ , то  $T \in P$ ; иначе,  $\{i\} \in T$ ;

(A3) правило сходства:  $T \in P$  если и только если для всех  $i, j \in T$ ,  $s_i = s_j = s$  и для всех  $k \notin T$ ,  $s_k \neq s_i$ .

Второе правило – наиболее строгое: коалиция формируется если и только если все игроки, входящие в нее, пожелали войти именно в эту коалицию.

Третье правило, очевидно, всегда приводит к более грубой коалиционной структуре: для того, чтобы образовалась коалиция, необходимо и достаточно, чтобы все входящие в нее игроки имели одинаковые стратегии – но при этом не обязательно, чтобы они пожелали войти именно в эту коалицию. Тем не менее, поскольку по определению  $i \in s_i$ , то правило (A3) означает, что  $T \subseteq s_i$  для всех  $T \in P$ .

### 2.3.2.2 Правила монотонности

Правила (A1) и (A2) не удовлетворяют нескольким вполне естественным условиям, которые необходимы для применения монотонной сравнительной статики. Например, итоговое разбиение не будет монотонно зависеть от стратегий игроков. Если  $s_1 = s_2 = s_3 = \{1, 2, 3\}$  и игрок 1 выбрал альтернативную стратегию  $s'_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ , то коалиция  $\{1, 2, 3\}$  распадется на единичные коалиции при строгом единогласии и на коалиции  $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$  при правиле сходства. Сформулируем альтернативный набор аксиом для функции разбиения.

(B1) Монотонность: пусть для некоторого  $i$ ,  $s_i \subset s'_i$ . Тогда  $P(s'_i, s_{-i})$  будет нестрогим загрублением  $P(s_i, s_{-i})$ .

(B2) Устойчивость коалиции к действиям внешних игроков. Пусть  $i, j \in T \in P$ . Тогда для всех  $k \notin T$ , для всех  $s'_k$ ,  $i, j \in T' \in P(s'_k, s_{-k})$ .

(B3) Единственность ключевой коалиции. Пусть  $T_1 \in P$  для некоторого  $s$ . Тогда существует не более одной коалиции  $T_2$ , такой, что для некоторого  $i \in T_2$ , для некоторой  $s'_i$ ,  $T_1 \cup T_2 \in P(s'_i, s_{-i})$ .

(B4) Незначимость малых коалиций. Существует  $A \geq 0$ , такое, что для всех  $i \in T$ ,  $|T| \leq A$ ,  $P(s'_i, s_{-i}) = P(s_i, s_{-i})$  для всех  $s'_i, s_i, s_{-i}$ .

Обозначим за  $\Pi(A, N)$  семейство всех правил разбиения, удовлетворяющих условиям (B1)–(B4).

Согласно правилу монотонности, возрастание коалиции, заявляемой одним из игроков, не может приводить к распаду других коалиций. Сразу отметим, что ни правило строгого единогласия, ни правило сходства этому свойству не удовлетворяют.

Устойчивость относительно внешних игроков означает, что коалиция может распасться только в результате действий одного из членов этой коалиции, что верно и для правила строгого единогласия, и для правила сходства. Наконец, третье правило выполняется для строгого единогласия (коалиций не существует вообще), но не для правила сходства (согласно которому любой игрок может присоединиться к любой коалиции).

Третье правило означает, что для каждого профиля стратегий и для каждой коалиции, порождаемой этим профилем стратегий, существует не более одной коалиции, такой, что действия входящего в нее игрока могут привести к объединению этих двух коалиций.

Аксиома (B4) говорит, что если игрок попадает в коалицию размера не больше  $A$ , то он не может самостоятельно изменить ситуацию – смена им стратегии не меняет итоговое разбиение.

Отметим, что разумная функция разбиения, удовлетворяющая аксиоме (B4) предполагает некоторое нетривиальное «разбиение по умолчанию», т.е. даже если никто не хочет образовывать коалиции, они все же образуются. Точнее, верна следующая теорема.

Теорема 2.5. Пусть  $P$  удовлетворяет аксиоме (B4) при  $A \geq 1$  и  $P(\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}) = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ . Тогда  $P(s_1, \dots, s_n) = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$  при любых  $s_1, \dots, s_n$ , т.е. коалиции не образуются ни при каких условиях.

Следовательно, любое нетривиальное правило, удовлетворяющее аксиомам (B1)–(B4), должно предписывать игрокам входить в какие-то коалиции, даже если они этого не хотят –  $P(\{1\}, \dots, \{n\}) = P_0 \neq \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ . При этом, по аксиоме монотонности коалиционная структура в любом другом случае будет загрублением  $P_0$ .

### 2.3.2.3 Правила согласованности

Третий набор аксиом основан на предположении, что в итоговом разбиении не будет коалиций, таких, что один член коалиции не входит в стратегию (список заявленных партнеров) какого-то другого члена той же коалиции.

Пусть  $P$  – некое разбиение,  $T \in P$ . Будем говорить, что  $T$  отвечает условию согласованности, если  $T \subseteq s_i$  для всех  $i \in T$ , т.е. все участники  $T$  согласны входить в коалицию друг с другом. Будем называть разбиение  $P$  слабо согласованным с профилем  $s$ , если все входящие в него коалиции удовлетворяют условию согласованности.

Наконец, будем говорить, что разбиение  $P$  согласовано с профилем  $s$ , если  $P$  слабо согласовано с  $s$  и  $P$  максимально среди слабо согласованных с  $s$  разбиений по отношению загрубления, т.е. не существует слабо согласованного с  $s$  разбиения  $Q$ , такого, что  $Q$  – загрубление  $P$ .

Далее, если очевидно, о каком профиле стратегий идет речь, будем писать просто «согласованное разбиение», не указывая профиль. Вторую часть условия согласованности можно переформулировать так: все коалиции  $T \in P$  отвечают условию согласованности, и не существует коалиций  $T', T'' \in P$ , та-

ких, что  $T' \cup T''$  также отвечает этому условию. Пример согласованного разбиения показан в Таблице 2.

Таблица 2.1 – Пример согласованного итогового разбиения

$i$	
1	1234567
2	1234567
3	1234567
4	1234567
5	1234567
6	1234567
7	1234567
$P$	1234567

Отметим, что согласованное разбиение может быть не единственным. Это видно на следующем примере в Таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Пример нескольких согласованных разбиений

$i$	
1	123
2	123
3	123
$P$	123
$P'$	123

С другой стороны, для любого профиля  $s$  существуют согласованные с ним разбиения. Докажем это.

Разбиения, слабо согласованные с  $s$ , существуют всегда, поскольку разбиение  $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$  очевидно слабо согласовано относительно любого профиля стратегий.

Кроме того, множество согласованных разбиений конечно и частично упорядочено по отношению загрубления. Поэтому в нем существует максимальный по отношению загрубления элемент, который по определению и есть согласованное разбиение.

Сформулируем следующие три аксиомы для функции разбиения:

(C1) если  $\tilde{P}$  – единственное разбиение, согласованное с профилем стратегий  $s$  б то  $P(s) = \tilde{P}$ ;

(C2) если  $\tilde{P}$  – какое-то разбиение, согласованное с профилем стратегий  $s$ , то  $P(s) = \tilde{P}$ ;

(C3)  $P(s)$  будет максимальным общим измельчением (или точной нижней гранью по отношению загрубления) всех согласованных с профилем  $s$  разбиений.

Если существует только одно согласованное разбиение, все аксиомы (C1)–(C3) предписывают выбрать его.

Но аксиома (C1) слабее (C2) и (C3), поскольку если согласованных разбиений несколько, не утверждает ничего.

В примере Таблицы 2.2 правило (C1) не говорит ничего, (C2) предписывает выбрать либо  $\{\{1,2\},\{3\}\}$  либо  $\{\{1\},\{2,3\}\}$ , (C3) – их общее измельчение  $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ .

### 2.3.3 Единственность согласованного разбиения и существование равновесий

Обозначим за  $R(s)$  бинарное отношение, отображающее взаимное желание объединиться. Формально,  $R(s)$  определено на множестве игроков  $N$  следующим образом:

$$iR(s)j \Leftrightarrow (i \in s_j \quad \& \quad j \in s_i).$$

Критерий единственности согласованного разбиения дает следующая теорема.

Теорема 2.6. Согласованное с профилем стратегий  $s$  разбиение единственно тогда и только тогда, когда  $R(s)$  – отношение эквивалентности, причем искомым разбиением будет разбиение на классы эквивалентности по отношению  $R(s)$ .

В примере из Таблицы 2.1 легко видеть, что  $R(s)$  – отношение эквивалентности, поэтому согласованное разбиение  $\{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5\}, \{6,7\}\}$  единственno.

В примере из Таблицы 2 отношение  $R(s)$  не транзитивно ( $1R2$ ,  $2R3$ , но  $1\not R3$ ), поэтому согласованных разбиений несколько (в данном случае два).

Теорема 2.6 показывает следующее важное свойство модели. Для того, чтобы изменить исход игры, требуется изменить отношение  $R$ , что (поскольку  $R$  симметрично) возможно только в случае согласованных действий игроков. Формализуем это наблюдение.

Теорема 2.7. Пусть правило  $P(\cdot)$  и профиль стратегий  $s$  удовлетворяют одному из следующим условиям:

- a) правило  $P(\cdot)$  удовлетворяет любой из аксиом (C2)–(C3);
- б) стратегии игроков симметричны:  $i \in s_j \Leftrightarrow j \in s_i$ ;
- в)  $P(s)$  – единственное согласованное с  $s$  разбиение;
- г) предпочтения игроков устроены так, что они предпочитают  $P(s)$  любому его измельчению.

Тогда  $s$  – равновесие по Нэшу.

Следствие 2.1. Пусть правило выбора итогового разбиения удовлетворяет любой из аксиом (C2)–(C3). Тогда набор стратегий  $s_i = \{i\}$ , будет равновесием по Нэшу.

Отметим также, что следствие (в отличие от теоремы) выполняется и если правило выбора разбиения удовлетворяет только аксиоме (C1), поскольку, если  $s = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ , при смене стратегии любым из игроков, единственным согласованным разбиением остается  $\{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ .

Более того, легко заметить, что в ситуации, когда игроку тем выгоднее, чем в меньшего размера коалицию он попадет, такое «вырожденное» равновесие будет единственным.

### 2.3.4 Связь между аксиомами

Отметим, что из приведенных правил только (A2), (A3) и (C3) позволяют однозначно определить итоговое разбиение  $P$ .

Принципиальная разница между аксиомами типов (A) и (C) состоит в том, что аксиомы типа (C) утверждают нечто обо всем разбиении, а аксиомы типа A – о наличии в нем конкретных коалиций. Тем не менее, эти наборы аксиом тесно связаны между собой.

Теорема 2.8. Верны следующие утверждения:

- а) из любой из аксиом (A2), (A3) следует (A1);
- б) из любой из аксиом (C2), (C3) следует (C1);
- в) из любой из аксиом (C2), (C3) следует (C1) и (A1);
- г) правило (C3) не удовлетворяет аксиоме (C2).

### 2.3.5 Некоторые выводы

В данном подразделе отчета предложен и исследован новый способ анализа формирования картельных соглашений как некооперативной игры, в которой стратегиями игроков являются коалиции, к которым эти игроки (фирмы) желают примкнуть. Предложен и проанализирован набор аксиом относительно функции, которая определяет зависимость итоговой коалиционной структуры от стратегий игроков.

Результаты исследований нашли отражения в работе [1]:

Захаров А.В., Шварц Д.А. Аксиоматика некооперативного подхода к коалиционным играм// Автоматика и Телемеханика, 2014 (в печати).

## 2.4 Развитие теории обобщенных паросочетаний и их применение

Данный подраздел отчета состоит из двух пунктов. В первом пункте излагаются новые результаты в теории обобщенных паросочетаний. Во втором пункте показана связь между обобщенными паросочетаниями и системами зачисления с указанием проходных баллов.

### 2.4.1 Обобщенные паросочетания при предпочтениях, являющихся интервальными порядками

Пусть  $A$  – множество абитуриентов,  $B$  – множество вузов. Множества абитуриентов и вузов конечны. Будем обозначать через  $a$  элементы множества абитуриентов, а через  $b$  – элементы множества вузов. Каждый абитуриент может быть зачислен не более, чем в один вуз, а каждый вуз  $b$  имеет  $q_b$  мест.

Абитуриенты и вузы высказывают свои предпочтения, которые устроены следующим образом. Профиль предпочтений абитуриентов  $P = (P_{a_1}, \dots, P_{a_{|A|}})$  состоит из линейных порядков. Отношение предпочтения каждого абитуриента  $P_a$  задано на множестве  $B \cup \{a\}$ , состоящем из вузов и возможности остаться незачисленным. Элемент  $a$  в данном множестве соответствует ситуации, когда абитуриент не получает места ни в одном вузе. Иначе говоря, каждый абитуриент составляет упорядоченный по предпочтительности получения места список вузов, причём вузы начиная с некоторой позиции в этом списке являются недопустимыми для абитуриента (предпочтительнее не обучаться нигде, чем обучаться в таком вузе). Профиль предпочтений вузов  $\succ \subseteq (\succ_{b_1}, \dots, \succ_{b_{|B|}})$  состоит из интервальных порядков. Каждое такое отношение предпочтения задано на множестве  $A \cup \{b\}$ , состоящем из всех абитуриентов и возможности оставить место незаполненным. Элемент в данном множестве соответствует ситуации, когда

место в вузе остаётся вакантным. Каждое такое бинарное отношение  $\succ_b$  удовлетворяет требованию «отсутствия безразличия с незачислением»:

$$\forall b \in B, \forall a \in A (a \succ_b b) \vee (a \prec_b b).$$

Таким образом, исключена ситуация, когда вузу безразлично, зачислен ли абитуриент  $a$ , или место оставлено пустым.

Дадим формальное определение интервального порядка [23].

Определение 2.1. Бинарное отношение  $\succ \subseteq A^2$  называется интервальным порядком на  $A$ , если оно удовлетворяет условиям:

- антирефлексивности;
- строгой интервальности:  $\forall x, y, z, t$  таких, что  $x \succ y, z \succ t$  верно, что  $x \succ t$  или  $z \succ y$ .

Введем дополнительно функцию  $J: A \rightarrow R^2$ , которая ставит в соответствие каждой альтернативе ее интервал. Для конкретного отношения предпочтения  $\succ_b$  будем обозначать функцию  $J$  как  $J_b$ , а нижнюю и верхнюю границы интервала для каждой альтернативы – как  $l_b(a)$  и  $u_b(a)$ , соответственно.

Теорема 2.9 [4, 23]. Бинарное отношение  $\succ \subseteq A^2$  является интервальным порядком, если и только если каждому элементу  $a \in A$  можно поставить в соответствие интервал  $[l(a), u(a)]$  так, что  $a \succ a'$ , если и только если  $l(a) > u(a')$ .

Для случая интервальных порядков также можно доказать, что устойчивое паросочетание всегда существует.

Теорема 2.10. В задаче распределения абитуриентов по вузам, где предпочтения абитуриентов заданы линейными порядками, а предпочтения вузов – интервальными порядками, устойчивое паросочетание всегда существует.

Таким образом, показано, что устойчивое паросочетание всегда существует и может быть найдено с помощью механизма отложенного

принятия. На самом деле, утверждение этой теоремы следует из более общего утверждения: попарно-устойчивое паросочетание существует при любом профиле предпочтений, заданных частичными порядками.

Другой важный вопрос состоит в следующем: все ли паросочетания, которые устойчивы при исходном профиле предпочтений, устойчивы и при каком-то линейном расширении предпочтений вузов? Положительные ответы на этот вопрос означают, что любое устойчивое при исходном профиле паросочетание, вообще говоря, можно найти, использовав какое-либо линейное расширение интервальных порядков.

Теорема 2.11. Для любого паросочетания  $\mu$ , которое устойчиво при исходном профиле предпочтений (заданных линейными порядками для абитуриентов и интервальными порядками для вузов) существует модифицированный профиль предпочтений  $\geq'$ , состоящий из линейных расширений предпочтений из профиля  $\succ$ , такой что  $\mu$  остается устойчивым (т.е. не образуется новых блокирующих пар).

#### 2.4.1.1 Механизм отложенного принятия и паросочетания, неэффективные для абитуриентов

Следующее важное свойство устойчивых паросочетаний – Парето-оптимальность. В классической модели, где предпочтения заданы линейными порядками, все паросочетания являются эффективными, а для абитуриентов существует наилучшее устойчивое паросочетание. При разработке механизмов на практике интересы абитуриентов, как правило, учитываются в первую очередь. Как следует из доказательства Теоремы 2.10 для поиска устойчивого паросочетания можно использовать модифицированную процедуру с устранением безразличий, предложенную в [3,46]. Однако важно понимать, будем ли мы в этом случае получать эффективное для абитуриентов паросочетание.

Рассмотрим следующий простой пример с тремя абитуриентами  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  и тремя вузами  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ , в каждом из которых квота равна 1, т.е. имеется по одному месту.

Таблица 2.3 – Предпочтения абитуриентов и вузов

$a_1: b_1 P b_2 P b_3$	$b_1: a_3 >_{b_1} a_1, a_3 I(\succ_{b_1}) a_2, a_2 I(\succ_{b_1}) a_1$
$a_2: b_2 P b_1 P b_3$	$b_2: a_1 >_{b_2} a_2, a_1 I(\succ_{b_2}) a_3, a_3 I(\succ_{b_2}) a_2$
$a_3: b_2 P b_3 P b_1$	$b_3: a_1 >_{b_3} a_3, a_1 I(\succ_{b_3}) a_2, a_2 I(\succ_{b_3}) a_3$

Найдем устойчивые паросочетания, применив процедуру с предварительным устранением безразличий в предпочтениях. Сравним результат работы механизма в случае двух разных профилей линейных расширений:  $\geq'$  и  $\geq''$ .

Пусть  $\geq'$  таково, что  $a_1 \succ'_{b_2} a_2 \succ'_{b_2} a_3$ . На первом шаге  $a_1$  подаёт заявление в  $b_1$ , а абитуриенты  $a_2$  и  $a_3$  – в  $b_2$ . Вуз  $b_2$ , получив два заявления на одно место, отклоняет заявление  $a_3$  (в соответствии с расширением предпочтений). Тогда  $a_3$  подаёт заявление в вуз  $b_3$  и на этом работа механизма завершена. Найдено устойчивое паросочетание  $\mu$  (см. Таблицу 2.4).

Пусть  $\geq''$  таково, что  $a_1 \succ''_{b_2} a_3 \succ''_{b_2} a_2$ , и  $a_3 \succ''_{b_1} a_2 \succ''_{b_1} a_1$ . На первом шаге  $a_1$  подаёт заявление в  $b_1$ , а абитуриенты  $a_2$  и  $a_3$  – в  $b_2$ . Вуз  $b_2$ , получив два заявления на одно место, отклоняет заявление  $a_2$  (в соответствии с расширением предпочтений). Тогда абитуриент  $a_2$  подаёт заявление в вуз  $b_1$ . Вуз  $b_1$ , получив два заявления на одно место, отклоняет заявление  $a_1$  (в соответствии с расширением предпочтений). Теперь  $a_1$  подаёт заявление в вуз  $b_2$ . Вуз  $b_2$ , снова имеющий избыток заявлений, отклоняет заявление  $a_3$ . Наконец,  $a_3$  подаёт заявление в вуз  $b_3$  и на этом работа механизма завершается. Найдено устойчивое паросочетание  $\nu$  (см. Таблицу 2.4).

Таблица 2.4 – Устойчивые паросочетания

$\mu$			$\nu$		
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_3$

Нетрудно заметить, что с точки зрения абитуриентов паросочетание  $\mu$  лучше, чем  $\nu$ . Действительно, для абитуриента  $a_1$  вуз  $b_1$  предпочтительнее, чем  $b_2$ , а для абитуриента  $a_2$ , наоборот, вуз  $b_2$  предпочтительнее, чем  $b_1$ . Третий абитуриент зачислен в один и тот же вуз в обоих паросочетаниях.

Этот простой пример показывает, что даже при использовании процедуры отложенного принятия, ориентированной на абитуриентов, могут быть построены паросочетания, не являющиеся Парето-оптимальными для абитуриентов. Наш следующий результат позволяет установить критерий для проверки эффективности для абитуриентов устойчивого паросочетания, а также построить механизм трансформации произвольного устойчивого паросочетания в эффективное для абитуриентов.

#### 2.4.1.2 Устойчивые улучшающие циклы и построение эффективного для абитуриентов устойчивого паросочетания

В [22] впервые введено определение устойчивого улучшающего цикла (Stable Improvement Cycle, SIC).

Для того, чтобы дать определение Устойчивого Улучшающего Цикла, введем дополнительные обозначения. Пусть  $C(b, \mu) = \{a \in A : bP_a\mu(a)\}$ , кроме того, пусть  $D(b, \mu) = \{a \in C(b, \mu) : \forall x \in C(b, \mu) x >_b^c a\}$ .

Устойчивый улучшающий цикл в паросочетании  $\mu$  – это последовательность  $n$  различных абитуриентов  $a_1, \dots, a_n \equiv a_0$  ( $n \geq 2$ ) таких, что:

- $\mu(a_i) \in B$ , т.е. каждый из них зачислен в вуз в паросочетании  $\mu$ ;
- $\forall a_i \mu(a_{i+1}) P_{a_i} \mu(a_i)$ , т.е. каждый предпочел бы учиться в вузе, в котором учится соседний абитуриент с большим номером;

- $\forall a_i \ a_i \in D(\mu(a_{i+1}), \mu)$ , т.е. среди всех абитуриентов, которые хотели бы учиться в вузе абитуриента  $a_{i+1}$ , абитуриент  $a_i$  находится в группе лучших.

Обозначим  $SIC(a_i) = b_{i+1}$ ,  $SIC(b_i) = a_{i-1}$ . Если совершить передачу мест (от абитуриентов с большим номером абитуриентам с меньшим номером) в соответствии с построенным циклом, то условие 2 будет гарантировать, что положение всех абитуриентов в цикле улучшится, а условие 3 обеспечит устойчивость паросочетания, построенного после обмена в соответствии с циклом.

Продолжим рассмотренный выше пример и построенное там устойчивое паросочетание  $\nu$ . Данное паросочетание не является оптимальным по Парето для абитуриентов при заданном профиле предпочтений. Можно построить цикл, состоящий из двух абитуриентов:  $a_1$  и  $a_2$ . Такой цикл будет устойчивым улучшающим циклом, поскольку обладает тремя свойствами:

- $a_1$  и  $a_2$  зачислены в вуз в паросочетании  $\nu$ .
- $\nu(a_2)P_{a_1}\nu(a_1)$  и  $\nu(a_1)P_{a_2}\nu(a_2)$ , т.е. каждый абитуриент считает вуз, в который зачислен другой абитуриент, более предпочтительным, чем тот, куда зачислен он сам.
- $C(b_1, \nu) = D(b_1, \nu) = \{a_1\}$  и  $C(b_2, \nu) = D(b_2, \nu) = \{a_2, a_3\}$ , т.е. оба абитуриента являются наиболее предпочтительными из тех, кто желает попасть в соответствующий вуз. В данном примере третье требование выполнено автоматически, поскольку множества  $C(b_i, \nu)$  и  $D(b_i, \nu)$  совпадают для обоих вузов.

Таким образом, мы можем совершить «обмен» местами между абитуриентами  $a_1$  и  $a_2$ . Будет получено паросочетание  $\mu$ , которое слабо доминирует по Парето паросочетание  $\nu$  для абитуриентов. Основная теорема формулируется следующим образом:

Теорема 2.12. Пусть заданы отношения  $\succ$  и  $P$ , и пусть  $\mu$  – некоторое устойчивое паросочетание. Если  $\mu$  доминируется по Парето (для абитуриентов) другим устойчивым паросочетанием, то существует устойчивый улучшающий цикл.

Теорема 2.12 фактически предоставляет критерий для проверки эффективности (для абитуриентов) любого устойчивого паросочетания. Более того, с помощью этой теоремы получен устойчивый и эффективный (для абитуриентов) механизм построения паросочетания:

- построить произвольное линейное расширение для предпочтений абитуриентов;
- применить механизм отложенного принятия с предлагающими абитуриентами и получим некоторое устойчивое паросочетание;
- выполнив поиск устойчивого улучшающего цикла в построенном паросочетании; если он существует, то произвести обмен местами в вузах в соответствии с циклом; повторять этот шаг до тех пор, пока построение нового цикла станет невозможным.

По Теореме 2.12 данное паросочетание будет устойчивым и эффективным для абитуриентов. К сожалению, такой механизм не устойчив к манипулированию со стороны абитуриентов. В [22] возможность манипулирования абитуриентами показана для случая, когда предпочтения являются слабыми порядками, поэтому, естественно, манипулирование возможно и в более общем случае предпочтений, заданных интервальными порядками.

#### 2.4.2 Проходные баллы и устойчивые паросочетания

В данном параграфе будет рассмотрено построение паросочетаний через широко распространённую в прикладных задачах распределения абитуриентов схему: установление в каждом вузе проходного балла,

означающего, что все абитуриенты, набравшие данный балл или выше на вступительных испытаниях, могут быть приняты в вуз.

Оказывается, что такая система в случае централизованного применения эквивалентна построению устойчивого паросочетания. Более того, рассмотрение обобщённых паросочетаний с точки зрения концепции проходных баллов позволяет исследовать принятую в некоторых странах концепцию “equal treatment of equals”. В основе этой концепции лежит идея о том, что абитуриенты, получившие одинаковые баллы на вступительных испытаниях, абсолютно идентичны с точки зрения вуза, и, следовательно, должны получать одинаковый результат с точки зрения зачисления в этот вуз. Есть два варианта возможного разрешения проблемы в духе этой концепции: либо все абитуриенты, набравшие один и тот же балл, должны быть приняты в вуз (будем в дальнейшем называть это L-концепцией, от low-низкий, надо понижать проходной балл), либо все эти абитуриенты не зачислены в вузы (Н-концепция, от high-высокий, надо повышать проходной балл). Таким образом, эти концепции исключают возможность случайного устранения безразличий в предпочтениях. При этом в случае L-концепции дополнительно появляется возможность зачисления абитуриентов сверх квоты, если это требуется для соблюдения равенства между абитуриентами.

Результаты настоящего раздела изложены в [11].

Перейдем к формальной модели. Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  – множество абитуриентов,  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  – множество вузов, причём через  $q_b$  обозначим квоту (число мест) в вузе  $b$ . У каждого абитуриента  $a_i$  имеется лист предпочтений относительно вузов  $P_i$ , в котором  $b_1 P_i b_2$  означает, что  $b_1$  стоит выше, чем  $b_2$  в списке, т.е. абитуриент  $a_i$  предпочитает  $b_1$  по сравнению с  $b_2$ . Пусть  $s_u^i$  – итоговый балл, набранный абитуриентом  $a_i$  по итогам вступительных испытаний в вуз  $b_u$ . Итоговые баллы являются положительными целыми числами для всех приемлемых для вуза абитуриентов. В реальной практике абитуриенты с баллами ниже некоторой

установленной нижней границы просто не могут претендовать на места в вузе. Например, в Венгрии установлена единая граница в 240 баллов из 500 возможных; абитуриент, набравший меньше указанного количества баллов не может претендовать на поступление в вуз. В нашей модели в качестве нижней границы без ограничения общности рассматривается 0 баллов.

Набор проходных баллов вузов описывается отображением  $l: B \rightarrow \mathbb{N}$ . В рамках централизованной системы зачисления абитуриент  $a_i$  зачисляется в вуз  $b_u$ , если он набрал балл не меньше проходного в данном вузе, и этот вуз является лучшим среди тех, куда проходит этот абитуриент, т.е.  $s_u^i \geq l(b_u)$  и  $s_v^i < l(b_v)$  для каждого вуза  $b_v$  такого что  $b_v P b_u$ .

Если при данном наборе проходных баллов  $l$  абитуриент  $a_i$  зачислен в вуз  $b_u$ , тогда значение соответствующей булевой переменной устанавливается как  $x_u^i(l) = 1$ , в противном случае ее значение равно 0. Пусть  $x_u(l) = \sum_i x_u^i(l)$  – количество абитуриентов, зачисленных в  $b_u$  при наборе проходных баллов  $l$ .

Далее, определим  $l^{u,t}$  следующим образом:  $l^{u,t}(b_u) = l(b_u) + t$  и  $l^{u,t}(b_v) = l(b_v)$  для любого  $v \neq u$ . Таким образом построим новый набор проходных баллов, в котором увеличим проходной балл в вузе  $b_u \in B$  на  $t$  (или уменьшим, если  $t$  отрицательно), оставив проходные баллы прочих вузов неизменными.

Для того, чтобы ввести новые понятия Н-устойчивых and L-устойчивых наборов проходных баллов, сначала введем соответствующие определения допустимости.

Набор проходных баллов  $l$  является *H-допустимым*, если  $x_u(l) \leq q_u$  для каждого вуза  $b_u \in B$ . То есть, количество зачисленных абитуриентов не может превышать квоту ни в одном вузе. Это означает, что если имеется группа абитуриентов, набравших одинаковое количество баллов, а оставшихся мест не хватает на всех абитуриентов из этой группы, то ни один

абитуриент из группы не получит места в вузе, и проходной балл вуза должен быть выше, чем баллы этих абитуриентов.

Набор проходных баллов  $l$  является *L-допустимым*, если для каждого вуза  $b_u \in B$ , такого что  $x_u(l) \geq q_u$ , выполняется  $x_u(l^{u^{-1}}) < q$ . В этом случае квота в вузе может быть превышена, но только за счёт зачисления «последней» группы абитуриентов с одинаковыми баллами.

Будем говорить, что набор проходных баллов  $l$  является *H-устойчивым* (соответственно, *L-устойчивым*), если  $l$  является H-допустимым (*L-допустимым*), и для каждого вуза  $b_u$  либо  $l(b_u) = 0$ , либо  $l^{u^{-1}}$  не является H-допустимым (соответственно, *L-допустимым*). Таким образом, H-устойчивость означает, что ни один вуз не может снизить проходные баллы так, чтобы количество зачисленных абитуриентов не превысило бы квоту (при условии, что остальные вузы оставляют проходные баллы на прежнем уровне). L-устойчивость означает, что ни один вуз  $b_u$  не может зачислить абитуриента, если как минимум  $q_u$  зачисленных абитуриентов имеют более высокий балл в данном вузе, но, при прочих равных, проходные баллы должны быть как можно более низкими. H-устойчивость используется в централизованной системе зачисления абитуриентов в Венгрии.

Следует обратить внимание на тот факт, что в случае отсутствия неразличимых абитуриентов (т.е. в случае, когда ни в одном вузе нет абитуриентов, набравших одинаковый балл) эти концепции совпадают и, вообще говоря, эквивалентны классической концепции попарной устойчивости паросочетания, предложенной Д. Гейлом и Л. Шепли [26]. Наличие соответствия между набором проходных баллов и паросочетаниями было впервые отмечено в связи с анализом системы распределения абитуриентов по вузам в Турции. В [7] этот факт также использовали при анализе моделей обобщённых паросочетаний с континуумом абитуриентов.

#### 2.4.2.1 Механизмы построения устойчивого набора проходных баллов

Механизмы поиска как Н-устойчивых, так и L-устойчивых наборов проходных баллов являются естественным расширением механизма отложенного принятия Гейла–Шепли. Единственное существенное отличие состоит в том, что вузы не имеют возможности набрать в точности столько абитуриентов, сколько в вузе имеется свободных мест.

Будут построены два типа механизмов: строящие набор проходных баллов, наилучший для вузов, и строящие набор проходных баллов, наилучший для абитуриентов. Чтобы исключить повторное описание одинаковых операций, механизмы построения Н-устойчивого и L-устойчивого наборов будут описаны в одном тексте, с указанием особенностей L-устойчивого механизма в скобках.

##### 2.4.2.1.1 Механизмы, ориентированные на вузы

На первом шаге механизма назначим проходной балл в каждом вузе независимо от других вузов следующим образом: выберем наименьшее число, такое что, если рассматривать всех абитуриентов из  $A$ , число абитуриентов, имеющих балл не ниже установленного, не превысит квоту вуза. (соответственно, для L-устойчивости выберем наименьшее число, такое что число абитуриентов, имеющих балл не ниже установленного, может превысить квоту, но только в том случае, если при повышении проходного балла на единицу пришлось бы отказать сразу группе абитуриентов с одинаковыми баллами и при этом часть мест в вузе осталась бы незаполненной).

Обозначим этот набор проходных баллов через  $l_1$ . Разумеется, при таком назначении проходных баллов могут оказаться абитуриенты, чьи баллы оказались выше проходного в нескольких вузах. За каждым из этих абитуриентов остаётся только место в самом предпочтительном для такого

абитуриента вузе, а из списков остальных вузов этот абитуриент вычеркивается.

На каждом из последующих шагов каждый вуз проверяет, можно ли опустить проходной балл, ведь некоторые абитуриенты могли отказаться и быть вычеркнуты из списка поступающих в данный вуз на предыдущих шагах механизма. Вуз устанавливает проходной балл – наименьшее число, при котором набор проходных баллов оставался бы Н-допустимым (соответственно, L-допустимым) в соответствии с текущим списком поступающих. Если абитуриент в результаты понижения проходных баллов получает возможность быть зачисленным в более предпочтительный для него вуз, чем тот, куда он временно был зачислен на предыдущих шагах, то абитуриент отказывается от менее предпочтительных предложений и принимает новое.

Опишем механизм формально. Пусть  $l_k$  – набор проходных баллов на  $k$ -м шаге. На следующем шаге, в каждом вузе  $b_u$ , выбирается наибольшее целое число  $t_u$ , такое что  $t_u \leq l_k(b_u)$  и  $x_u(l_k^{u,-t_u}) \leq q_u$  (соответственно, если  $x_u(l_k^{u,-t_u}) \geq q_u$ , то  $x_u(l_k^{u,-t_u+1}) < q_u$ ). То есть, уменьшаем проходной балл на как можно большую величину  $t_u$ , при которой решение остаётся Н-допустимым (соответственно, L-допустимым), т.е., где количество абитуриентов, которое по установленному баллу проходят в вуз  $b_u$  и не вычеркнуты из списка, не превышает квоты (соответственно, может превышать квоту, но только если без последней группы абитуриентов с одинаковыми баллами остаются пустые места), предполагая при этом, что проходные баллы остальных вузов останутся неизменными. Для каждого вуза  $b_u$  зададим  $l_{k+1}(b_u) := l_k^{u,-t_u}(b_u)$  – новый проходной балл. Некоторые абитуриенты опять могут проходить по своим баллам сразу в несколько вузов, поэтому не все абитуриенты из списка, имеющие балл выше проходного, будут временно зачислены в вуз:  $x_u(l_{k+1}) \leq x_u(l_k^{u,-t_u})$ .

Разумеется, новый набор проходных баллов остаётся Н-допустимым (или L-допустимым, соответственно).

Наконец, если ни один вуз не может уменьшить свой проходной балл, механизм завершает работу. Н-устойчивость (соответственно, L-устойчивость) последнего набора проходных баллов очевидна (см. определение устойчивого набора проходных баллов). Обозначим полученные наборы  $l_B^H$  (Н-устойчивый) и  $l_B^L$  (L-устойчивый).

#### 2.4.2.1.2 Механизмы, ориентированные на абитуриентов

Каждый абитуриент поступает в наиболее предпочтительный для себя вуз. Если вуз получил больше заявлений, чем установленная квота мест, то вуз устанавливает проходной балл – минимальное число, при котором количество заявлений от абитуриентов, имеющих балл не ниже выбранного числа, не превысит квоту. Соответственно, для L-устойчивости количество абитуриентов с баллом не ниже этого числа может превышать квоту, но только если без последней группы абитуриентов, имеющих одинаковые баллы, в вузе остаются пустые места. Для вузов, где число заявлений не превысило числа мест, проходные баллы устанавливаются на уровне 0 баллов.

Обозначим через  $l_k$  набор проходных баллов, установившийся после  $k$ -го шага механизма. Если абитуриент был отвергнут на  $k$ -м шаге (в результате повышения проходного балла в вузе, куда он был предварительно зачислен), то на следующем шаге этот абитуриент подаст заявление в менее предпочтительный вуз  $b_u$ , в который он проходит при текущем проходном балле  $l_k(b_u)$ . Эту операцию выполняет каждый абитуриент, у кого список вузов для подачи заявлений ещё не исчерпан. Некоторые вузы получат новые заявления. Если при текущем проходном балле число временно зачисленных абитуриентов превысит квоту (соответственно, превысит квоту и без последней группы абитуриентов с одинаковыми баллами квота все равно

выбрана), то вуз устанавливает новый, более высокий проходной балл  $l_{k+1}(b_u)$ .

Вновь устанавливаемый проходной балл – это снова минимальное число, при котором количество заявлений от абитуриентов, имеющих балл не ниже выбранного числа, не превысит квоту (соответственно, для L-устойчивости количество абитуриентов с баллом не ниже этого числа может превышать квоту, но только если без последней группы абитуриентов, имеющих одинаковые баллы, в вузе остаются пустые места). Это означает, что  $b_u$  отказывает всем абитуриентам, которые ранее были временно зачислены в вуз, но имеют балл ниже нового установленного проходного.

Механизм заканчивает работу, когда нет ни одного абитуриента, который хотел бы подать новое заявление.

Сформированный на последнем шаге механизма набор проходных баллов, очевидно, является H-допустимым (соответственно, L-допустимым). Решение является также H-устойчивым (соответственно, L-устойчивым), поскольку после последнего повышения проходных баллов в вузах потерявшие место абитуриенты отправились в менее предпочтительные вузы или остались незачисленными никуда. Таким образом, если бы вуз понизил свой последний проходной балл хотя бы на единицу (см. определение устойчивого набора проходных баллов), то он получил бы новых абитуриентов, и требования по квотам были бы нарушены.

Обозначим полученный H-устойчивый и L-устойчивый наборы проходных баллов через  $l_A^H$  и  $l_A^L$ , соответственно.

Указанные рассуждения можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2.13. Наборы проходных баллов  $l_B^H$  и  $l_B^L$ , построенные в результате реализации вуз-ориентированного механизма, являются H-устойчивым и L-устойчивым, соответственно. Наборы проходных баллов  $l_A^H$  и  $l_A^L$ , построенные в результате реализации абитуриент-ориентированного механизма, являются H-устойчивым и L-устойчивым, соответственно.

#### 2.4.2.2 Два вида механизмов и эффективность паросочетания

Можно легко привести пример, демонстрирующий, что, во-первых, вуз, в котором будет обучаться абитуриент при наборе проходных баллов  $l_A^H$ , окажется предпочтительнее для него, чем вуз при  $l_B^H$  и, во-вторых, количество зачисленных в данный вуз абитуриентов может быть больше при  $l_A^H$ , чем при  $l_B^H$  (аналогично для L-концепции). Будем говорить, что набор проходных баллов  $l$  лучше для абитуриентов, чем  $l'$ , если  $l \leq l'$ , т.е., если  $l(b_u) \leq l'(b_u)$  для каждого вуза  $b_u$ . В этом случае каждый абитуриент при  $l$  получает место в том же или более предпочтительном вузе по сравнению с  $l'$ . Это отношение является, по сути, отношением Парето между соответствующими паросочетаниями при учёте предпочтений всех абитуриентов.

Теорема 2.14. Набор  $l_B^H$  является худшим для абитуриентов, а  $l_A^H$  – лучшим для абитуриентов Н-устойчивым набором проходных баллов, т.е. для любого устойчивого набора проходных баллов  $l$  выполняется  $l_A^H \leq l \leq l_B^H$ .

Теорема 2.15. Набор  $l_B^L$  является худшим для абитуриентов, а  $l_A^L$  – лучшим для абитуриентов L-устойчивым набором проходных баллов, т.е. для любого L-устойчивого набора проходных баллов  $l$  выполнено  $l_A^L \leq l \leq l_B^L$ .

#### 2.4.2.3 Сравнение Н-устойчивости и L-устойчивости

Интуитивно кажется, что L-устойчивость – более дружелюбная по отношению к абитуриентам концепция, чем Н-устойчивость. Оказывается, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2.16. Проходные баллы, получаемые в результате выполнения L-устойчивого абитуриент-ориентированного механизма, всегда не выше,

чем проходные баллы, получаемые в результате выполнения Н-устойчивой версии абитуриент-ориентированного механизма, т.е.  $l_A^L \leq l_A^H$ .

Теорема 2.17. Проходные баллы, получаемые в результате выполнения L-устойчивого вуз-ориентированного механизма всегда не выше, чем проходные баллы, получаемые в результате выполнения Н-устойчивой версии вуз-ориентированного механизма, т.е.  $l_B^L \leq l_B^H$ .

Лучшие для абитуриентов Н-устойчивый и L-устойчивый наборы проходных баллов ( $l_A^H$  и  $l_A^L$ ) являются верхней и нижней границами, соответственно, для проходных баллов в любом ориентированном на абитуриентов устойчивом паросочетании, построенном со случайным устранением безразличий в предпочтениях вузов. Аналогичное утверждение верно и для наборов проходных баллов, которые являются наихудшими для абитуриентов ( $l_B^H$  и  $l_B^L$ ). Это очень важное следствие позволяет использовать предложенные новые концепции устойчивости для анализа существующих механизмов распределения со случайным устранением безразличий.

Наконец, доказательства Теорем 2.16 и 2.17 позволяют получить несколько более общее утверждение. А именно, предположим, что существует «настоящий» порядок абитуриентов по их готовности к обучению в каждом вузе, и соответствующие этому порядку истинные баллы  $e: B \times A \rightarrow \mathbb{R}$ , которые ни у каких двух абитуриентов в рамках одного вуза не совпадают. Однако используемая система оценивания содержит недостаточно градаций оценки (например, необходимо оценить 100 студентов, используя 10-балльную шкалу). Истинные оценки  $e$  приходится округлять, получая при этом некоторые новые оценки  $s$ . Применение округления приводит к появлению абитуриентов с одинаковыми оценками (неразличимых между собой с точки зрения этих округленных баллов). Будем называть баллы абитуриентов  $f$  улучшением баллов  $s$ , если хотя бы для одного абитуриента они не совпадают и для любой пары абитуриентов  $a_i$  и

$a_j$  и вуза  $b_u$  если верно, что  $s_u^i \leq f_u^i \leq e_u^i$  и  $s_u^i < s_u^j$ , то обязательно выполнено  $f_u^i < s_u^j$ ,  $f_u^i < f_u^j$ , и  $e_u^i < f_u^j$ . Можно охарактеризовать эти соотношения по-другому: отношение слабого порядка, порождаемое системой баллов  $s$ , включается в отношение слабого порядка, порождаемое системой баллов  $f$ , а оно, свою очередь, входит в отношение линейного порядка, порождаемое баллами  $e$ . Действительно, если существуют истинные оценки  $e$ , то одна система оценивания лучше другой, если получаемые оценки ближе к истинным оценкам  $e$ .

Предположим, что абитуриенты в каждом колледже могут быть оценены истинными оценками  $e$ , и соответствующий абитуриент-ориентированный набор проходных баллов равен  $l_A(e)$ . Пусть  $s$  и  $f$  – баллы абитуриентов, такие что  $e$  является улучшением  $f$ , а  $f$  является улучшением  $s$ . Обозначим через  $l_A^H(s)$  и  $l_A^L(s)$  Н-устойчивый и L-устойчивый абитуриент-ориентированные наборы проходных баллов при системе оценок  $s$ . Тогда верно, что  $l_A^L(s) \leq l_A^L(f) \leq l_A(e) \leq l_A^H(f) \leq l_A^H(s)$ .

#### 2.4.2.4 Манипулирование предпочтениями

Здесь будет показано, что все описанные механизмы неустойчивы к манипулированию. Вообще говоря, манипулируемость вуз-ориентированных механизмов как абитуриентами, так и вузами следует из манипулируемости классического механизма отложенного принятия с предлагающими вузами [26]. По этой причине ниже будут приведены только примеры, демонстрирующие возможности манипулирования со стороны абитуриентов в абитуриент-ориентированных механизмах.

Рассмотрим два вуза,  $b_u$  и  $b_v$ , в каждом из которых есть по одному месту, и двух абитуриентов  $a_1$  и  $a_2$ , каждый из которых подаёт заявления в оба вуза и каждый из которых считает более предпочтительным вуз  $b_u$ .

Абитуриенты имеют одинаковые баллы в обоих вузах. Вся информация о предпочтениях сведена в Таблице 2.5.

Таблица 2.5 – Пример манипулирования в Н-устойчивом абитуриент-ориентированном механизме

$a_1 : b_u, b_v$	$s_u^1 = s_u^2 = 1$
$a_2 : b_u, b_v$	$s_v^1 = s_v^2 = 2$

В данном случае единственное Н-устойчивое решение соответствует «пустому» паросочетанию, т.е. установлению проходных баллов в обоих вузах на уровне выше, чем баллы, набранные абитуриентами. Однако, если один из студентов (например,  $a_1$ ) исказит свои предпочтения и укажет в качестве более предпочтительного вуза  $b_v$ , то единственным Н-устойчивым набором проходных баллов будет  $l(b_u) = 2$ ,  $l(b_v) = 1$ . В соответствующем паросочетании студент  $a_1$  зачислен в вуз  $b_v$ , а абитуриент  $a_2$  – в вуз  $b_u$ . Таким образом, предложенное искажение предпочтений  $a_1$  улучшает его результат и, следовательно, является выгодным для него манипулированием. Заметим, что в данном случае манипулирование оказалось выгодно не только самому абитуриенту, но и всем другим участникам.

Следующий пример, демонстрирующий возможность манипулирования предпочтениями в L-устойчивом абитуриент-ориентированном механизме, основан на примере из [27].

Рассмотрим два вуза,  $b_u$  и  $b_v$ , в каждом из которых квота установлена на уровне 1, и трёх абитуриентов  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , считающих приемлемыми оба вуза  $b_u$  и  $b_v$  и имеющих следующие баллы:  $s_u^1 = 1$ ,  $s_u^2 = 1$ ,  $s_u^3 = 2$ ,  $s_v^1 = 3$ ,  $s_v^2 = 2$  и  $s_v^3 = 1$ .

Таблица 2.6 – Пример манипулирования в L-устойчивом абитуриент-ориентированном механизме

$a_1 : b_u, b_v$	$b_u : a_3, (a_1, a_2)$
$a_2 : b_v, b_u$	$b_v : a_1, a_2, a_3$
$a_3 : b_v, b_u$	

В данном случае единственный L-устойчивый набор проходных баллов:  $l(b_u) = 2$  и  $l(b_v) = 3$ , ему соответствует паросочетание  $\mu = \{(a_1, b_v), (a_3, b_u)\}$ . Однако, если абитуриент  $a_2$  исказит свои предпочтения, поставив на первое место  $b_u$ , то на первом шаге L-устойчивого абитуриент-ориентированного механизма вуз  $b_v$  получит одно заявление от  $a_3$ , а вуз  $b_u$  – два заявления от  $a_1$  и  $a_2$ . Проходные баллы будут установлены  $l(b_u) = 1$ ,  $l(b_v) = 1$ , ни один студент не получит отказ и на этом работа механизма завершится. Соответствующее указанному набору проходных баллов паросочетание будет иметь вид  $\mu = \{(a_1, b_u), (a_2, b_u), (a_3, b_v)\}$ . Таким образом, манипулирование предпочтениями со стороны абитуриента  $a_2$  оказалось выгодно ему (и остальным абитуриентам тоже).

Таким образом, в отличие от классической модели Гейла–Шепли, при использовании концепций Н-устойчивости и L-устойчивости оказывается, что механизм отложенного принятия с предлагающими абитуриентами неустойчив к манипулированию предпочтениями со стороны абитуриентов.

#### 2.4.3 Некоторые выводы

Доказано, что в случае, когда предпочтения заданы интервальными порядками, существует устойчивое паросочетание. Результат Эрдила–Эрджина (критерий Парето-эффективности устойчивого паросочетания) расширен на случай предпочтений, заданных интервальными порядками.

В части прикладных результатов показана связь между устойчивыми обобщенными паросочетаниями и системами проходных баллов, используемыми при распределении абитуриентов по вузам и других прикладных задачах. Показано существование устойчивого паросочетания в случае применения политики «одинакового результата» для абитуриентов, набравших одинаковое число баллов. Также получены результаты,

характеризующие структуру множества устойчивых паросочетаний и соответствующих им проходных баллов. Полученные результаты применимы к широкому классу систем централизованного распределения, где в предпочтениях сторон присутствуют безразличия.

Результаты исследований этого подраздела отражены в работе [11]:  
Biro P., Kiselgof S.G. College admissions with stable score – limits// Working papers by Hungarian Academy of Sciences. Series MT-DP «Discussion Papers of Hungarian Academy of Sciences», 6, 2013.

### 3 Исследование моделей принятия решений в политической сфере

В этом разделе отчета приведены результаты исследований моделей принятия решений в политической сфере. Результаты в рамках исследования этого раздела были получены в следующих теоретических и прикладных направлениях:

- исследование и развитие моделей индексов влияния;
- исследование моделей этнополитической напряженности;
- распределение влияния между фракциями и группами в Верховной Раде Украины (1990 – 2012 гг.).

#### 3.1 Исследование и развитие моделей индексов влияния

Основная идея пропорционального представительства состоит в том, что число мест в парламенте, полученное партией в результате выборов, должно быть пропорционально числу избирателей, проголосовавших за эту партию. Можно предположить, что и влияние партии (что бы под ним не понималось) должно быть пропорционально числу полученных ею мест в парламенте. Однако, в противоречии с интуицией, влияние не может быть пропорционально числу голосов.

В качестве примера рассмотрим два варианта распределения голосов между тремя партиями в парламенте из 100 депутатов (для принятия решения требуется 51 голос). В первом случае все партии будут иметь почти поровну мест (скажем, 34, 33 и 33), во втором – 49, 48 и 3 места в парламенте. Тогда в обоих случаях для принятия решения необходима поддержка двух или трех партий, т.е. влияние всех партий одинаково. Но распределение голосов различительно отличается.

Более того, невозможно так изменить избирательную систему, чтобы влияние партии было пропорционально числу поданных за нее голосов. Само за себя говорит название одной из первых статей о влиянии "Weighted voting doesn't work" [58]. Действительно, если партий только две (*A* и *B*), то числа

голосов, поданных за них, могут соотноситься как угодно, но с точки зрения влияния на принятие решений возможно только три ситуации:

- если голосов любой из партий достаточно для принятия решения, то их влияния равны;
- если голосов любой из партий не достаточно для принятия решения, то их влияния также равны;
- если голосов одной из партий достаточно для принятия решения, а другой нет, то все влияние сосредоточено «в ее руках».

Итак, влияние либо делится поровну, либо полностью достается одной из партий, распределение влияния, например, «60 на 40» невозможно.

С другой стороны, существует несколько утверждений, показывающих, что «в пределе» или «в среднем» влияние партий пропорционально числу их голосов.

В [100] сформулирована и при некоторых условиях доказана предельная теорема Пенроуза, утверждающая, что если квота фиксирована, число игроков стремится к бесконечности и «старые» участник сохраняют число своих голосов, то отношение между влиянием (по Пенроузу) любых двух участников стремится к отношению чисел их голосов.

Утверждение «в среднем по квоте влияние пропорционально числу голосов» кажется довольно естественным, тем не менее, автору не известны работы, в которых оно бы доказывалось хоть в какой-нибудь формулировке. Цель исследования этого подраздела – исправить этот пробел.

### 3.1.1 Простые игры и индексы влияния

Цель этого пункта – формализация встречающихся на практике правил принятия решения в выборных органах (парламентах, собраниях акционеров, советах директоров компаний и т.д.). Предполагается, что на голосование ставятся только две альтернативы (чаще всего – принимается ли предложение или нет). Поэтому правило принятия решения можно задать, указав, со-

вместных усилий каких участников достаточно для принятия решения, а каких – нет.

Пусть  $N$  – конечное множество, элементы которого занумерованы с 1 до  $n$ , т.е.  $N=\{1,\dots,n\}$ . Элементы множества  $N$  называются игроками, подмножества  $N$  – коалициями. Коалицию  $N$  иногда называют тотальной.

Определение 3.1. Будем называть простой игрой пару  $(N,v)$ , где  $N$  – множество, а  $v:2^N \rightarrow \{0,1\}$  – функция, сопоставляющая каждому подмножеству  $N$  либо 0, либо 1, причем выполняется свойство монотонности.

Определения даны в соответствии с [118]. Более традиционное определение простой игры предполагает также, что  $v(\emptyset)=0$ ,  $v(N)=1$ . Это условие исключает только две тривиальные игры, в которых  $v(S)$  тождественно равна 0 или 1 (см. [44]). Будем обозначать эти игры как 0 и 1 соответственно.

Коалиция  $S$  называется выигрывающей, если  $v(S)=1$ , и проигрывающей, если  $v(S)=0$ .

Игрок  $i$  называется ключевым в коалиции  $S$ , если  $S$  выигрывающая, а  $S \setminus \{i\}$  – проигрывающая.

Игрок  $i$  называется болваном, если он не ключевой ни в одной коалиции, т.е. для любой коалиции  $S$  верно  $v(S \setminus \{i\})=v(S)$ . Название дано в [116] по аналогии с бриджем – и там и здесь болван – игрок, не имеющий возможности влиять на события. Множество всех коалиций, в которых игрок  $i$  ключевой, обозначается  $W_i(v)$ .

Выигрывающая коалиция  $S$  называется минимальной, если все игроки в ней ключевые или, другими словами,  $S$  не содержит никакой другой выигрывающей коалиции. Множества выигрывающих и минимальных выигрывающих коалиций обозначаются соответственно  $W(v)$  и  $M(v)$ . Простая игра часто задается перечислением всех (или только минимальных) выигрывающих коалиций. Это оправдано, поскольку  $M(v)$  однозначно определяет  $W(v)$ , а  $W(v)$  – функцию  $v$ .

Замечание 3.1. Отметим, что если  $v=0$ , то минимальных выигрывающих коалиций не существует, если  $v=1$ , то единственной минимальной выигрывающей коалицией будет  $\emptyset$ . В остальных случаях в игре  $v$  будет хотя бы одна непустая минимальная выигрывающая коалиция, в которой будут ключевые игроки.

Понятие простой игры удобно для анализа, но большинство реальных правил голосования устроены по более простой схеме.

Определение 3.2. Пусть  $N=\{1,\dots,n\}$  – множество игроков. Голосованием с квотой (weighted game) называется упорядоченный набор из  $n+1$  неотрицательного числа, первое из которых ( $q$ ) называется квотой, а остальные ( $w_1,\dots,w_n$ ) – числом голосов или весом соответствующего игрока. Голосование с квотой кратко записывается как  $(q; w_1,\dots,w_n)$ .

Числом голосов (или весом) коалиции называется сумма голосов входящих в нее игроков:  $w(S)=\sum_{i \in S} w_i$ . Коалиция выигрывающая, если ее вес не меньше квоты, и проигрывающая в противном случае. Таким образом, голосованию с квотой сопоставляется простая игра.

Пример 3.1. В Государственной Думе Российской Федерации 450 депутатов. Для принятия решения требуется более половины всех голосов, а для внесения изменений в конституцию – более  $2/3$ , т.е. не менее 226 (301) голоса.

На момент написания текста депутаты разделены на 4 партии: «Единая Россия» (Е, 237 депутатов), КПРФ (К, 92), «Справедливая Россия» (С, 64) и ЛДПР (Л, 55). Предполагая высокую дисциплину голосования во фракциях, можно считать, что участников голосования только четыре и они обладают 237, 92, 64 и 55 голосами, соответственно. Т.е. правило принятия решения – голосование с квотой  $(226; 237, 92, 64, 55)$  для обычных решений и  $(301; 237, 92, 64, 55)$  для изменений в конституции.

В первом случае выигрывающими будут все коалиции, содержащие Е, т.е.  $\{E\}$  будет единственной минимальной выигрывающей коалицией.

Во втором минимальных выигрывающих коалиций будет две: {E,K} и {E,C}.

Часто в определение простой игры добавляется требование, известное, как условие однозначности исхода голосования.

Каждая простая игра задает схему голосования – игроки голосуют за одну из двух альтернатив, и выбирается та, за которую проголосует выигрывающая коалиция. Если ни одна из альтернатив не соберет выигрывающую коалицию, решение не принимается. Но обычно выбрана может быть только одна из альтернатив, поэтому коалиция и дополнение к ней не могут быть выигрывающими одновременно. Запишем это более формально.

Определение 3.3. Простая игра удовлетворяет условию однозначности голосования, если для любой выигрывающей коалиции  $S$  коалиция  $N \setminus S$  проигрывающая.

Голосование с квотой удовлетворяет условию однозначности голосования, если квота больше половины суммарного числа голосов. Обратное, впрочем, неверно. Если в голосовании с квотой (226;237,92,64,55) (ГД РФ) уменьшить квоту до 220 голосов, выигрывающие коалиции останутся теми же, т.е. игра будет удовлетворять условию однозначности голосования, но квота станет меньше половины (225).

Пусть  $v$  – простая игра, Обозначим через  $v_{-S}$  игру, полученную из  $v$  переводом  $S$  из выигрывающих коалиций в проигрывающие. Формально  $W(v_{-S}) = W(v) \setminus \{S\}$ . Будем называть переход от  $v$  к  $v_{-S}$  вычеркиванием коалиции  $S$ . Игра  $v_{-S}$  также будет простой (поскольку коалиция  $S$  минимальна, ее вычеркивание не нарушает монотонности). Впервые эта конструкция была введена в [120].

При вычеркивании коалиции  $S$  игроки, входившие в нее, теряют одну коалицию, в которой они ключевые, игроки, не входящие в  $S$ , наоборот, приобретают одну. Точнее, верна следующая лемма.

Лемма 3.1 [96]. Пусть  $S \in M(v)$ . Тогда

$$W_i(v_{-S}) = \begin{cases} W_i(v) \setminus \{S\}, & \text{если } i \in S; \\ W_i(v) \cup \{S \cup \{i\}\}, & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

Определение 3.4. Индекс влияния,  $\Phi: SG_n \rightarrow R_+^n$ , сопоставляет каждой простой игре  $v$  вектор  $\Phi(v)$ ,  $i$ -я компонента которого интерпретируется как влияние игрока  $i$ . Индексом влияния для голосования с квотой называется индекс влияния соответствующей ей простой игры.

Влияние партии в парламенте, определяется возможностью партии формировать с другими партиями выигрывающие коалиции. Более того, слова «партия может влиять на принятие решения» можно интерпретировать, как «существуют ситуации, в которых изменение мнения именно этой партии с «против» на «за» позволяет принять решение», то есть партия является ключевой в какой-то коалиции.

Поэтому влияние партии зависит от того, в каких коалициях она будет ключевой. Если таких коалиций нет, формально партия никак не влияет на принятие решения.

Все известные индексы влияния, то есть количественные оценки влияния партии в парламенте (или, обобщая, игрока в простой игре) зависят как раз от числа и "качества" коалиций, в которых игрок ключевой.

Традиционно влияние измеряется в процентах, что предполагает, что сумма влияний всех игроков равна 1 (или 100%). Это свойство верно для большинства индексов влияния, но есть и исключения, самое известное из которых – индекс Пенроуза.

Наиболее же известны индексы влияния Банцафа и Шепли–Шубика.

В основе этих индексов лежит следующее предположение. Раз влияние игрока зависит только от того, в каких коалициях он ключевой, и никакой дополнительной информации нет, естественно считать, что все коалиции равноправны и влияние игрока просто пропорционально числу таких коалиций.

В индексе влияния Пенроуза ( $P$ ) [109], число коалиций с ключевым игроком  $i$  делится на число всех коалиций, в которые входит  $i$ :

$$P_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} |W_i(v)|.$$

Индекс влияния Банцафа ( $Bz$ ) [58] пропорционален (как вектор) индексу Пенроуза, но коэффициент пропорциональности подбирается так, чтобы сумма влияний была равна единице (т.е. чтобы можно было говорить о проценте влияния). Формально сначала вычисляется общий (total) индекс Банцафа  $TBz$ :

$$TBz_i = |W_i|.$$

Индекс влияния Банцафа  $Bz$  получается из общего индекса нормированием.

$$Bz_i = \frac{|W_i|}{\sum_{j=1}^n |W_j|}.$$

Как и все искусственно нормированные индексы, индекс Банцафа определен, если знаменатель не равен 0, т.е. для какого-то  $j$  множество  $W_j$  не пусто, т.е. если  $v \neq 0, 1$ .

Индекс Шепли–Шубика ( $SSI$ ) [116] возник в теории игр как частный случай вектора Шепли. В нем число, которое коалиция добавляет к влиянию игрока, зависит от ее размера

$$SSI_i = \sum_{S \in W_i(v)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} = \sum_{S \subseteq N} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}.$$

### 3.1.2 Игры и индексы влияния, зависящие от предпочтений участников

Классические индексы влияния имеют существенный недостаток – все они не учитывают взаимоотношения между игроками (или, по другому, предпочтения игроков по созданию коалиций), в то время как некоторые

коалиции могут образовываться часто, некоторые редко, некоторые, возможно, не образовываться вообще.

Кажется естественным учитывать предпочтения игроков при подсчете влияния (см. обсуждение альтернативной точки зрения в [32]). Приведенная ниже конструкция несколько обобщает определения [3,55].

В определение простой игры добавляется дополнительная информация – каждому игроку  $i$  и коалиции  $S$  сопоставляется число  $f(i, S)$ , которое можно воспринимать, как меру желания игрока  $i$  присоединяться к  $S$ .

Определение 3.5. Назовем простой игрой с предпочтениями тройку  $(N, v, f)$ , где  $N = \{1, \dots, n\}$  – множество игроков, пара  $(N, v)$  образует простую игру,  $f$  – функция, сопоставляющая каждой коалиции  $S$  и игроку  $i$  действительное число  $f(i, S)$ . Игра называется симметричной, если  $f$  зависит только от  $S$ . в этом случае функция интенсивности записывается как  $f(S)$  Множество всех (симметричных) простых игр с предпочтениями для  $n$  игроков обозначается  $SGP_n$  ( $SSGP_n$ ) соответственно.

Простую игру можно воспринимать, как простую игру с предпочтениями, в которой все коалиции одинаково предпочтительны –  $(N, v) \equiv (N, v, 1)$ .

В случаях, когда это не вызывает путаницы, игра  $(N, v, f)$  обозначается просто  $v$ . Если две игры использованы в одном доказательстве, предполагается, что функция  $f$  у них одна и та же.

Понятия выигрывающей, проигрывающей и минимальной выигрывающей коалиций, и ключевого игрока, вычеркивания коалиции и голосования с квотой дословно переносятся из простых игр. Наличие дополнительной функции  $f$  пока ни на что не влияет. При вычеркивании коалиции меняется только  $v$ , функция  $f$  остается прежней.

Пример 3.2 [55]. Предпочтения игроков задаются  $n \times n$ -матрицей  $P$ . Неформально говоря, ее элемент определяет желание игрока  $i$  входить в коалицию с игроком  $j$ . Матрица  $P$  не обязательно симметрична, т.е. в общем случае  $p_{ij} \neq p_{ji}$ . Для вычислений удобно считать, что  $p_{ii} = 0$ .

В [55] приведено несколько способов определения матрицы предпочтений для реальных выборных органов и предложены 14 версий индекса, основанных на матрице предпочтений. Приведем некоторые из них. В обозначениях данной работы

$$f^+(j, S, P) = \sum_{i \in S} \frac{p_{ji}}{s-1}, \quad f^-(j, S, P) = \sum_{i \in S} \frac{p_{ij}}{s-1}, \quad (3.1)$$

$$f(j, S, P) = \frac{1}{2}(f^+(j, S, P) + f^-(j, S, P)), \quad (3.2)$$

$$f(S, P) = \sum_{j \in S} \frac{1}{s} f^+(j, S, P) = \sum_{j \in S} \frac{1}{s} f^-(j, S, P) = \frac{1}{s(s-1)} \sum_{i, j \in S} p_{ij}. \quad (3.3)$$

Если коалиция  $S$  состоит из одного элемента, считаем все функции равными 1.

Величину  $f^+(j, S, P)$  можно интерпретировать, как среднее желание игрока  $j$  входить в коалицию с остальными игроками  $S$ ,  $f^-(j, S, P)$  – как среднее желание остальных игроков  $S$  входить в коалицию с  $j$ ,  $f(S, P)$  – как среднее желание всех игроков входить в коалицию со своими коллегами из  $S$ .

Индекс влияния,  $\Phi: SGP_n \rightarrow R^n$  ( $SSGP_n \rightarrow R^n$ ), как и в случае простых игр, сопоставляет каждой игре с предпочтениями  $v$  вектор  $\Phi(v)$ ,  $i$ -я компонента которого интерпретируется как влияние игрока  $i$ .

Определение 3.6.  $\alpha$ -индекс влияния определяется по формуле

$$\alpha_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} f(i, S). \quad (3.4)$$

Пусть  $f(i, S) > 0$  для всех игроков и коалиций, а  $v \neq 0, 1$ . Определим нормированный  $\alpha$ -индекс влияния  $N\alpha(v)$ :

$$N\alpha_i(v) = \frac{\alpha_i(v)}{\sum_{j \in N} \alpha_j(v)}. \quad (3.5)$$

Пример 3.3. Многие индексы влияния можно записать с помощью  $\alpha$ -индекса:

- подставив в формулу (3.4),  $f(i, S) = 1$ , получим ненормированный индекс Банцафа, а подставив потом в формулу (3.5) – нормированный;
- подставив в формулу (3.4)  $f(i, S) = 2^{1-n}$ , получим индекс Пенроуза;
- подставив в формулу (3.4)  $f(i, S) = \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$ , получим индекс Шепли–Шубика.

О представлении в таком виде других индексов влияния см. [45].

Пример 3.4. Естественно ожидать, что индекс влияния игрока тем больше, чем лучше его отношения с оппонентами и чем хуже отношения между ними. Это не всегда так.

Рассмотрим голосование с квотой (3;2,1,1). Множество выигрывающих коалиций –  $\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ . Первый игрок будет ключевым во всех коалициях, второй и третий – только в первой и второй соответственно.

- Теперь предположим, что матрица предпочтений симметрична (т.е.  $p_{ij} = p_{ji}$ ) и  $f(S)$  вычисляется по формуле (3.3). Вычислим  $N\alpha(v)$  в трех случаях:
- 1)  $p_{ij} = 1$  для всех  $i, j$ . Тогда и  $f(S) = 1$  для всех  $S$ , и  $N\alpha_1(v) = \frac{3}{5}$ ,  $N\alpha_2(v) = N\alpha_3(v) = \frac{1}{5}$ ;
  - 2)  $p_{12} = p_{13} = 1$ ,  $p_{23} = 0$  – игрок 1 находится в хороших отношениях с игроками 2 и 3, а они между собой – в плохих; тогда  $f(\{1,2\}) = 1$ ,  $f(\{1,3\}) = 1$ ,  $f(\{1,2,3\}) = \frac{2}{3}$  и  $N\alpha_1(v) = \frac{8}{14} < \frac{3}{5}$ ,  $N\alpha_2(v) = N\alpha_3(v) = \frac{3}{14}$ ;
  - 3)  $p_{12} = p_{13} = 0$ ,  $p_{23} = 1$  – игрок 1 находится в плохих отношениях с игроками 2 и 3, а они между собой – в хороших; тогда  $f(\{1,2\}) = 0$ ,  $f(\{1,3\}) = 0$ ,  $f(\{1,2,3\}) = \frac{1}{3}$  и  $N\alpha_1(v) = 1$ ,  $N\alpha_2(v) = N\alpha_3(v) = 0$ .

Для сравнения вычислим классические индексы влияния. По определению  $Bz_1(v) = \frac{3}{5}$ ,  $Bz_2(v) = Bz_3(v) = \frac{1}{5}$ ,  $P_1(v) = \frac{3}{4}$ ,  $P_2(v) = P_3(v) = \frac{1}{4}$ . В формулу для индекса Шепли–Шубика коалиции  $\{1,2\}$  и  $\{1,3\}$  входят с коэффициентом  $\frac{1}{6}$ , а коалиция  $\{1,2,3\}$  – с коэффициентом  $\frac{1}{3}$ , поэтому  $SS_1(v) = \frac{2}{3}$ ,  $SS_2(v) = SS_3(v) = \frac{1}{6}$ .

### 3.1.3 Аксиомы индексов влияния

Аксиоматическому подходу к индексам влияния посвящено огромное количество работ. Основные результаты этого подраздела также можно удобно сформулировать в аксиоматическом ключе. Сформулируем несколько хорошо известных аксиом для индексов влияния.

Аксиома болвана / Null Player ( $NP$ ). Для любой игры  $v \in SG_n$  ( $SGP_n$ ), если  $i$  – болван в игре  $v$ , то его влияние равно 0, т.е.  $\Phi_i(v) = 0$ .

Смысл этой аксиомы в том, что влияние означает возможность делать проигрывающую коалицию выигрывающей. Если игрок ни в какой ситуации не может этого сделать, его влияние равно нулю.

Трансфер / Transfer ( $T$ ). Для любых игр  $v, w \in SG_n$  ( $SGP_n$ ), любой коалиции  $S \in M(v) \cap M(w)$  и любого  $i \in N$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_i(w) - \Phi_i(w_{-S}).$$

Эта аксиома – одна из эквивалентных переформулировок аксиомы аддитивности (см. [116,117]), впервые введена в [96]. Она означает, что потери игрока  $i$  от вычеркивания коалиции не зависят от игры, в которой это происходит.

Условие симметричности доходов/потерь / Symmetric Gain-Loss ( $SymGL$ ):

1) Для любой игры  $v \in SG_n$ , любой коалиции  $S \in M(v)$  и любых  $i, j \in S$ :

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_j(v) - \Phi_j(v_{-S});$$

2) для любой игры  $v \in SG_n$ , любой коалиции  $S \in M(v)$  и любых  $i, j \notin S$ :

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_j(v) - \Phi_j(v_{-S}).$$

Аксиома похожа на  $T$  и заменяет ее в некоторых аксиоматиках. Она означает, что в рамках конкретной игры (в отличие от  $T$ , где рассматриваются все игры сразу) потери от вычеркивания коалиции  $S$  одинаковы для всех иг-

роров, в  $S$  входящих (часть 1), а для игроков, в  $S$  не входящих, одинаковы доходы (часть 2). Впервые она введена в [96], разбита на 2 части в [44].

Все упомянутые в статье индексы удовлетворяют аксиоме болвана. Аксиоме  $T$  удовлетворяют все индексы, кроме индекса Банцафа ([44]), аксиоме  $SymGL$  удовлетворяют индексы Пенроуза и Шепли–Шубика ([96]), а  $\alpha$ -индекс – только ее первой части и только если игра симметрична.

Следующая теорема описывает общий вид индексов влияния.

Теорема 3.1 [44]. 1) Пусть индекс влияния  $\Phi(v)$  удовлетворяет аксиомам  $NP$  и  $T$ . Тогда

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} g(i, S), \quad (3.6)$$

где  $g(i, S)$  – не зависящие от  $v$  числа.

2) Пусть индекс влияния  $\Phi(v)$  удовлетворяет аксиомам  $NP$ ,  $T$  и  $SymGL_1$ . Тогда

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} g(S), \quad (3.7)$$

где  $g(S)$  – не зависящие от  $v$  числа.

3) Пусть индекс влияния  $\Phi(v)$  удовлетворяет аксиомам  $NP$ ,  $T$  и обеим частям  $SymGL$ . Тогда

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} g(|S|), \quad (3.8)$$

где  $g(|S|)$  – не зависящие от  $v$  числа.

### 3.1.4 Основные результаты

Влияние игрока в голосовании с квотой (независимо от того, по какому из индексов оно считалось) не пропорционально числу голосов, причем влияние может быть как больше, так и меньше доли числа голосов, что показывает следующий пример.

Пример 3.5. В голосовании с квотой  $(q; 2, 1, 1)$  первый игрок обладает половиной всех голосов, второй и третий – четвертью каждый.

- 1) Пусть, как в примере 3.4,  $q=3$ . Тогда  $Bz_1(v) = \frac{3}{5}$ ,  $Bz_2(v) = Bz_3(v) = \frac{1}{5}$ .
- 2) Пусть теперь  $q=4$ . Выигрывающей будет только коалиция  $\{1,2,3\}$ , в которой ключевыми будут все три игрока:  $Bz_1(v) = Bz_2(v) = Bz_3(v) = \frac{1}{3}$ .

В первой части примера влияние первого игрока больше доли его голосов, влияние второго и третьего меньше. Во второй части – наоборот. Возникает подозрение, что «в среднем по квоте» влияние игрока пропорционально числу его голосов.

Для индекса Банцафа (и любого другого индекса, не удовлетворяющего аксиоме аддитивности или ее аналогам  $T$  или  $SymGL$ ) строго сформулировать это утверждение проблематично. Но для аддитивных индексов влияния можно провести следующее рассуждение.

Обозначим через  $v_q$  голосование с квотой  $(q; w_1, \dots, w_n)$ , т.е. число голосов участников фиксировано,  $q$  – параметр.

Пусть индекс влияния  $\Phi$  удовлетворяет аксиомам  $NP$  и  $T$ , т.е. удовлетворяет первой части теоремы 3.1.3. Для «усреднения» вычислим интеграл по квоте от влияния игрока  $i$

$$\int_0^{\infty} \Phi_i(v_q) dq .$$

Бесконечность в качестве верхнего предела интегрирования поставлена для естественности формулировки. Действительно, если квота больше  $w(N)$  (суммы голосов всех игроков), в игре не будет выигрывающих коалиций,  $W_i(N) = \emptyset$  и, по формуле (3.6),  $\Phi_i(v_q) = 0$  для всех  $i$ . Поэтому

$$\int_0^{\infty} \Phi_i(v_q) dq = \int_0^{w(N)} \Phi_i(v_q) dq . \quad (3.9)$$

В формуле (3.6) суммирование только по ключевым коалициям можно заменить на суммирование по всем коалициям с умножением слагаемых на  $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ :

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} g(i, S) (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

Подставим  $\Phi_i(v)$  в формулу (3.9) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Это можно сделать, так как сумма конечна и интегрирование происходит по отрезку.

Обозначим подынтегральную функцию через  $h(q)$ . Если  $i \notin S$ , то  $S = S \setminus \{i\}$  и  $h(q) = 0$ , поэтому интеграл от нее равен 0.

Если  $i \in S$ , то  $h(q)$  равна либо 0, либо  $g(i, S)$ , причем  $h(q) = g(i, S)$ , если и только если  $S$  выигрывающая и  $i$  – ключевой участник в  $S$ , т.е.  $w(S) - k_i < q \leq w(S)$ .

Интеграл от неотрицательной функции численно равен площади под ее графиком, поэтому интеграл от  $f(q)$  – площадь прямоугольника высоты  $g(i, S)$  и ширины  $w_i$ , равная  $w_i g(i, S)$ . Итак,

$$\int_0^\infty \Phi_i(v_q) dq = \sum_{S \ni i} w_i \cdot g(i, S) = w_i \cdot \sum_{S \ni i} g(i, S). \quad (3.10)$$

Следующая теорема будет следствием формулы (3.10).

Теорема 3.2. 1) Для  $\alpha$ -индекса:

$$\int_0^\infty \alpha_i(v_q) dq = w_i \cdot \sum_{S \ni i} f(i, S).$$

2) Пусть индекс влияния  $\Phi(v)$  удовлетворяет аксиомам  $NP$ ,  $T$  и  $SymGL$ . Тогда

$$\int_0^\infty \Phi_i(v_q) dq \text{ пропорционален } w_i.$$

3) Для индексов Пенроуза и Шепли–Шубика:

$$\int_0^\infty P_i(v_q) dq = \int_0^\infty SS_i(v_q) dq = w_i.$$

Если пытаться обобщить теорему на индекс Банцафа (или на любой другой нормированный индекс), нужно верхний предел интегрирования заменить на  $w(N)$ , поскольку при больших квотах  $v_q = 0$  и индекс Банцафа не оп-

ределен. Кроме того, нужно не рассматривать точку 0, т.к. иначе  $v=1$ . Но и в этом случае теорема неверна.

Пример 3.6. Продолжая пример 3.3.1., вычислим для голосования с квотой  $(q; 2, 1, 1)$  среднее значение индекса Банцафа:

- 1)  $0 < q \leq 1$  – выигрывающими коалициями с ключевыми участниками будут  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  и  $\{3\}$ , каждый из участников ключевой в своей коалиции; индекс Банцафа равен  $\frac{1}{3}$  для всех игроков;
- 2)  $1 < q \leq 2$  – выигрывающими коалициями с ключевыми участниками будут  $\{1\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ , игрок 1 будет ключевым в первых трех коалициях, игроки 2 и 3 – в последней:  $Bz_1(v) = \frac{3}{5}$ ,  $Bz_2(v) = Bz_3(v) = \frac{1}{5}$ .

Оставшиеся случаи рассмотрены в примере 3.4:

- 3)  $2 < q \leq 3$ ,  $Bz_1(v) = \frac{3}{5}$ ,  $Bz_2(v) = Bz_3(v) = \frac{1}{5}$ ;
- 4)  $3 < q \leq 4$ ,  $Bz_1(v) = Bz_2(v) = Bz_3(v) = \frac{1}{3}$ .

Итак,  $Bz_1(v)$  – ступенчатая функция, принимающая значения  $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}$  на отрезках длины 1. Поэтому площадь под ее графиком будет равна

$$\int_0^4 Bz_1(q) dq = \frac{28}{15}.$$

Аналогично,

$$\int_0^4 Bz_2(q) dq = \int_0^4 Bz_3(q) dq = \frac{16}{15}.$$

Иначе говоря, среднее значение индекса Банцафа для первого игрока меньше числа голосов, а для второго и третьего больше.

При обсуждении теоремы многие коллеги указывали автору, что в большинстве реальных схем голосования  $q \geq \frac{1}{2}w(N)$ , т.е. выполняется условие однозначности исхода голосования. Поэтому при усреднении логично начинать интегрирование по квоте не с 0, а с  $\frac{1}{2}w(N)$ .

Оказывается, что теорема о среднем при некоторых дополнительных ограничениях остается верна.

### Теорема 3.3.

1) Пусть функции интенсивности таковы, что для любого игрока  $i$  и коалиции

$$S \text{ верно } \int_{w(N)/2}^{w(N)} \alpha_i(v_q) dq = \frac{1}{2} w_i \cdot \sum_{S \ni i} f(i, S). \text{ Тогда}$$

$$\int_{w(N)/2}^{w(N)} \alpha_i(v_q) dq = \frac{1}{2} w_i \cdot \sum_{S \ni i} f(i, S).$$

2) Пусть индекс влияния  $\Phi(v)$  удовлетворяет аксиомам  $NP$ ,  $T$  и  $SymGL$ . Тогда

$$\int_{\frac{1}{2}w(N)}^{w(N)} \Phi_i(v_q) dq \text{ пропорционален } w_i.$$

3) Для индексов Пенроуза и Шепли–Шубика:

$$\int_{\frac{1}{2}w(N)}^{w(N)} P_i(v_q) dq = \int_{\frac{1}{2}w(N)}^{w(N)} SS_i(v_q) dq = \frac{1}{2} w_i.$$

Неформально начальное условие первой части теоремы означает, что игроку все равно, с кем вступать в коалицию – с игроками из  $S \setminus \{i\}$  или с остальными игроками  $(N \setminus S)$ .

Также коллегами было отмечено, что в реальности число голосов и квота – целые числа. В этом случае при усреднении можно не интегрировать, а суммировать по квоте.

#### 3.1.5 Некоторые выводы

Для  $\alpha$ -индекса влияние «в среднем по квоте» пропорционально, во первых, числу голосов, во вторых, сумме  $f(i, S)$  по всем возможным коалициям, которую можно интерпретировать, как меру желания остальных игроков входить в коалицию с  $i$ .

Будем говорить, что индекс влияния удовлетворяет теореме о среднем, если для него выполняется пункт 2) теоремы 3.1.

Любой индекс влияния, удовлетворяющий аксиомам  $NP$ ,  $T$  и  $SymGL$  удовлетворяет и теореме о среднем, в частности индексы влияния Шепли–Шубика, Пенроуза и общий индекс Банцафа.

Кажется, что теорема 3.3 говорит, что «в среднем» справедливость все-таки есть и влияние пропорционально числу голосов. На практике это не так.

Если  $q \leq \min_i w_i$ , выигрывающими будут все коалиции, кроме  $\emptyset$ ; если же, наоборот,  $w(n) \geq q > w(n) - \min_i w_i$ , выигрывающей будет только  $N$ . В обоих случаях (по аксиоме анонимности) влияния всех игроков будут равны и «слабые» участники будут обладать относительно большим влиянием. Тот же эффект наблюдается, если квота мала (велика). Такие ситуации крайне редко, но встречаются. Например, в Сейме Речи Посполитой до 1791 г. действовало право "Liberum veto" – любой депутат Сейма мог прекратить обсуждение вопроса, т.е. решение могло быть принято только при поддержке всех депутатов, что соответствует голосованию с квотой  $(n; 1, \dots, 1)$ .

Если же квота близка к  $\frac{1}{2}w(N)$ , (а на практике в большинстве случаев  $\frac{1}{2}w(N) < q \leq \frac{2}{3}w(N)$ ), то происходит «перекос» в обратную сторону. Теперь уже «сильные» участники обладают относительно большим влиянием. Этот эффект был отмечен во многих работах, например, [46,87].

Результаты исследований этого подраздела нашли отражения в книге [7] и кандидатской диссертации Шварца Д.А. «Индексы влияния, зависящие от предпочтений участников – аксиоматическое построение и методы вычисления», защищенной в НИУ ВШЭ в 2013 г.

### 3.2 Исследование моделей этнополитической напряженности

В этом подразделе приведены результаты исследования моделей этнополитической напряженности.

Проблема источников социальных конфликтов изучается очень давно. В ранних исследованиях большое внимание уделялось распределению доходов как причине конфликта между группами в обществе [59,102,106]. Имущественное неравенство способно обусловить антагонизм бедных и богатых слоев общества. В свою очередь, неэкономические характеристики индивидов могут стать факторами разделения общества на «экономически похожие» группы. И тогда, в случае конфликта проигравшая сторона может быть исключена из пользования/владения тем или иным благом. Так, во второй половине XX в., наряду с «потускнением» лево-правой идеологической оси, была замечена «национализация» борьбы между соперниками на выборах [60]. В связи с ростом социальной напряженности и конфликтов, поляризация общества как предмет изучения постоянно привлекает к себе внимание исследователей.

Признается, что этническая идентификация является «расплывчатым и аморфным понятием», у которого отсутствует единое определение. «Вся система понятий, используемая в научной литературе при характеристике этнических конфликтов, является предметом дискуссий» [29]. Считается, широкое употребление термина «этничность» началось в середине 70-х гг. XX в. В отечественных научных исследованиях термин «этническое самосознание» был введен в научный оборот в сер. 60-х – начале 70-х гг., но с конца 80-х годов стал вытесняться терминами «этничность» и «этническая идентичность», принятymi в западной, преимущественно американской антропологии и социологии [42].

В социальных науках существуют три основных теоретических подхода к изучению этничности и этнической идентичности: примордиализм, конструктивизм и инструментализм. В каждом из них признается, что необходимым условием для этнической идентификации является выделение категорий

«свои» и «чужие», «мы» и «они». В примордиализме этничность понимается как «врожденная» характеристика, обусловленная происхождением, а члены этнических групп объединены в некоторое сообщество по признакам культуры, языка, традиций, религии, территории и осознают свое отличие от членов иных сообществ. Конструктивизм, в свою очередь, акцентирует внимание на том, что этническая принадлежность не является объективно существующей характеристикой, а является «вопросом веры» [39]. Этническая группа (этнос) считается «воображаемой общностью», возникшей в результате упрощения картины мира, социальной организации культурных различий. В инструментализме, представляющем одно из направлений конструктивизма, этническая принадлежность объективна в том смысле, что она определяет членство индивида в некоторой общности, и актуализируется политическими элитами с целью борьбы за политические привилегии и экономические блага. Таким образом, классификация этнических групп, произведенная исследователями исходя из разных подходов, может оказать значимое влияние на полученные исследователем результаты.

Этническая принадлежность, согласно Д. Горовицу, основана на идее об общем происхождении и наличии врожденных особенностей, что делает неотделимым от понятия этнической принадлежности кровное родство или родство через брак [93]. Определение этнической группы как «автономной группы, более крупной, чем семья, членство в которой, в первую очередь, определяется по происхождению, и имеющей признанную историю» было предложено в работе Дж. Фирона и Д. Лайтина [86]. Следуя такому подходу, этническими будут считаться группа евреев или группа сомалийцев, хотя первые могут не говорить на одном языке или не иметь общей территории, а вторые скорее разделены по клановому признаку, не будучи значимо различными с культурной точки зрения.

«Этническими являются такие группы, которые разделяют веру в общее происхождение по причинам сходной внешности, разделяемых обычаям или преданий о периоде колонизации или миграции. Эта вера должна быть важ-

ной для формирования группы, независимо от того, существует ли кровное родство» – такое определение этнической идентичности было предложено М. Вебером [119].

Например, в качестве характерных особенностей этнических групп предлагаются следующие: членство в ней определяется, в первую очередь, по происхождению; члены группы осознают себя таковыми, разделяют характерные культурные особенности; данные культурные особенности ценятся большинством членов группы; группа имеет родину (*homeland*) – место происхождения, с которым есть духовная связь – или сохраняет воспоминания о ней, а также общую историю, которая не является полностью вымыслом и подтверждается объективными фактами [83].

Таким образом, во многих определениях подчеркивается общее происхождение индивидов из одной этнической группы или хотя бы идея о нем. К общему происхождению добавляются требования наличия общей культуры и/или языка, а также общей истории и принципиальной автономности группы, но этническая группа не должна быть ограничена семьей или родом, а должна составлять часть населения страны, и если «в некотором месте человек является членом данной группы, то и его братья тоже должны иметь возможность являться ее членами» [64].

Этническая идентификация считается мощным фактором поведения, особенно в странах Африки, но источник ее выраженности в политических и социальных делах остается дискутируемым. Например, проверялась гипотеза о том, что этническая идентификация в Африке имеет практическое значение, являясь инструментом в борьбе за политическую власть [76]. На данных о 35 тыс. респондентов из 22 опросов общественного мнения в 10 странах были выявлены свидетельства в пользу того, что люди в Африке склонны подчеркивать свою идентичность в период конкурентных президентских выборов, и к этому апеллируют кандидаты.

Этническое, даже шире – культурное – разнообразие, с одной стороны, имеет свои положительные стороны, оно связано с большим разнообразием

навыков, образования, опыта и может способствовать развитию экономики и распространению инноваций. Например, приводятся аргументы в пользу того, что в 80-е и 90-е гг. XX в. успех Силиконовой долины был обусловлен разнообразием культурного и профессионального опыта исследователей и предпринимателей [90]. Тем не менее, многие исследования обнаруживают, что этнолингвистическая раздробленность населения отрицательно связана с экономическим развитием (возможно, исключая развитые экономики) и положительно связана с возникновением гражданских конфликтов. “*There is no free lunch for diversity*” – отмечают В. Гинзбург и Ш. Вебер [90].

До некоторой степени ответ на вопрос о важности культурного разнообразия в конфликтах зависит от того, что понимать под «этническим разделением». Существуют два основных подхода к анализу культурного разнообразия обществ – с использованием мер фрагментированности общества [50,66,85] и мер поляризованности [80,104].

Фрагментированность представляет собой характеристику раздробленности стран или отраслей на группы по некоторому признаку. Если страна *A* состоит из двух групп одинаковой численности, а страна *B* – из трех групп одинаковой численности, то фрагментированность в стране *B* больше. Поляризованность, в свою очередь, учитывает, степень сходства между группами, и чем меньше сходство, тем больше степень антагонизма в обществе.

Поляризованность, как и фрагментированность, может измеряться по многим признакам: доходам, этнической, религиозной и лингвистической принадлежности, политическим симпатиям и пр. [5]. Предметом нашего интереса является этническая гетерогенность общества как фактор возникновения гражданских конфликтов, благосостояния населения и качества государственного управления.

### 3.2.1 Определения индексов

В литературе встречаются семь основных индексов этнической гетерогенности:

- индекс этнолингвистической фрагментированности, *ИЭЛФ*;
- индекс Гринберга, *GI*;
- индекс второстепенной гетерогенности, *RH*;
- индекс поляризованности Эстебана–Рэя, *ER*;
- индекс поляризованности Рейнал–Кэрол, *RQ*;
- индекс поляризованности Вольфсона;
- индекс поляризованности Александрова–Голубенко.

Наиболее популярной мерой измерения этнической гетерогенности был «индекс этнолингвистической фрагментированности» (*ИЭЛФ*), рассчитываемый по следующей формуле:

$$ИЭЛФ = 1 - \sum_{i=1}^N s_i^2,$$

где  $s_i$  – доля  $i$ -й этнической группы в общей численности населения,  $N$  – число групп. Область допустимых значений индекса – [0;1], чем больше в обществе этнических групп, тем больше значения индекса. При полностью гомогенном обществе *ИЭЛФ* принимает значение ноль. *ИЭЛФ* представляет собой преобразование индекса *HHI* Херфиндаля–Хиршмана, используемого в экономике для оценки степени монополизации рынка:

$$ИЭЛФ = 1 - HHI.$$

Достоинство индекса состоит в том, что его величину можно ясно интерпретировать как вероятность, с которой два случайно выбранных в некотором обществе индивида будут принадлежать к разным этническим группам. Именно *ИЭЛФ* использовали в ранних исследованиях связи этнической гетерогенности обществ и некоторых экономических показателей (таких, как политика перераспределения, объемы финансирования общественных благ).

Однако такой поход к оценке этнической гетерогенности общества не учитывает дистанцию между группами, его составляющими, а значит, не «различает» между действительно важными расколам в обществе и теми, которые релевантными не являются.

В 1956 г. Дж. Гринбергом был предложен индекс разнообразия, включающий расстояния между группами [92]:

$$GI = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N s_i s_j \tau_{ij},$$

где  $s_i, s_j$  – доля  $i$ -й и  $j$ -й этнической группы в общей численности населения;  $\tau_{ij}$  – культурная «дистанция» между  $i$ -й и  $j$ -й этнической группой;  $N$  – число этнических групп. Индекс  $GI$  Гринберга изменяется от нуля до единицы. Идеальному типу, при котором  $GI$  обращается в 0, соответствует ситуация, когда общество гомогенно. К ситуации гомогенности общество может приблизиться в случае наличия доминантной группы. Напротив,  $GI$  близкий к 1, свидетельствует о наличии большого числа групп с незначительным численным относительным весом в составе общества.

Индекс второстепенной гетерогенности (*PH – peripheral heterogeneity*) [71] является преобразованием индекса Гринберга. Ранговая корреляция между ними составляет 0.93. Для его расчета требуется информация не о всех попарных расстояниях между этническими группами, а только между основной («титульной») группой и прочими, составляющими население страны:

$$PH = 2 \sum_{j=1}^N s_c s_j \tau_{cj},$$

где  $s_c$  – доля основной этнической группы в общей численности населения,  $s_j$  – доля  $j$ -й этнической группы,  $\tau_{cj}$  – дистанция между  $c$ -й и  $j$ -й этнической группой,  $N$  – число этнических групп.

Г. Беккер в 1957 г. писал, что индивидам свойственно испытывать чувство сопереживания членам своей «группы», и более того, им свойственно меньше любить тех, кто в большей степени на них не похож (цит. по [70],

р.1291–1292). Методикой, призванной преодолеть неспособность учитывать конфликтный потенциал этносов в обществе, является расчет индексов поляризованности.

В 1994 г. в работе Дж. Эстебана и Д. Рэя была предложена методология «идентификации-отчуждения». Она состоит в том, что поляризованность связана с отчуждением от других групп, но при этом она усиливается чувством идентификации со своей группой, т.е. это эффективный антагонизм [80].

В основе индекса поляризованности *ER* Эстебана–Рея лежит стремление измерить, «насколько далеко распределение долей этнических групп от биполярного, который представляет наивысший уровень поляризованности» [80]. Под биполярным распределением понимается ситуация, когда общество разделено на две одинаковые по численности этнические группы. «Простейший, предельный случай, возможный только в теории – когда все сообщество без остатка разделено на две численно равные группы, придерживающиеся диаметрально противоположных позиций по всем политически референтным вопросам. Поляризованность такого общества была бы абсолютной. Соответственно, полная гомогенность политических ориентаций означала бы нулевой уровень поляризованности» [5].

Формально индекс *ER* выглядит следующим образом:

$$ER = K \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N s_i^{1+\alpha} s_j \tau_{ij},$$

где  $s_i$ ,  $s_j$  – доля  $i$ -й и  $j$ -й этнической группы в общей численности населения,  $\tau_{ij}$  – культурная «дистанция» между  $i$ -й и  $j$ -й этнической группой,  $N$  – число этнических групп,  $K$  и  $\alpha$  – масштабирующие коэффициенты, задающие необходимую исследователю область допустимых значений индекса (допустимые значения  $\alpha$  лежат в интервале  $[0, 1.6]$ ).

Задача подбора значений масштабирующих коэффициентов ложится на исследователя. В эмпирических исследованиях индекс *ER* принимал сущест-

венно различающиеся значения при  $\alpha$ , равном 0, 0.8, 1.6 и фиксированном  $K=1$  [50]; исследователями использовались также  $\alpha = 1$  и  $K = 1$  [73].

Широко используемый в исследованиях индекс поляризованности  $RQ$  является частным случаем индекса поляризованности  $ER$  Эстебана–Рея [111]. Формула для расчета  $RQ$  приведена ниже:

$$RQ = 1 - \sum_{i=1}^N \left( \frac{0.5 - s_i}{0.5} \right)^2 s_i = 4 \sum_{i=1}^N s_i^2 (1 - s_i),$$

где  $s_i$  – доля этнической группы  $i$  в общей численности населения,  $N$  – число групп.

Область допустимых значений индекса  $RQ$  –  $[0;1]$ . Значение 0 соответствует обществу, состоящему из одной этнической группы; значение 1 характеризует биполярное распределение долей этнических групп. По формуле видно, что масштабирующие коэффициенты  $K$  и  $\alpha$  равны 4 и 1, соответственно. Второй особенностью индекса  $RQ$  является то, что расстояние  $\tau_{ij}$  принимает всего два значения:  $\tau_{ij} = 0$ , если  $i = j$ ,  $\tau_{ij} = 1$  в противном случае.

Индекс поляризованности Эстебана–Рея не противоречит высказанной идеи Д. Горовица о том, что поляризованность является наибольшей тогда, когда этническому большинству противостоит крупное этническое меньшинство, т.е. вероятность этнического конфликта нелинейно связана с этнической гетерогенностью [104].

Индекс поляризованности Вольфсона строится на отклонениях крайних точек от медианного значения дохода (или некоторого другого анализируемого признака), тогда как класс индексов  $ER$  – на разнице между доходами групп [123]. Связь индекса Вольфсона с индексом имущественного неравенства Джини показана на рисунке 3.1. Формула для расчета индекса поляризованности Вольфсона выглядит следующим образом:

$$P_m^W(F) = 4 \frac{\mu}{m} P_1 = 4 \frac{\mu}{m} \left[ T_m - \frac{G(F)}{2} \right] = 2 \frac{\mu}{m} [2(1/2 - L(1/2)) - G(F)],$$

где  $\mu$  – величина среднего дохода  $F$ ,  $m$  – величина медианы,  $G(F)$  – коэффициент Джини,  $L(1/2)$  – значение кривой Лоренца в точке  $1/2$ ,  $T_m$  – площадь трапеции, образованной прямой под углом  $45^\circ$  и касательной в кривой Лоренца в точке  $1/2$ .

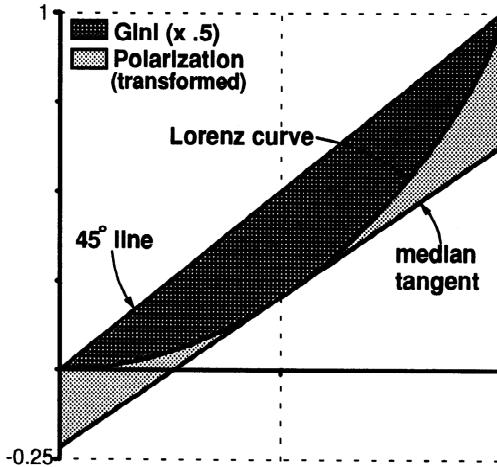


Рисунок 3.1 – Графическое представление индекса поляризованности Вольфсона

Индекс поляризованности, основанный на понятии «центра масс» некоторой системы точек  $p_i$ , относящихся к позициям групп, был предложен Ф. Алескеровым и М. Голубенко [6]. Каждая из групп обладает относительным весом  $v_i$  в общей численности населения,  $\sum_i^k v_k = 1$ .

Для расчета центра масс используется формула

$$c = \sum_{k=1}^n v_k p_k .$$

Индекс поляризованности Алескерова–Голубенко принимает значения в интервале  $[0, 1]$  и рассчитывается по следующей формуле:

$$\Pi = 2 \sum_{i=1}^n v_i |p_i - c| .$$

Минимальное значение индекса достигается при гомогенном обществе, когда есть только одна группа и  $p_i = c$ , максимальное – когда в обществе всего две группы одинаковой численности, занимающие крайние позиции.

Таким образом, для многих индексов этнической гетерогенности важным оказывается подбор характеристики сходства-различия между анализируемыми группами.

### 3.2.2 Расстояния между группами

Для того чтобы рассчитать значения некоторых индексов этнической гетерогенности, необходимо подобрать такой показатель  $\tau_{ij}$ , который характеризует расстояние между группами.

#### 3.2.2.1 Подход с экспертной классификацией

В ранних работах главным источником данных для расчета значений индекса этнолингвистической фрагментированности был «Атлас народов мира», составленный в СССР в 1964 г. [75,95]. В более поздних исследованиях использовалась «Энциклопедия Британника» и Справочник ЦРУ по странам мира, а также данные национальных переписей населения [50,83]. Проект «Меньшинства под угрозой» [103], инициированный Т. Гарром в 1986 г., также используется составления индексов этнолингвистической гетерогенности. Одним из существенных недостатков проекта является отсутствие информации о крупных этнических группах. Тем не менее, он является полезным источником информации о характеристиках этнических меньшинств.

В 2010 году был запущен проект «Географическое расположение этнических групп» (*Geographic Representation of Ethnic Groups dataset, GREG*) – оцифрованная версия Атласа народов мира, содержащая информацию о 1 276 этнических группах на планете [121]. Информация из «Атласа народов мира» на время публикации в 1964 г. являлась качественной, но редко используется в современных исследованиях. Отмечается, что она не всегда позволяет выявить релевантные политические расколы, потому что в ряде случаев просто устарела, а также не учитывает миграционные потоки. Например, согласно Атласу, в Руанде не разделяются народности хуту и тутси, но известно, что в 1994 имел место геноцид этнического меньшинства – тутси [111].

Различие между группами в политических сообществах может происходить по одной или нескольким объективным характеристикам – языку, расовой, религиозной или племенной принадлежности, национальности [110]. И если в Африке языковая принадлежность, в целом, может быть хорошим индикатором существующей неоднородности сообществ, то, например, в США или Южной Америке куда более важным разделяющим фактором может быть религия или принадлежность к то или иной расе, что учитывалось в некоторых исследованиях при расчете индексов фрагментированности [50]. Предлагался также подход с оценкой фрагментированности для трех разных уровня агрегирования данных [115]. Так, самое грубое деление предполагало определение этнических групп значимых на национальном уровне, например, можно объединить всех сирийцев, палестинцев и кувейтцев в группу «арабов». Затем авторы выделили этнические группы значимые на «среднем» уровне, и еще более подробно, разделив по этническому признаку группы «среднего» уровня.

Объединяя оба подхода, Ф. Рёдер подсчитывал индексы для этнических групп, выделенных по разным основаниям – с учетом расовой принадлежности и без (например, белые и афроамериканцы среди американцев), а также разной степени дробности этнического разделения [113]. Кроме того, им использовалась информация не только из Атласа народов мира, но и более поздние источники – «Народы мира: историко-этнографический справочник» 1988 г. под редакцией Ю.В. Бромлея, «Население мира: Этнодемографический справочник» 1986 г. под редакцией С.И. Брука, Итоги всесоюзной переписи Госкомстата 1989 г., Ежегодник Европы (*Europa World Yearbook*).

Для преодоления недостатков ИЭФЛ, Д. Познер в 2004 г. ввел индекс политически релевантных этнических групп (*Politically Relevant Ethnic Groups – PREG*), который предполагает выделение лишь значимых этносов, а все остальные этнические группы рассматриваются как одна [110]. Формула для индекса совпадает с ИЭФЛ, но расчет значений требует выделения значимых для конкретной проблемы этносов на экспертном уровне. Для стран

Тропической Африки корреляция индекса Познера с индексами ИЭФЛ, рассчитанными А. Алезиной и др. и Дж. Фироном, составила, соответственно, 0.48 и 0.44. А последние два индекса *ИЭФЛ*, в свою очередь, коррелируют между собой на уровне 0.89 [110].

Данный подход демонстрирует наличие проблемы прозрачности процедуры кодирования, ее зависимости от субъективной позиции исследователя и ограниченной воспроизводимости. Более того, решение подобной задачи может быть затруднено, если вообще возможно, на субрегиональном уровне.

Часть проблем с экспертным определением политически релевантных этнических групп пытались решить в проекте «Властные отношения и этнические группы» (*Ethnic Power Relations – EPR*) [81]. В 2010 г. была предложена база данных, содержащая информацию о релевантных этнических группах и доступе к политической власти в государстве, а также об изменениях в конфигурациях властных отношений в период с 1946 по 2005 г. [63] Релевантные группы в 156 государствах (с численностью населения не менее 1 млн. и территорией не менее 50,000 км<sup>2</sup> сухопутной территории по состоянию на 2005 г.) были определены по результатам онлайн опроса экспертов. Всего были выделены 733 политически релевантные этнические группы. Этническая группа при кодировании считалась политически значимой, если хотя бы один политик или партия заявляет, что представляет ее интересы на национальном уровне, или если членов этой группы систематически дискриминируют и не допускают к власти. При этом рассматривались только посты в органах исполнительной ветви власти и армии.

У базы EPR существует версия GeoEPR, интегрированная с геоинформационной системой [89]. GeoEPR не улавливает изменения в потоках иммигрантов и беженцев, а фиксирует только значительные изменения в этническом составе населения страны. Тем не менее, данная база данных является ценным источником информации для пространственного моделирования. Исследования показали, что расположение и географический разброс групп населения важен в случаях этнических конфликтов, а также, что между ис-

ключением этнических групп от политического влияния и их склонностью к конфликтам есть связь [63].

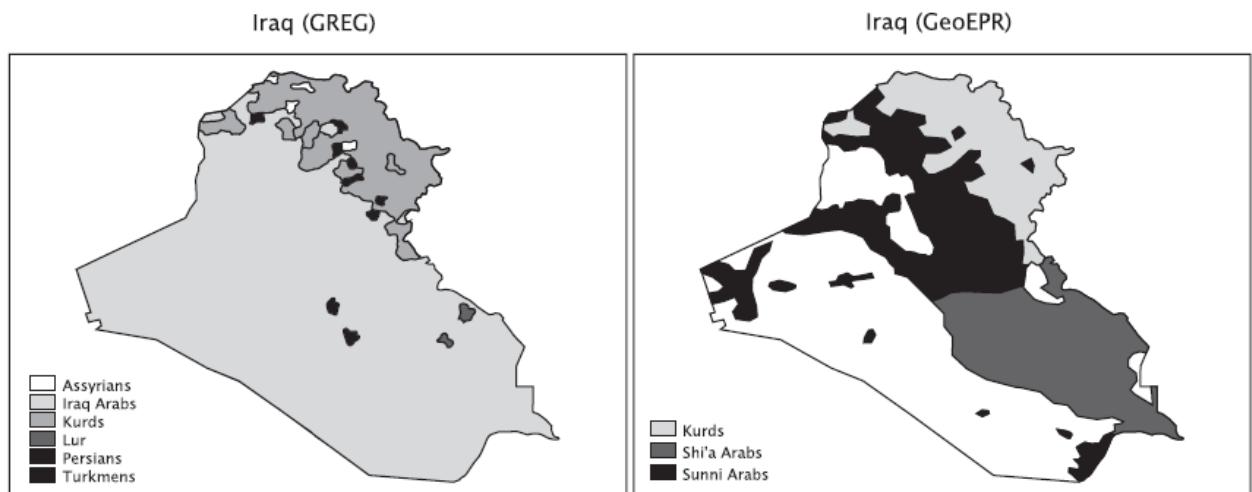


Рисунок 3.2 – Сравнение кодирования этнических групп в Ираке для систем GREG и GeoEPR на карте

На рисунках 3.2 и 3.3 показана разница между кодированием этнических групп в Ираке в системах GREG и GeoEPR. В базе GREG, слева, разделение на этнические группы происходило на основании лингвистической принадлежности, и были выделены сообщества ассирийцев, иракских арабов, курдов, луров, персов и туркменов. В базе GeoEPR, справа, выделяются только политически значимые этнические группы: сунниты, шииты и курды. Заметим, что сунниты и шииты говорят на одном языке, и поэтому в GREG две группы не разделялись. Более того, в базе можно GeoEPR проследить изменения в территориальном расселении этнических групп (рисунок 3.3).



Рисунок 3.3 – Кодирование распространения группы боснийских мусульман в Югославии за 3 периода времени, согласно системе GeoEPR

В упомянутых работах (см., например, [50,75,83,95,110,113,115]) при расчете ИЭФЛ расстояние между этническими группами явным образом не использовалось, а все группы, выделенные исходя из данных, содержащихся в энциклопедических источниках, считались одинаково отдаленным друг от друга. Это не всегда верно. В Андорре около половины населения говорит на каталонском языке, оставшиеся – на испанском (оба языка принадлежат романской группе). В Бельгии около 60% населения говорит на голландском, а 40% – на французском (соответственно, относятся к германской и романской группам языков). ИЭФЛ покажет, что Андорра более неоднородна, чем Бельгия, потому что этот индекс не учитывает дистанцию между группами, тогда как индекс Гринберга  $GI$  будет оценивать относительную неоднородность в Бельгии и Андорре более корректно [70]. Для его расчета, в свою очередь, требуется информация о расстояниях между группами.

### 3.2.2.2 Подход с лингвистическим древом

В качестве индикатора «культурной дистанции» между группами Дж. Фирон предложил взять «расстояние» между языками на лингвистическом древе [83], используя формулу:

$$\tau_{ij} = 1 - \left(\frac{l}{m}\right)^{\alpha},$$

где  $l$  – число совместно разделяемых двумя языками ветвей лингвистического древа языков,  $m$  – общее число ветвей, которые могут быть общими для двух языков,  $\alpha$  лежит в границах  $[0,1]$ . Величина  $\tau_{ij}$  принимает значение 1 в том случае, если «дистанция» между  $i$ -й и  $j$ -й этнической группой максимальна, например, группа  $i$  говорит на языке индо-европейской семьи, а группа  $j$  – на языке алтайской семьи;  $\tau_{ij} = 0$  в том случае, если обе группы говорят на одном языке.

Такой подход выглядит логичным и удобным: чем ближе языки, на которых говорят этнические группы, составляющие одно политическое сообщество, тем более однородным оно может считаться. Тем не менее, остается

открытым вопросом о том, как определить значение степени  $\alpha$ . Этот параметр задает то, насколько близкими будут считаться «родственные» языки, которые не разделяют хотя бы одну ветвь. Если  $\alpha$  велико, то даже для таких близких языков рассчитанная дистанция будет существенной, но «искусственной», если  $\alpha$  мало, то дистанция будет незначительной и, возможно, более адекватной действительности. В исследовании Дж. Фирона используется  $\alpha = 0.5$ , что приводит к чрезмерной чувствительности  $\tau_{ij}$  к различиям в языках этнических групп, поэтому в некоторые исследователи для вычисления расстояний между группами по указанной формуле используются  $\alpha = 0.05$  (см., например, [70,78]).

Расчеты индекса ИЭФЛ с расстояниями, определенными по лингвистическому древу, позволяют сказать, что наиболее этнически фрагментированной является Тропическая Африка, наименее – страны Западной Европы и Северной Америки, ниже среднего уровень фрагментированности в странах Центральной и Восточной Европы и бывшего СССР. Для вычислений использовались только такие языковые группы, размер которых превышает 1% от численности населения страны. В качестве информационной базы использовался проект «Этнология» [82], содержащий актуальные данные о современном состоянии языков в странах мира.

В настоящее время в мире около 200 стран и суверенных территорий, и большинство из них являются многоязычными. Немногие страны, как Северная Корея, могут характеризоваться исключительно гомогенным составом населения [91]. Согласно данным проекта «Этнология», в мире насчитывается почти 7 000 языков, находящихся в употреблении. Например, в Папуа Новой Гвинеи зафиксировано 857 живущих языков, но практически невозможно представить ситуацию, в которой наличие множества языков или диалектов станет основой политической мобилизации в Папуа Новой Гвинеи [72]. Для большинства политологов важны именно политически значимые расколы. Заметим, что есть такие государства, как, например, Руанда, в которой низкая степень лингвистической неоднородности, но страна этнически разделена.

Несмотря на все удобство квантификации дистанции с использованием генеалогического древа, подход не лишен недостатков и не в состоянии оценить все релевантные расколы или же, наоборот, преувеличить гетерогенность сообщества, т.е. он не характеризуется желаемой точностью.

### 3.2.2.3 Подход с лексико-статистическим анализом языков

Возможен иной подход к определению расстояния между этническими группами на основе их языковых различий. Это так называемый лексико-статистический анализ языков, методика которого была предложена в 1952 г. М. Свадешом, позволяющий установить дату первоначального расхождения генетически близких языков. «Мы располагаем достаточным количеством данных, на основании которых можно было бы утверждать, что устанавливаемое лексикостатистикой время расхождения языков в известной мере приближается к действительному» [43].

Согласно данному подходу, выделяется «основный словарный запас» – набор из 100 базовых понятий, содержащихся в любом языке из общепонятной, общеупотребительной лексике (мать, отец, один, два, названия некоторых частей тела и др.), составляется перечень всех простых языковых форм (морфем или слов) этих понятий в каждом из исследуемых языков (важно исключить понятия, уникальные для языка, например, культурно-географические зоны), после чего для каждого из анализируемых языков исследователь должен определить процент совпадающих элементов основного словаря для родственных языков. Можно также определить дату начала дифференцированного развития пар языков и, опираясь на него, сделать вывод о том, насколько близки те или иные сообщества. Такие лексико-статистические датировки находили подтверждение в прочих исследованиях сравнительно-исторического языкознания [22], однако они не свободны от критики. В частности, мы не знаем способа заранее исключить все особенности отдельных индивидуальных культур, и потому «каждая попытка перевести опытный список (основный словарный запас) на какой-либо определен-

ный язык, если задача выполняется тщательно и точно, неизбежно выявит некоторое количество оставшихся элементов, для которых не может быть найден единственный простой эквивалент» и более надежны результаты, полученные для родственных лингвистических группировок, без сложных предварительных реконструкций» [43].

Таким образом, этот метод является существенно более точным, но гораздо менее удобным, чем подход, основанный на лингвистическом древе. В 1992 г. лексико-статистический анализ был проведен для языков индоевропейской семьи [74], но для языков всех народов такие исследования отсутствуют. В связи с этим количественные оценки дистанций между языками, полученные лексико-статистическим методом, не получили широкого распространения.

### 3.2.2.4 Подход с генетическими расстояниями

Различия между сообществами могут быть рассчитаны на основании генетических расстояний: сходство между индивидами является следствием общего происхождения, общих генных семейств. Изучением взаимосвязей между группами организмов и их сравнением, в том числе, с помощью построения филогенетических (эволюционных) деревьев занимается филогенетика. Так, современное население стран мира может быть исследовано с точки зрения времени и пути миграций народов. Например, первой группой, отделившейся от остальных сообществ, были африканцы [107].

Любопытно, что «если сопоставить все разнообразие ДНК представителей самых разных рас и народов, то окажется, что люди отличаются гораздо меньше, чем шимпанзе в одном стаде» [16]. Основными типами ДНК-маркеров, использующихся для филогенетических исследований, являются митохондрии (мтДНК) и Y-хромосомы (Y-ДНК). Первые передаются по женской линии, вторые – по мужской. Таким образом, для двух индивидов можно установить сколько поколений отделяет их от общего предка, если знать скорость мутирования в ДНК-маркерах.

Однако в зонах смешения разных рас и этнических групп из-за смешения генофондов верно определить этническую принадлежность затруднительно, и такие исследования приобретают большую актуальность. Например, это касается групп, заселяющих Волго-Уральский регион, где столкнулись две расы – одна, пришедшая с Запада, вторая – с Востока.

В социальных науках генетические расстояния были использованы, например, в межстрановых исследованиях доходов, доверия, культурной фрагментированности и пр. [57].

### 3.2.2.5 Подход с опросными данными

Об измерении социального расстояния Р. Парк в 1924 г. писал так: «Тот факт, что мы можем легко различить степень близости, позволяет предположить, что мы сможем в конечном итоге измерять «расстояние», в том смысле, в каком это слово используется здесь, аналогично тому, как мы теперь измеряем интеллект, хотя мы и не знаем все факторы, которые определяют интеллект, но мы знаем все факторы, которые определяют близость» (цит. по [38], с.57).

В 1925 г. (с модификацией в 1933 г.) для оценки желания этнических или расовых групп или индивидов вступать в контакты была предложена шкала Богардуса (*Emory S. Bogardus*). Для оценки социальной дистанции респондент должен ответить на вопрос о том, в каком качестве он готов принять индивида из другой этнической группы (или расы) (цит. по [38], с.58):

- принять как близких родственников посредством брака (1);
- принять как друзей (2);
- принять как соседей, проживающих на моей улице (3);
- принять как коллег по работе, имеющих ту же профессию, что и я (4);
- принять как граждан моей страны (5);
- принять только как туристов в моей стране (6);
- предпочли бы не видеть их в своей стране (7).

Шкала Богардуса, таким образом, может быть определена как ранговая. Наибольшая социально-психологическая дистанция означает, что группа или индивид держится обособленно.

На украинских данных 1994–2005 гг. по общенациональным репрезентативным выборкам были проведены исследования с использованием шкалы Богардуса. Рассчитывался «индекс ксенофобии» – средняя величина социальной дистанции до всех этнических групп, включенных в исследования. Так, например, в 1994 г. индекс ксенофобии был равен 3.45, а в 2005 г. уже 4.24 [21]. «Строго говоря, методика Богардуса не позволяет говорить о каком-то подходе для измерения социального расстояния, так как сама процедура позволяет определить отношение (установку) одной национальности по отношению к другой, а не расстояние между ними» [38].

Для определения различий в отношении разных групп к той или иной проблеме можно использовать данные опросов [99]. Например, каждому респонденту задают вопрос о том, согласен ли он с некоторым утверждением, и предлагают ответы в шкале Лайкерта:

- «абсолютно согласен»;
- «согласен»;
- «затрудняюсь ответить»;
- «не согласен»;
- «абсолютно не согласен».

Ответ на вопрос служит объясняющей переменной в модели множественной регрессии, и в качестве одной из объясняющих переменных используется принадлежность к группе, наряду с контрольными переменными (другими переменными, влияющими на ответ, помимо тех, что непосредственно интересуют исследователя). Принадлежность к группе, например, этнической, можно представить в виде набора фиктивных переменных.

Тогда модель регрессии (множественного упорядоченного выбора) выглядит следующим образом:

$$y_k = f\left(\sum_{j=1}^J \delta_j q_{kj} + \beta' z_k + \varepsilon_k\right),$$

где  $y_k$  – ответ респондента  $k$ ,  $z_i$  – вектор контрольных переменных,  $q_{ij}$  – индикатор принадлежности респондента  $k$  к группе  $j$ . Всего  $J$  групп, т.е.  $j = 1, \dots, J$ . Если  $j = m$ , то  $q_{kj} = 1$ , в противном случае  $q_{kj} = 0$ .

Оценка коэффициента  $\delta_j$  показывает, насколько в среднем отличаются  $y_k$  для разных групп  $j$  (при прочих равных). Разница между оценками коэффициентов,  $\tau_{ij} = |\hat{\delta}_i - \hat{\delta}_j|$ , может быть использована как мера несходства между группами по интересующему исследователя вопросу. (Расчет такой матрицы расстояний является первым шагом в задаче кластеризации объектов). Если для разных  $P$  вопросов были оценены  $P$  уравнений регрессии, то разница между оценками  $\delta_{jp}$  для групп  $i$  и  $j$  вычисляется по формуле:

$$\tau_{ij} = \sqrt{\sum_{p=1}^P (\hat{\delta}_{ip} - \hat{\delta}_{jp})^2}.$$

На данных «Общего опроса по общественным вопросам» (*General Social Survey*) США по более чем 20 тыс. респондентам проводилось исследование с целью оценки расстояний между расовыми группами [99]. Автор использовал ответы респондентов на батарею вопросов различного характера: от окружающей среды и здравоохранения до налогообложения и внешней политики. В качестве одной из объясняющих переменных в моделях регрессии использовалась расовая принадлежность («белые», «афроамериканцы» и «другие») и контрольные переменные – возраст, число лет образования, доход (исходные переменные и возведенные в квадрат), пол, семейный статус, число детей и пр. Коэффициенты при данных фиктивных переменных были статистически значимыми, т.е. отношение к важным общественным вопросам среди индивидов одной расы более однородно.

Расстояние между «афроамериканцами» и «белыми», оцененное согласно описанной методике, составило 0.708 (стандартная ошибка – 0.013), между «белыми» и «другими» – 0.211 (0.020), а между «афроамериканцами» и «другими» – 0.588 (0.029). После чего был рассчитан индекс этнолингвисти-

ческой фрагментированности с использованием именно этих оценок расстояний, а также «обычный» ИЭФЛ без учета расстояний. Вывод автора заключался в том, что «обычный» ИЭФЛ переоценивает фрагментированность со-обществ.

### 3.2.3 Применение индексов этнической гетерогенности

В тех обществах, которые являются разнообразными по этническому со-ставу населения, высок потенциал нестабильности, приводящий к ксенофобии и конфликтам. Подобного рода социальная нестабильность может быть фактором снижения экономического роста [75], объемов и качества предос-тавления общественных благ [51], снижения участия в организациях граж-данского общества [52], роста коррупции [101] и пр.

Трагедия Африки – низкий экономический рост, приводящий к высоко-му бюджетному дефициту, недоразвитости рынков, в том числе валютных и финансовых, снижению уровня грамотности, плохой инфраструктуре, политической нестабильности, – описана в работе У. Истерли и Р. Левина [75]. Исследователи пытались показать, что разница в темпах экономического роста в странах Африки южнее Сахары обусловлена выбором политики фи-нансирования общественных благ, которая в свою очередь во многом зависит от степени этнической гетерогенности населения анализируемых экономик: «поляризация в обществе и острота социальных конфликтов ложатся в осно-ву политических решений». На эмпирических данных 1960–1980-е гг. авторы выявили, что многие характеристики экономики и качества институтов свя-заны с этнической неоднородностью. Но позже было замечено, что этническая фрагментированность отрицательно связана с экономическим ростом в автократиях и смешанных режимах; в демократиях такой связи с экономиче-ским ростом и производительностью нет [65]. И слабая связь между фраг-ментированностью и ростом была обнаружена на данных по 26 переходным

экономикам Центральной и Восточной Европы, Средней Азии и Монголии [61].

Можно также отметить связь этнолингвистической гетерогенности с международной торговлей, миграционными потоками и необходимостью обеспечения перевода с иностранных языков. В. Гинзбург и Ш. Вебер сообщают, что в Европейском Союзе перевод документов на 23 официальных языка обходится в 1 млрд. евро [91]. Сколько языков нам нужно? Ответ на поставленный вопрос мог бы иметь важное практическое значение для организации международной торговли, рынка труда и других сфер экономики. Большинство индексов основаны на доле населения страны, говорящем на каком-либо языке, тогда как с точки зрения экономики не менее важно, кто именно говорит, т.к. людям разных профессий в различной степени необходимо владение другим языком.

В исследовании влияния этнолингвистической гетерогенности на политику перераспределения в странах мира было предложено принимать уровень лингвистической неоднородности общества как показатель его культурного разнообразия [71]. Важной частью работы был анализ подходов к измерению расстояний между группами, позволивший показать, что эффект этнолингвистической гетерогенности на перераспределение экономически и статистически значим при учете лингвистической несходства. Невнимание к расстояниям между группами при расчете мер этнолингвистического разнообразия сообществ не позволяет выявить указанную связь.

В качестве меры этнолингвистической гетерогенности были использованы не только индексы фрагментированности – *ИЭФЛ* и *GI*, но и индексы поляризованности – *ER* и *RQ*, а также индекс второстепенной гетерогенности *RH*. Вывод был однозначен: степень общественной гетерогенности имеет значимую отрицательную связь с долей трансфертов и субсидий в ВВП, но только если при ее расчете учитываются расстояния между этническими группами, а сами меры высоко коррелированы и дают сходные результаты в смысле упорядочения стран по степени гетерогенности.

Была исследована и связь этнолингвистических расколов с несколькими экономическими характеристиками – экономическим ростом, долей трансфертов и субсидий в ВВП, качеством предоставления общественных благ, – а также с началом гражданских войн.

Например, в одной из классических работ по проблеме связи качества предоставления общественных благ с уровнем этнической гетерогенности, был получен вывод о том, что этническая гетерогенность, измеряемая как фрагментированность, отрицательно влияет на экономику страны, потому что различные этнические группы имеют разные предпочтения относительно типов общественных благ. В результате снижается уровень грамотности и увеличивается уровень младенческой смертности [51].

Позже были получены свидетельства в пользу того, что наличие глубоких этнолингвистических расколов (например, когда группы населения говорят на языках разных ветвей одной семьи или даже разных семей) оказывает значимое влияние на характер политики перераспределения и связано с началом гражданских конфликтов [69]. Для обеспечения экономического роста и высокого качества предоставления общественных благ (определенного через уровень грамотности населения) значимо даже наличие менее серьезных расколов, например, разных языков, на которых разговаривают индивиды. Это объясняется тем, что, например, для обеспечения экономического роста группы в обществе должны координированно взаимодействовать, и важно, чтобы индивиды хорошо понимали друг друга, т.е. говорили на одном языке. В то же время в ситуациях гражданских конфликтов или принятия решений относительно политики перераспределения более важно наличие глубоких конфликтов, выраженных в лингвистических расколах, которые будут обуславливать различные предпочтения групп – в случае победы в конфликте, дискриминируя других, можно увеличить собственные выгоды. Так, на эмпирических данных было показано, что чем выше этнолингвистическая фрагментированность (ИЭФЛ), тем выше уровень младенческой смертности и ниже уровень грамотности. Связи ИЭФЛ с качеством ин-

фраструктуры, как и в работе А. Алезины и др. 1999 г. [51], обнаружено не было.

А. Алезина и Е. Журавская исследовали вопрос о том, связана ли сегрегация на субнациональном уровне с качеством государственного управления [54]. С использованием данных переписей населения, ими были рассчитаны индексы сегрегации в разрезе регионов по трем признакам: этническому (для 97 стран), лингвистическому (92 страны) и религиозному (75 стран). Для измерения качества государственного управления были использованы индикаторы одноименного проекта Всемирного Банка [124]. С помощью методов эконометрики на имеющихся данных была обнаружена статистически значимая отрицательная связь между качеством государственного управления и уровнем этнической и лингвистической сегрегации (с учетом степени фрагментированности стран на национальном уровне). Этот эффект сильнее выражен в демократических государствах. Авторы объясняют это тем, что в государствах с высоким уровнем сегрегации в среднем ниже общий уровень доверия среди граждан и, наоборот, выше вероятность появления партий, образованных для защиты интересов одних этнических групп, в ущерб другим, что негативно сказывается на качестве реализации государственной политики.

Было замечено, что использование данных проекта «Этнология» в качестве показателя культурой дистанции между этническими группами, несмотря на очевидные плюсы – возможность однозначной строгой классификации, доступность таких данных – является далеко не совершенной мерой того, что исследователь желал бы оценить на самом деле. С одной стороны, удачным мог бы стать филогенетический подход, позволяющий судить о близости народов, исходя из информации в ДНК. В виду ограниченности данных о генетической близости народов мира, их использование затруднено, но сходную логику можно применить к языковым расколам. В основе систематики языков лежит генетическая классификация языков; чем более грубым является деление (на уровне семьи, зоны или ветви), тем более давние различия он отражает, тогда как наречия и диалекты скорее характеризуют недавние, менее

фундаментальные различия между народами или этническими группами. Поэтому, используя разную степень дробности деления на группы (по лингвистическому признаку), можно сделать заключение о том, как измеренная на разных «срезах» лингвистического древа фрагментированность может быть важной для тех или иных экономических характеристик. Например, охват населения школьным образованием отрицательно связан с фрагментированностью, и чем более дробное деление использовать, тем заметнее этот эффект [70].

Причиной культурной гетерогенности в исследовании К. Ашрафа и О. Галора предполагается генетическое разнообразие (*genetic diversity*) [57]. В базе “Human Genome Diversity Cell Line Panel” в рамках проекта Human Genome Diversity Project (HGDP) и Centre d’Étude du Polymorphisme Humain (СЕРН) эта характеристика была рассчитана для 53 этнических групп. На этих данных было показано, что между генетическим разнообразием и численностью этнических групп, фрагментированностью и поляризованностью есть значимая положительная связь, сохраняющаяся при учете географических и исторических факторов. Для расчетов авторы использовали два массива: первый только по странам Старого мира до 1500 г., чтобы не вносить «шум», вызванный значительными миграционными потоками в XVI в., второй – полный на данных по 143 государствам, привлекающий расстояние от места поселения этнической группы до Восточной Африки (г. Аддис-Абеба, Эфиопия) как экзогенный источник генетического разнообразия в странах.

В современной литературе отмечается, что богатство природными ресурсами может оказывать влияние на имущественное неравенство в зависимости от степени этнической поляризации населения: природные ресурсы способствуют увеличению имущественного неравенства в этнически поляризованных обществах, но снижают его в неполяризованных. В странах с высокой степенью поляризованности населения наличие природных ресурсов приводит к погоне за рентой и конфликтам. Каждая группа может переключить свои усилия с сектора производства на ресурсный, а также вовлечь дру-

гую группу в противостояние, в котором выиграет и завладеет ресурсами только одна из этих групп. В обществах, состоящих из множества этнических групп с небольшим удельным весом каждой, ни одна из этих групп не обладает достаточными возможностями для того, чтобы присвоить себе полностью ресурсную ренту. Таким образом, получается, что рента распределена между различными этническими группами более-менее равномерно и наличие природных ресурсов не оказывает никакого эффекта на уровень имущественного неравенства [88].

Эмпирическая проверка гипотезы на данных по 79 странам позволила подтвердить сформулированное предположение о том, что в таких этнически поляризованных странах, как Боливия и Мексика, обладание природными ресурсами связано с высокой степенью имущественного неравенства. В Норвегии, в свою очередь, неравенство невелико, чему, вероятно, способствовала этническая гомогенность населения страны [88]. Однако данное объяснение имущественного неравенства, безусловно, не может считаться исчерпывающим.

Гипотеза о том, что сильная социальная гетерогенность (религиозная, этническая) может быть фактором, затрудняющим демократизацию государств, проверялась на эмпирических данных о 71 стране в период с 1992 г. по 2006 г. [49] Демократизация измерялась как изменение состояния политических прав и гражданских свобод в стране (по версии Freedom House) за период с 1992 г. по 2006 г. В числе прочих предикторов демократизации, таких как достигнутый уровень демократии, рост образованности населения, численности городского населения, ВВП, расходов на оборону, открытости, в регрессионную модель были поочередно включены индексы религиозной фрагментированности (рассчитанной по аналогии с ИЭЛФ) и религиозной поляризации RQ [105], этнической фрагментированности и этнической поляризации [83], а также общей социальной фрагментированности как результата агрегирования мер религиозной, лингвистической и этнической фрагментированности [108]. Основным результатом оценивания разных спе-

цификаций регрессионной модели, который получил автор, стало то, что демократизация в значительной степени связана с религиозной, а не этнической фрагментированностью и поляризованностью.

Х. Монтальво и М. Рэйнал-Кэрол пытались выяснить, оказывает ли религиозная гетерогенность населения влияние на экономическое развитие [105]. Предполагалось, что религиозная поляризованность может быть релевантным объясняющим фактором долгосрочного экономического роста, оказывая воздействие на объем инвестиций и государственные расходы. Для проверки гипотезы оценивалась расширенная модель Солоу, и на данных по 98 странам мира в период с 1960 по 1992 г. было показано, что именно религиозная поляризованность отрицательно связана с как ростом экономики, так и со среднедушевым доходом, наряду с трудом ( $L$ ), физическим и человеческим капиталом на единицу эффективного труда ( $K/AL$  и  $H/AL$ , соответственно).

А. Алезиной и др. была сформулирована гипотеза о том, что более пагубным для экономического развития страны является степень имущественного неравенства между этническими группами, а не собственно степень этнолингвистической фрагментированности общества [53]. Именно неравенство по линии этнической принадлежности препятствует развитию институтов, способствует росту враждебности, конфликту, «захвату государства» частными интересами (*state capture*). Для измерения экономического неравенства между этническими группами исследователями были использованы данные о яркости ночного освещения (на душу населения) на частях территории, заселенных той или иной этнической группой. Потом на этих данных были рассчитаны значения коэффициента Джини [53]. Оказалось, что рассчитанное таким образом экономическое неравенство слабо коррелировано со стандартными мерами имущественного неравенства, этнической фрагментированности, поляризованности и сегрегации [54], но имеет сильную обратную связь показателем экономического развития страны – ВВП/чел. (по ППС в ценах 2000 г.).

Разные средние доходы этнических групп связаны с дискриминирующей политикой групп по отношению друг к другу, т.е. этническое разнообразие может привести к снижению качества предоставления общественных благ – такой вывод был получен на микроданных по опросам 20 000 респондентов «Афробарометра». «Воздействие неравенства на этнические конфликты зависит от социально-экономического состава этнических групп. Если одна группа состоит преимущественно из «капиталистов», а другая из рабочих, то с ростом неравенства конфликт будет усиливаться» [112]. С использованием базы данных о гражданских войнах (*Correlates of War Project: International and Civil War Data*) за 1962–1990 гг., в работе П. Коллиера и А. Хёффлера были выделены 4 фактора, обусловливающих вероятность начала конфликта [67]. К ним были отнесены среднедушевой доход, доходы от экспорта сырья (связанные с вероятностью конфликта нелинейным образом), этнолингвистическая фрагментированность (связана также нелинейным образом: очень высокая степень фрагментированности осложняет координацию действий).

С одной стороны, удобно представлять этнические группы как «минимальные выигрывающие коалиции, достаточно большие для того, чтобы обеспечить выгоды в конкуренции, но достаточно маленькие, чтобы максимизировать эти выгоды в выражении на душу населения» [84], объясняя тем самым возникновение расколов по этническому признаку. С другой стороны, ряд исследований опровергал наличие значимой связи между этнической фрагментированностью и возникновением гражданских войн и их длительностью (см. [66, 72, 73]).

Большинство конфликтов в 1945–1999 гг. происходило в условиях *слабого правительства*, неспособного обеспечить контроль над военными, доступом к оружию, над управлением добывающими секторами экономики (особенно экспорту сырья) и сельской местностью, а также при большой плотности населения [85]. Именно условия «возможности» беспорядков, а не особенности политических институтов или культурная гетерогенность сообществ коррелируют с началом гражданских конфликтов. При учете средне-

душевого дохода, являющего индикатором силы правительства, значимые этнические конфликты не оказываются более частными или более вероятными в странах с высоким этическим разнообразием или с влиятельным этническим большинством. Конфликты чаще всего имели место в больших, бедных, недавно получивших свободу странах с большими запасами нефти (цит. по [84]).

В работе Х. Монтельво и М. Рейнал-Керол, посвященной гражданским конфликтам, утверждается, что для их предсказания важен учет этнического фактора. Было показано, что для моделирования возникновения гражданских конфликтов индекс поляризованности  $RQ$  является более релевантным предиктором, чем  $ИЭФЛ$ , более того, прогностическая сила индекса  $RQ$  тем сильнее, чем сильнее конфликт. Наряду с этим, были даны объяснения того, почему многочисленные исследования указывали на отсутствие связи между этническим составом общества и его подверженностью масштабным гражданским конфликтам. Во-первых, это было связано с тем, что большинство исследований использовали индекс этнолингвистической фрагментированности, который не способен учесть степень антагонизма групп в обществе. Во-вторых, при составлении Атласа были допущены искажения, которые могут препятствовать выявлению конфликтов между некоторыми народами [110]. Было также показано, что имеет место непрямое влияние этнической неоднородности на экономику: гражданские войны ведут к снижению инвестиций, и, соответственно, замедлению экономического роста.

В логике модели, предложенной в Дж. Эстебаном и Д. Рэем, выигрыш в конфликте можно разделить на частные блага (их доля составляет  $1-\lambda$ ), например, владение нефтяными месторождениями, и общественные ( $\lambda$ ), например, политическая власть [79]. Из-за желания обладать ими группы развязывают конфликт. Предполагается, что чем больше ресурсов привлечет группа, тем больше для нее вероятность победы в конфликте, и каждый индивид при этом затрачивает ресурсы на ведение конфликта, а «средняя стоимость конфликта»,  $\sigma$ , является индикатором его интенсивности.

При определенных условиях интенсивность конфликта может быть представлена в виде комбинации трех мер неравенства – индекса Джини ( $G$ ), ИЭЛФ ( $F$ ) и индекса поляризованности  $ER$  ( $P$ ) [79]:

$$\sigma \approx \alpha [\lambda P + (1 - \lambda)F] + \lambda(1 - \alpha) \frac{G}{N} + \frac{(1 - \lambda)(1 - \alpha)(m - 1)}{N},$$

где индекс Джини:

$$G = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_i n_j d_{ij},$$

индекс фрагментированности:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i}^m n_i n_j = \sum_{j \neq 1}^m n_j (1 - n_j),$$

индекс поляризованности:

$$P = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_i^2 n_j d_{ij}.$$

Важно то, что вес каждого индекса в уравнении зависит от характера конфликта. Так, если доля частных благ на кону очень высока, то для силы конфликта будет важна степень фрагментированности общества ( $F$ ), а если высока доля нематериального приза, например, уже упомянутой политической власти, то интенсивность конфликта во многом будет определяться степенью поляризации ( $P$ ). Другим важным фактором силы конфликта, но только при малой внутренней сплоченности групп ( $\alpha$ ), является уровень имущественного неравенства (индекс Джини).

Для эмпирической проверки своей теории авторы привлекали данные по 138 государствам мира за период 1960–2008 гг. (временные периоды – по 5 лет). Общее число анализируемых наблюдений равно 1125. В качестве зависимой переменной – интенсивности конфликта – были использованы данные базы UCDP/PRIО по числу смертей от конфликтов в год, в частности, бинар-

ная переменная PRIO25: 1 – конфликт есть (случилось 25 и более смертей от конфликтов в год), 0 – в противном случае.

Результатом эконометрического моделирования (построения моделей бинарного и множественного выбора) стало то, что этническая поляризация и фрагментированность значимо и положительно связаны с возникновением и интенсивностью конфликта. Степень имущественного неравенства также статистически значимо связана с интенсивностью конфликта, но эта связь отрицательная и значима только при малой численности населения  $N$ .

Более того, было показано, что важен относительный вес материальных и нематериальных благ в совокупном «призе» – коэффициент публичности  $\lambda$ . Его предлагается рассчитывать по следующей формуле:

$$\lambda = \text{pub}/(\text{pub} + \text{oilresv/gdppc}),$$

где  $\text{pub}$  – степень неподотчетности власти, которая представляет собой среднее арифметическое переменных  $\text{excons}$ ,  $\text{autocr}$ ,  $\text{polrights}$ ,  $\text{civlib}$  – индикаторов силы ограничений на органы исполнительной власти, автократии (Polity IV), соблюдения политических прав и гражданских свобод (Freedom House), соответственно;  $\text{oilresv/gdppc}$  – доля натуральных ресурсов в ВВП на душу населения на начало периода.

В качестве альтернативного предиктора политического насилия и гражданских конфликтов был предложен индекс  $N^*$  этнонациональной исключенности (*ethnonationalist exclusiveness*) [62]. ИЭЛФ и индексы поляризованности не учитывают различную близость этнических групп к государственной власти, тогда как фактором гражданских войн является не различная этническая принадлежность граждан сама о себе, а наличие расколов по этническому признаку, мобилизованных политиками [122].

Для возникновения этнического конфликта важно (а) наличие государственных институтов, за власть над которыми ведется борьба, и (б) чтобы мобилизация происходила на уровне групп, а не отдельных индивидов. Если от принятия решений и управление страной «отстранено» этническое больш-

шинство, то вероятность насильственных действий велика. Иначе говоря, при наличии в стране двух этнических групп разной численности, вероятность конфликта больше, если правительством руководит группа, численность которой меньше. В индексе  $N^*$  значимыми считаются только взаимодействия основной (правящей) группы с второстепенными (*peripheral*), а также формулируется ограничение, состоящее в том, что последние второстепенные группы не развязывают между собой гражданских конфликтов.

Индекс  $N^*$  задается как функция этнической структуры населения страны и вероятности конфликта между правящей и отстраненной от власти группами. Чем меньше удельный вес правящей группы, тем выше значение индекса.  $N^*$  можно представить в следующем виде:

$$N^*(r, k) = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\{r(i)/r\}^{-k}}{1 + \{r(i)/r\}^{-k}},$$

где  $r(i) = s_i/(s_i + s_0)$  – удельный вес группы  $i$  в сообществе, образованном группой  $i$  и основной группы  $(s_i + s_0)$ ,  $r$  – параметр, задающий порог, по преодолении которого шанс соперника на вступление в конфликт 1:1.

Пример сравнения *ИЭФЛ* и  $N^*(0.5, 5)$  показан в Таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Пример структуры групп в обществе и величины индекса  $N^*$ . В структуре групп первая величина соответствует удельному весу правящей группы

Структура групп	ИЭЛФ	$N^*(0.5, 5)$
{0.5, 0.5}	0.5	0.5
{0.7, 0.3}	0.42	0.072
{0.3, 0.7}	0.42	0.843
{0.3, 0.3, 0.2, 0.2}	0.74	0.716
{0.2, 0.3, 0.3, 0.2}	0.74	0.959
{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2}	0.78	0.937

Расчет значений индекса  $N^*$  с параметрами  $r = 0.5$  и  $k = 5$  показал, что связь с *ИЭЛФ* невысока – коэффициент корреляция был равен 0.42. На данных по 88 странам Европы, Азии и Северной Африки авторы проверили гипотезу о том, что именно отсутствие доступа к политической власти является фактором, провоцирующим конфликты между этническими группами. С по-

мощью регрессионного анализа было получено подтверждение тому, что именно индекс  $N^*$ , а не *ИЭФЛ*, оказывается лучшим предиктором для моделирования возникновения гражданских конфликтов.

В работе, посвященной борьбе этнических группировок как фактору возникновения гражданских конфликтов, использовалась база «Властные отношения и этнические группы» (*Ethnic Power Relations – EPR*) о релевантных этнических группах и доступе к политической власти в государстве, и полученный вывод заключался в том, что этнические группы с большей вероятностью будут участвовать в вооруженном конфликте против правительства, если они были потеряли доступ к власти, и особенно, если это произошло в недавнем прошлом [63].

Полученные результаты были подтверждены при оценивании новой спецификации модели, включающей «пространственные переменные»: близость места поселения этнической группы к столице и близость к границе государства [125]. Было также обнаружено, что в конфликтах по поводу территории более склонны участвовать группы, расположенные ближе к границам, дальше от столиц государств, но с вероятностью участвовать в конфликтах за государственную власть пространственные переменные статистически значимо не связаны.

### 3.2.4 Отечественные исследования этничности

Большинство советских ученых придерживалось определения этноса, исходя из посылок примордиализма, т.е. этническая принадлежность предполагалась объективно существующей и объединяющей членов одного этноса в особую «совокупность»: «Этнос (этническая общность) – это особый исторически возникший тип социальной группы, особая форма коллективного существования людей. Такая общность складывается и развивается как бы естественно-историческим путем; она не зависит непосредственно от воли от-

дельных входящих в нее людей и способна к устойчивому многовековому существованию за счет самовоспроизведения» [11].

В современных российских исследованиях этнической идентичности авторов в значительной степени интересуют теоретические вопросы: сравнение подходов к изучению этничности, определения понятий, соотношение государственной и этнической идентичности, нациестроительство в условиях полигэтнического населения, процессы этнополитической мобилизации, формирование гражданского самосознания [14,23,24,30,40].

Эмпирические исследования в основной массе посвящены социально-психологической реальности на территории России и бывших республик СССР: распространенность и динамика этнических и гражданских идентификаций, взаимодействие между этническими, религиозными и гражданскими идентичностями в сознании людей, анализ контента средств массовой коммуникации, в т.ч. в социальных сетях, технологии производства и утверждения национальной и этнорегиональной идентичности [23], особенности адаптации массового сознания к глобализационным процессам, установки и ориентации граждан, в том числе патриотические [41], предубеждения и ксенофобия [31], дискриминация по этническому признаку в государственно-политической и социально-экономической сфере [14,15]. Ряд авторов формулирует практические рекомендации по совершенствованию государственной этнической политики России, разрабатывают сценарии развития этнополитических конфликтов, и большинство авторов согласны с тем, что «необходимо тройное равновесие между гражданским обществом, этнической идентичностью и государством» [41].

Значительное количество работ посвящено анализу национализма, этнической идентичности и этнополитики, территориальным, межэтническим и религиозным конфликтам [17, 29, 30]. Одним из последствий кровопролитных конфликтов становятся процессы массовой миграции, поэтому адаптация вынужденных переселенцев также требует особого изучения. В основном содержание исследований по этнополитическим конфликтам посвящено

качественному анализу их причин, специфики, политической подоплеке, истории, а также сравнению и типологизации по разным основаниям. Признается, что этноконфликтологические исследования должны опираться «на математическое моделирование и современные средства обработки информации» [1]. Так, для анализа основных конфликтных процессов в регионах на Юге России в 1990-е и 2000-е гг., с помощью экспертов были выделены и оценены по степени значимости конфликтогенные факторы [2]. Например, в 2000–2006 гг. к ним были отнесены:

- особенности российской экономики начала XXI в.;
- политика центральных органов власти в 2000-е гг.;
- национально-территориальное устройство Юга России;
- социально-экономические диспропорции территориальные процессы в северокавказском регионе;
- неконтролируемые миграционные процессы в северокавказском регионе;
- политика региональных органов власти в 2000-е гг.;
- националистическая деятельность этнополитических элит региона;
- политика США на Кавказе;
- актуализация этнического самосознания и рост негативных этнических стереотипов людей;
- деструктивное воздействие СМИ на сознание населения» [2].

Источниками данных являются проекты «Российская идентичность в Центре и регионах», «Будущее России», «Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения» (РМЭЗ), Института социологии и Института этнологии и антропологии РАН, опросы автономной исследовательской организации «Левада-Центр», фондов ФОМ и ВЦИОМ, а также «Европейского социального исследования» (ESS). При этом анализируются как данные опросов населения, так и глубинные интервью с экспертами.

В ИЭА РАН уже более 10 лет проводятся этнологические мониторинги по 12 постсоветским республикам и 40 регионам России на ежеквартальной

основе. Они включают в себя данные об уровне общественно-политической напряженности, а также разработку рейтинга конфликтности регионов [40].

Тем не менее, использование отечественными исследователями количественных методов для оценки этнической напряженности, прогнозирования конфликтов представляется недостаточным.

В данной работе рассматриваются различные меры этнической гетерогенности, характеризующие фрагментированность и поляризованность в обществах. Вводятся формальные определения семи индексов фрагментированности и поляризованности и обсуждаются различные подходы к измерению «культурной дистанции» между этническими группами. Приводится также обзор применения индексов в исследованиях по взаимосвязи этнической гетерогенности с ксенофобией, гражданскими конфликтами, благосостоянием населения, качеством государственного управления и предоставления общественных благ.

### 3.2.5 Некоторые выводы

В данном подразделе отчета приведены результаты исследования моделей этнополитической напряженности. Результаты исследования носят обзорно-реферативный характер. Основным предметом исследования было понятие этнической гетерогенности общества как фактора возникновения гражданских конфликтов, благосостояния населения и качества государственного управления.

Проанализированы основные индексы этнической гетерогенности, такие как: индекс этнолингвистической фрагментированности, индекс Гринберга, индекс второстепенной гетерогенности, индекс поляризованности Эстебана–Рэя, индекс поляризованности Рейнал–Кэрол, индекс поляризованности Вольфсона, индекс поляризованности Алекскерова–Голубенко. Дан обзор основных способов нахождения важнейшего параметра этих индексов – расстояния между этническими группами. Рассмотрено применение индексов

этнической гетерогенности в различных задачах социально-экономического и политического анализа.

Результаты исследований этого подраздела нашли отражение в работе [20]:

Камалова Р.У. Этническая гетерогенность: основные понятия и проблемы измерения// Полития: Анализ. Хроника. Прогноз, 4, 2013, с.127–149.

### 3.3 Распределение влияния между фракциями и группами в Верховной Раде Украины (1990 – 2012 гг.)

В данном подразделе приведены результаты исследования изменений в распределение влияния между фракциями и группами в Верховной Раде Украины в период 1990–2012 гг.

В законодательных органах депутаты при принятии решений, как правило, объединяются во фракции (чаще всего на основании партийной принадлежности). Структуризация парламента позволяет сделать его работу более организованной и эффективной, ускорить и облегчить процесс принятия решений. Тот факт, что фракции, образованные из депутатов, избранных на общегосударственных выборах, являются главными акторами в парламентах, делает представительную демократию принципиально возможной.

Решение в законодательных органах, тем не менее, принимается только в том случае, когда количество голосов в его пользу превысит некоторую заранее установленную квоту. Когда в парламенте представлены три и более фракции, возможна ситуация, при которой ни одна из них не обладает достаточным количеством голосов, чтобы преодолеть квоту. В таких случаях фракции вынуждены объединяться друг с другом – образовывать коалиции. Из-за потребности фракций в образовании коалиций последние стали частым явлением в политической жизни демократических государств, и академическая политология значительное внимание уделяет вопросам, связанным с механизмами образования коалиций и закономерностям их существования. В частности, этой тематике посвящены работы [55,77,114]

Наблюдение за работой различных законодательных органов делает очевидным то, что фракции в парламентах имеют различное влияние в процессе принятия законов. Принятие тех или иных решений в законодательном органе демократического государства колossalным образом сказывается как сугубо на политическом процессе, так и на жизни граждан этого государства в целом. Определение того, в какой мере та или иная фракция влияет на принятие решений, позволит спрогнозировать характер принятых решений, и – как следствие – наиболее вероятные политические, экономические, социальные и другие процессы в государстве и на международном уровне. Знание о распределении влияния между фракциями в парламенте позволит сделать определенные выводы о характере политической системе в целом. Составление общей картины распределения влияния в парламенте позволит вычислять наиболее вероятные стратегии фракций, что, например, чрезвычайно важно в предвыборный период. Таким образом, изучение распределения влияния фракций в парламентах является актуальным не только с точки зрения академической, но и с точки зрения прикладной политологии. Избрание Верховной Рады Украины в качестве объекта исследования связано с особенностями современной политической истории Украины. Активная деятельность украинского парламента в течение последних двадцати лет, его изменяющееся положение как ветви власти, смена политических элит, поляризация украинского общества делают политическую жизнь Украины насыщенной, а украинский парламент – привлекательным для изучения.

Вопрос измерения влияния акторов в законодательных органах является одним из важнейших и изучается на протяжении длительного времени (см., например, [10, 56, 68, 77, 98]). На первый взгляд, влияние фракции в парламенте напрямую зависит от того, какую долю мест она занимает. Однако, как будет показано в данной работе, это мнение является заблуждением: влиятельность фракции не всегда зависит от количества ее мест в парламенте. Для измерения влияния игроков в органах принятия коллективного решения были разработаны специальные индексы (напр., индексы Шепли–Шубика, Диге-

на–Пакела, см. [4]). В работе, результаты которой отражены в данном подразделе отчета, влияние фракций в Верховной Раде Украины было измерено с помощью индекса Банцафа, а также порядкового  $\alpha$ -индекса.

Рассмотрим понятие индекса влияния Банцафа [58]. Коалиция называется выигрывающей, если количество голосов в ней достаточно для преодоления заданной квоты. Если после исключения некоторой фракции коалиция перестает быть выигрывающей, то такая фракция называется ключевой. Фракция является тем влиятельнее, чем в большем количестве выигрывающих коалиций она является ключевой. Именно на основании такой логики и построен индекс влияния Банцафа. Индекс Банцафа  $\beta(i)$  для фракции  $i$  вычисляется как следующее отношение:

$$\beta(i) = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^k b_j},$$

где  $b_i$  – число коалиций, в которых данная фракция  $i$  является ключевой,  $k$  – количество всех фракций в парламенте.

Предполагается, что фракции и группы не имеют предпочтений в создании коалиций, т.е. все коалиции рассматриваются как равновероятные, а депутаты одной фракции или депутатской группы голосуют единогласно. Индексы рассчитаны для простого большинства. Расчеты для конституционного большинства см. [28].

Однако предположение о том, что все коалиции равновероятны, часто не соответствует действительности, и индекс Банцафа не отражает реальное распределение влияния в выборных органах. В [55] были предложены  $\alpha$ -индексы – обобщения индекса Банцафа, которые позволяют учесть разного рода предпочтения фракций в образовании коалиций. Построение одного из  $\alpha$ -индексов – порядкового (ординального)  $\alpha$ -индекса – основывается на том, что предпочтения фракций в образовании коалиций рассматриваются как отношения порядка. Следует отметить, что  $\alpha$ -индексы учитывают (если это необходимо) несимметричность предпочтений фракций, т.е. ситуацию, при ко-

торой одна из фракций стремится к объединению в большей степени, чем другая. В данной работе оценка распределения влияния фракций и групп в Верховной Раде Украины с учетом их предпочтений в образовании коалиций проведена с помощью порядкового а-индекса. Список используемых сокращений этого подраздела приведен в Приложении Г.

### 3.3.1 Краткая история современного парламентаризма в Украине

Принято считать, что история современного украинского парламентаризма берет начало с создания в марте 1917 г. Украинской Центральной Рады (УЦР), которая начала свою деятельность как координационный центр украинского национально-освободительного движения, развернувшегося в период Гражданской войны (1917 – 1921 гг.), а впоследствии стала парламентом независимого украинского государства – Украинской Народной Республики. В апреле 1918 г. УЦР прекратила свое существование в результате переворота гетмана П.П. Скоропадского. Центральная Рада просуществовала только 13 месяцев, однако стала важным прецедентом многопартийного парламентаризма в Украине (подробнее см. [12]).

Советские законодательно-представительские органы существовали на территории Украины параллельно с Центральной Радой еще во время Гражданской войны. С тех пор в законодательной власти УССР происходили изменения, которые вплоть до 1990 г., однако, не отражались на главном принципе ее устройства, состоявшем в отказе от парламентаризма и многопартийности. Верховный Совет УССР, с 1937 г. выполнявший роль верховного органа государственной власти в УССР, по сути, не был избиаемым органом (процедура избрания депутата заключалась лишь в утверждении единственного кандидата в бюллетене). Верховная Рада Украины (ВРУ), избранная в 1990 г., была прямой преемницей Верховного Совета УССР и сохранила многие особенности его структуры и порядка формирования. Однако, в отличие от Верховного Совета, ВРУ была устроена в традициях западного парла-

ментаризма, что, в частности, предполагает наличие многопартийности и альтернативных выборов (подробнее см. [47]).

### 3.3.2 Верховная Рада Украины 1-го созыва (1990 – 1994 гг.)

#### 3.3.2.1 История и структура [18,47]

В результате первых в истории УССР альтернативных выборов, проходивших по мажоритарной системе простого большинства, была избран Верховный Совет УССР 12-го созыва (позднее переименованный в Верховную Раду Украины 1-го созыва). Он состоял из 450 народных депутатов, которые были либо представителями Коммунистической партии, либо беспартийными. Депутаты имели право объединяться в депутатские группы по территориальному или другому (главным образом, идеологическому) принципу. Распространенной практикой среди депутатов было членство в двух депутатских группах, образованных по нетерриториальному принципу. Эта проблема двойного членства так и не была решена до конца созыва.

В процессе работы Верховной Рады депутатские группы создавались, объединялись, дробились, меняли названия, распускались. Более того, еще на начальном этапе работы Верховной Рады наметилась ее поляризация, проходившая по линии «левые – нелевые политические силы» и выразившаяся в формировании своеобразного неформального парламентского большинства и оппозиции. Депутатские группы из национал-демократического блока объединились в оппозицию, известную под названием «Народная Рада». В противовес ей была создана наибольшая по численности прокоммунистическая депутатская группа «За суверенную Советскую Украину», известная как «группа 239».

24 августа 1991 г. депутаты Верховного Совета УССР единогласно проголосовали за «Акт провозглашения независимости Украины». Таким образом, УССР прекратила свое существование, но Верховный Совет УССР 12-го созыва продолжал свою работу – в новых условиях и в новом качестве. Фак-

тически он стал высшим законодательным органом суверенной Украины. Началось становление нового законодательного института в Украине.

### 3.3.2.2 Оценка влияния депутатских групп в Верховной Раде Украины 1-го созыва

Для Верховной Рады Украины 1-го созыва индексы влияния рассчитаны по имеющимся данным о численном составе на конец созыва 12 зарегистрированных нетерриториальных групп.

Оценка распределения влияния между депутатскими группами в ВРУ 1-го созыва была осложнена проблемой двойного участия. 88 депутатов, состоявшие в двух группах одновременно, были подсчитаны дважды. Таким образом, необходимо было из численного состава каждой группы вычесть такое число депутатов, чтобы полученное распределение голосов между депутатскими группами максимально соответствовало ситуации реального голосования. Задача осложнялась тем, что имелись лишь частичные данные о членстве депутатов в группах, т.е. однозначно определить, какое число депутатов надо вычесть из состава каждой группы, было нельзя. Нами было предложено три подхода к решению этой проблемы. В каждом из подходов делалось предположение о распределении «лишних» голосов: в первом предполагалось их равномерное распределение, во втором – пропорциональное, в третьем – случайное. Подробнее о решении проблемы вычисления индекса Банцафа в ситуации двойного участия см. [28].

После удаления «лишних» голосов из состава депутатских групп стало возможным рассчитать индекс Банцафа. В Таблице 3.2 приведены значения индекса Банцафа, полученных после использования трех различных методов удаления «лишних» голосов. Как видно, они совпадают с точностью до сотых у 4 групп, отличаются не более чем на 0,02 у 7 групп и только у группы «Народная Рада» они различны чуть менее чем на 0,04. Разные подходы к

вычитанию «лишних» голосов позволяют сделать в целом одинаковые выводы о распределении влияния в ВРУ в конце 1-го созыва.

Таблица 3.2 – Оценка влияния (индекс Банцафа) депутатских групп в ВРУ 1-го созыва при разных предположениях о распределении «лишних» голосов

Название группы	Равномерное распределение «лишних» голосов	Пропорциональное распределение «лишних» голосов	Случайное распределение «лишних» голосов
1. Группа аграриев	0,157	0,133	0,153
2. Группа работников промышленности	0,033	0,045	0,033
3. «Демократическое возрождение Украины»	0,031	0,043	0,033
4. «Согласие–Центр»	0,037	0,050	0,035
5. «Земля и воля»	0,060	0,065	0,059
6. Группа беспартийных	0,037	0,050	0,033
7. Конгресс национально-демократических сил	0,070	0,072	0,081
8. Народный Рух	0,093	0,089	0,090
9. «Нова Украина»	0,063	0,067	0,066
10. «Рада»	0,054	0,059	0,052
11. «Народная Рада»	0,205	0,165	0,203
12. «За социальную справедливость»	0,072	0,076	0,077
13. Не входили в депутатские группы	0,088	0,086	0,087

К концу 1-го созыва наиболее влиятельной в логике индекса Банцафа (и наиболее многочисленной) была депутатская группа «Народная Рада» – основа оппозиционного блока демократических сил в Верховной Раде. Группа аграриев, следующая по численности и влиятельности, состояла в основном из представителей «группы 239» – сторонников развития суверенной Украины в советском направлении. Наибольшее же количество групп в ВРУ 1-го созыва имели низкое значение индекса Банцафа (от 0,052 до 0,093). Значения даже самых влиятельных групп (наибольшее из которых – 0,205) невысокие. В конце 1-го созыва в ВРУ влияние не было сосредоточено в отдельной депутатской группе. Даже наиболее влиятельные группы, «Народная Рада» и группа аграриев, не оказывали решающего влияния при принятии решений.

### 3.3.3 Верховная Рада Украины 2-го созыва (1994 – 1998)

#### 3.3.3.1 История и структура [8,19,47]

ВРУ 2-го созыва – первая Верховная Рада, избранная после провозглашения независимости Украины. Выборы 1994 г. проводились по новому избирательному закону [33] и проходили в условиях многопартийной борьбы. В них принимали участие кандидаты от 28 политических партий, однако половина кандидатов были беспартийными. Только Коммунистическая партия Украины (КПУ) и партия «Народный Рух Украины» (преемница бывшей оппозиционной «Народной Рады») провели масштабные всеукраинские кампании.

В самом начале своей работы ВРУ 2-го созыва утвердила Положение о депутатских группах (фракциях) в Верховной Раде Украины [35]. В нем был формально определен статус депутатской группы и фракции. Депутатская группа, созданная по партийному принципу, получала статус фракции. Депутаты не имели права вступать в более чем одну депутатскую группу или фракцию, т.е. была решена проблема двойного участия. Политическая структуризация фракций и групп в ВРУ 2-го созыва была менее четкой, чем в ВРУ 1-го созыва и проходила в основном по линии: «левые – нелевые» с элементами структурирования «пропрезидентские – антипрезидентские» силы [8]. Во время отдельных голосований часто образовывалось «левое» большинство, в которое, как правило, входили коммунисты (КПУ), социалисты (СПУ), аграрии, МДГ и группа «Единство».

#### 3.3.3.2 Оценка влияния фракций и депутатских групп в Верховной Раде Украины 2-го созыва

Для ВРУ 2-го созыва индекс Банцафа рассчитан по имеющимся данным о численном составе депутатских групп и фракций за 6 периодов ее работы. В Таблице Г.1 Приложения Г приведены значения индекса Банцафа, численный состав, а также доли мест, занимаемых фракциями в парламенте. Индекс

Банцафа был рассчитан в предположении, что депутаты, не входящие во фракции и группы, голосуют единогласно. Наиболее многочисленной и влиятельной за все время работы ВРУ 2-го созыва была фракция КПУ. Наибольшее значение индекса влияния фракции КПУ приходилось на начало созыва, после чего начало снижаться, как и начала снижаться ее доля мест в ВРУ. Причиной таких изменений заключалась в том, что количество депутатов в парламенте увеличивалось – депутаты доизбирались в ВРУ, но эти новоизбранные депутаты не присоединялись к фракции коммунистов. Заметим, что доля мест фракции КПУ в парламенте больше доли мест следующей по влиятельности группы «Центр» в 2,3 раза, в то время как индекс Банцафа КПУ превосходит индекс Банцафа «Центра» уже 2,8 раз. Остальные группы и фракции имели низкое значение индекса Банцафа (0,05 до 0,08). В целом отличие значения индекса Банцафа от доли мест групп и фракций в парламенте незначительно. Хотя и фракция КПУ была наиболее влиятельной в логике индекса Банцафа, во время голосований ей часто противопоставлялся альянс правых и правоцентристских сил (группы «Народный Рух», «Центр», «Государственность», «Рыночный выбор»).

### 3.3.4 Верховная Рада Украины 3-го созыва (1998 – 2002)

#### 3.3.4.1 История и структура [8,19,47]

В марте 1998 г. созыва впервые в истории Украины выборы в ВРУ 3-го прошли по смешанной избирательной системе: половина депутатов (225 из 450) избиралась по всеукраинским партийным спискам, половина – по одномандатным избирательным округам. По итогам выборов [27] наибольшее количество голосов при голосовании по партийным спискам получили КПУ и «Народный Рух Украины» (24,65% и 8,56%, соответственно). Именно эти партии проводили всеукраинские кампании на выборах 1994 года. Наибольшее количество мест в парламенте в результате оказалось у партий КПУ и у «Национально-демократической партии» (НДП). Причем, если КПУ получи-

ла большую часть своих мест за счет выборов по партийным спискам, то НДП, наоборот, за счет выборов в мажоритарных округах. Этот факт свидетельствует о том, что на уровне страны наиболее узнаваемой и популярной политической партией оставалась партия коммунистов.

Динамика изменений в численных составах фракций и групп была высокой. Остро стояла проблема межфракционных переходов (см., например, [25]): депутаты переходили из одной фракции в другую, что ни Конституцией, ни внутренними документами ВРУ запрещено не было.

После президентских выборов 1999 г. перед ВРУ стал вопрос о создании парламентского большинства, и принципом структуризации парламента стало отношение фракций к новоизбранному президенту и высшей исполнительной власти, идеологический принцип структуризации отошел на второй план. До начала 5-й сессии, в январе 2000 г., депутаты, лояльные к исполнительной власти, из фракций СДПУ(о), «Трудовая Украина», «Батькивщина», НДП, ПЗУ, фракции «Украинского народного руха», «Народного Руха Украины», «Реформы и порядок» – «Реформы – Конгресс», части фракции «Громада» и др. образовали большинство численностью 237 депутатов. Тем не менее, правовой статус парламентского большинства законодательно закреплен не был, оно было крайне неустойчивым и имело преимущественно ситуативный характер.

### 3.3.4.2 Оценка влияния депутатских групп в Верховной Раде Украины 3-го созыва

Индекс Банцафа рассчитан для всех фракций и групп на начало созыва и на конец каждой сессии в предположении, что депутаты, не входившие во фракции и группы, голосуют согласовано. Большинство, образованное в феврале 2000 г. не рассматривается как стабильное, предполагается, что фракции и группы в его составе голосуют самостоятельно. На рисунке 3.4 представлен график изменения значений индекса наиболее влиятельных депутатских

групп и фракций во времени. Как и в ВРУ 2-го созыва, в ВРУ 3-го созыва, наиболее влиятельной в логике индекса Банцафа фракцией на протяжении всех сессий была фракция КПУ. Причем ее значения индекса превосходят значения индекса следующей по влиятельности фракции НДП более чем на 50%. Фракция КПУ была наиболее многочисленной фракцией меньшинства, оппозиционного правительству, а к концу созыва часто оказывалась основой ситуативного большинства. Отличия индекса Банцафа от доли мест фракции в парламенте более существенные, чем в случаях 1-го и 2-го созывов. Например, для фракции КПУ расхождение индекса и доли составляет от 13% до более чем 50%, причем значения индекса Банцафа оказываются выше. Для всех же остальных фракций и групп значения доли превосходят значения индекса. Фракция НДП имела наиболее высокий индекс влияния на начало созыва, и со временем он значительно снизился (во время 3-й сессии произошел раскол фракции, и она потеряла более половины своих членов).

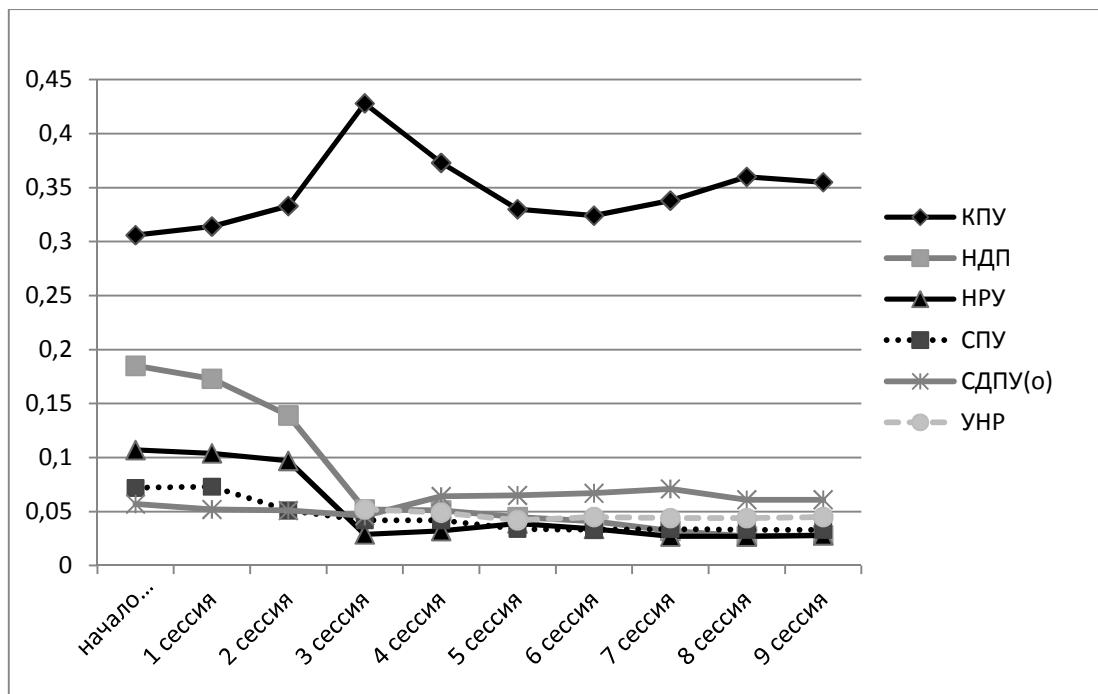


Рисунок 3.4 – Распределение влияния в ВРУ 3-го созыва

Остальные фракции и группы характеризуются более низким значением индекса, сосредоточенные около значения 0,05 и в целом не превосходившие 0,107. Динамика индекса Банцафа в целом соответствует динамике численно-

го состава фракций и групп. В Таблице Г.2 Приложения Г приведены значения индекса Банцафа, численный состав, а также доли мест, занимаемых фракциями в парламенте в ВРУ 3-го созыва.

### 3.3.5 Верховная Рада Украины 4-го созыва (2002 – 2006)

#### 3.3.5.1 История и структура [8,19,37]

Как и выборы в ВРУ 3-го созыва, выборы в ВРУ 4-го созыва проводились по смешанной (пропорционально-мажоритарной) системе с 4-процентным барьером в многомандатном округе и правилом простого большинства в одномандатных округах. Наилучший результат в общегосударственном многомандатном округе показал блок В. Ющенко «Наша Украина» (НУ) с результатом почти 24%. Также в многомандатном округе высокие результаты показала КПУ, получившая почти 20% голосов избирателей. Поддержаный президентом Украины Л. Кучмой блок партий «За единую Украину» по результатам голосования по партийным спискам оказался лишь на 3-м месте с результатом почти 12%.

Однако после открытия первой сессии, благодаря местам, полученным в одномандатных округах, и самовыдвиженцам, фракция «Единая Украина» – фракция блока «За единую Украину» – по состоянию на май 2002 г. имела самое большое количество представителей в парламенте – 175. Численность фракции НУ составила 119 депутатов, КПУ – 63 депутата, а СДПУ(о) – 31 депутат. БЮТ и СПУ имели количество мест, соответствующее результатам выборов (22 и 23 места соответственно). Наиболее существенное изменение в структуре парламента произошло в начале работы ВРУ 4-го созыва, во время 1-й сессии. Самая многочисленная по результатам выборов фракция «Единая Украина» распалась на 8 новых фракций и депутатских групп. Фракционный состав ВРУ 4-го созыва был крайне нестабильным.

27 сентября 2002 г. депутаты 5 фракций и 4 депутатских групп, ряд внефракционных самовыдвиженцев, а также некоторые депутаты оппозици-

онных фракций объявили о создании парламентского большинства (230 депутатов). Созданное парламентское большинство было крайне неустойчивым, что проявилось уже во время первой пленарной недели октября. Оно просуществовало не дольше чем на протяжении одной сессии, даже в этот период продемонстрировав свою нестабильность и неустойчивость, и было скорее формальным, чем фактическим образованием (см., например, [8]).

Политический кризис, связанный с президентскими выборами 2004 г. продемонстрировали нестабильность парламента и размытость принципов политического сотрудничества фракций. Фракционную принадлежность изменили 130 народных депутатов, а после событий «оранжевой революции» и произошедшего раскола среди фракций партий и блоков, поддерживавших В. Ющенко, принципом политической структуризации выступали субъективные факторы: идеологически отдаленные фракции, а также фракции, занимавшие разную позицию по отношению к президенту, могли объединяться при голосовании.

### 3.3.5.2 Оценка влияния депутатских групп в Верховной Раде Украины 4-го созыва

Поскольку сформированное в начале созыва большинство оказалось крайне нестабильным, оно не рассматривалось как единая структурная единица парламента, и индекс Банцафа рассчитывался для фракций и групп по отдельности. На рисунке 3.5 приведен график изменения значений индекса Банцафа для наиболее влиятельных фракций и групп.

На начало созыва наибольшая доля мест в парламенте принадлежала фракции «Единая Украина», ей же соответствовало наибольшее значение индекса Банцафа, превышавшее значение доли мест на 10%. Следующие по влиятельности по состоянию на май 2002 г. – фракции НУ и КПУ. Они имели одинаковые индексы влияния (равные 0,170), притом, что доля мест НУ на тот момент была почти в два раза больше, чем доля мест КПУ (0,266 и 0,141,

соответственно). Ситуация изменилась, когда в июле 2002 г. доля мест НУ в парламенте незначительно уменьшилась (на 7,5%), а ее индекс Банцафа возрос в 1,8 раза, достигнув максимального значения – 0,307. Доля же мест КПУ не изменилась, а ее индекс Банцафа уменьшился. Таким образом, разрыв между влиянием НУ и КПУ стал еще большим. После распада фракции «Единая Украина» и до июля 2005 г. (т.е. практически до конца созыва) наиболее влиятельной была фракция НУ с В. Ющенко во главе. Однако ее влияние на протяжении всего созыва монотонно убывало. Фракция СДПУ(о) в течение всего созыва имела относительно невысокое значение индекса Банцафа (оно не превышало 0,1). Фракции БЮТ и СПУ вплоть до июля 2005 г. имели стабильно невысокие значения индекса Банцафа (приблизительно от 0,05 до 0,1) с практически идентичной динамикой и были менее влиятельными, чем фракция СДПУ(о). Фракции, которые образовывались в результате расколов и межфракционных переходов, в целом имели низкое значение индекса Банцафа, около 0,03 (например, «Народовластие», «Демократические инициативы», «Аграрии Украины», «Центр», «Союз»). Как видно, ВРУ 4-го созыва оказалась слабо структурированной, что во многом затрудняло ее работу.

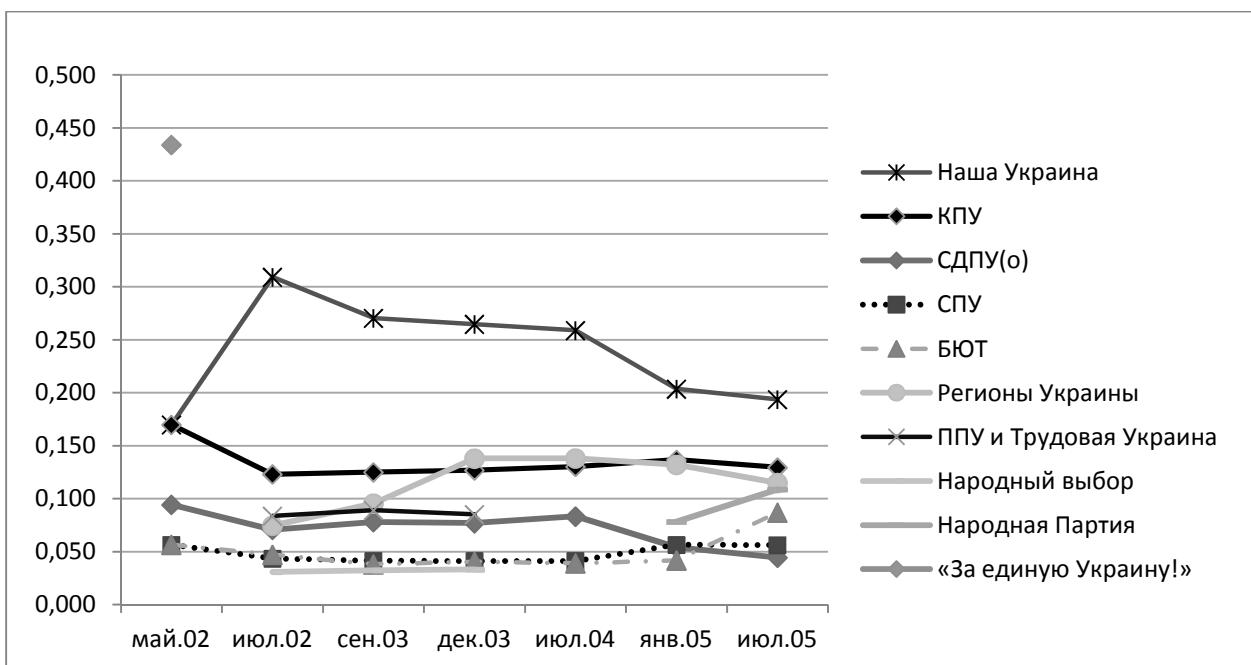


Рисунок 3.5 – Распределение влияния в ВРУ 4-го созыва

### 3.3.6 Верховная Рада Украины 5-го созыва (2006 – 2007)

#### 3.3.6.1 История и структура [18,26,37]

Порядок проведения парламентских выборов 2006 г. регулировался новым законом [34]. Впервые в истории Украины выборы в ВРУ 5-го созыва проводились полностью по пропорциональной системе. Барьер для прохождения в парламент был снижен до 3%. Срок полномочий ВРУ увеличивался с четырех лет до пяти. Согласно конституционным поправкам, принятым еще в декабре 2004 г. и в полной мере вступившим в силу 1 января 2006 г., Украина становилась парламентско-президентской республикой. Полномочия парламента и премьер-министра значительно расширились, что увеличивало важность парламентских выборов для политических сил. Согласно результатам выборов, в ВРУ 5-го созыва было образовано пять фракций: фракции Партии регионов, НУ, БЮТ, СПУ и КПУ. В течение месяца после начала созыва ВРУ должна была сформировать парламентское большинство (т.н. «правящую коалицию») из числа фракций политических сил, прошедших в парламент. Впервые за историю существования ВРУ правовой статус коалиции был законодательно закреплен, и от ее участников требовалось поддержание общего выработанного коалицией политического курса во время голосований.

7 июля 2006 г., спустя почти три месяца после начала созыва, была создана «Антикризисная коалиция» численностью 238 депутатов, в которую вошли фракции Партии регионов (186 депутатов), КПУ (21 депутат) и СПУ (29 депутатов) и 2 депутата из фракции НУ [27]. 3 члена фракции СПУ оказались на стороне оппозиции вместе с фракцией БЮТ, которая официально ушла в оппозицию в конце сентября 2006 г. Фракция НУ, которая с августа по сентябрь 2006 г. находилась в состоянии «полукоалиции» с парламентским большинством, в октябре 2006 г. также присоединилась к БЮТ и ушла в оппозицию, но отдельные депутаты продолжали переходить на сторону большинства.

2 апреля 2007 г. В. Ющенко издал указ о роспуске ВРУ 5-го созыва на том основании, что по Конституции в коалиции могут объединяться только целые фракции, но не отдельные депутаты. Противостояние парламентского большинства, оппозиции и президента вылилось в очередной политический кризис. Лишь в конце мая В. Ющенко и В. Янукович пришли к соглашению о проведении досрочных выборов осенью. Таким образом, ВРУ 5-го созыва просуществовала рекордно короткий срок – менее года.

### 3.3.6.2 Оценка влияния депутатских групп в Верховной Раде Украины 5-го созыва

По сравнению с четырьмя предыдущими созывами, ВРУ 5-го созыва имела наименьшее количество фракций, и ее состав был более «прозрачным», тем не менее, структуризация парламента проходила тяжело. В Таблице 3.3 представлены доли мест и значения индекса Банцафа фракций в ВРУ 5-го созыва. Образованные «Антикризисная коалиция» и ее оппозиция были устойчивыми образованиями с достаточно высокой партийной дисциплиной, и при расчете индекса Банцафа предполагалось, что участники каждой из них голосуют согласованно.

Таблица 3.3 – Доля мест и индекс Банцафа  $\beta$  фракций, коалиции и оппозиции в ВРУ 5-го созыва

Фракция (коалиция, оппозиция)	Начало созыва		Конец сентября 2006 г.		24 марта 2007 г.		6 апреля 2007 г.	
	Доля	$\beta$	Доля	$\beta$	Доля	$\beta$	Доля	$\beta$
1. Партия регионов	0,413	0,385	–	–	–	–	–	–
2. БЮТ	0,287	0,231	–	–	–	–	–	–
3. Блок «Наша Украина»	0,180	0,231	0,176	0	–	–	–	–
4. СПУ	0,073	0,077	–	–	–	–	–	–
5. КПУ	0,047	0,077	–	–	–	–	–	–
6. «Антикризисная коалиция» (после 24 марта 2007 г. – «Коалиция национального единства»)	–	–	0,530	1	0,555	1	0,530	1
7. Оппозиция	–	–	0,294	0	0,445	0	0,470	0

Первоначально в парламенте наибольшая доля мест, равно как и значение индекса Банцафа, были у Партии регионов (доля мест составила 0,413, индекс Банцафа – 0,385). БЮТ и НУ, несмотря на значительную разницу в доле мест (у НУ она была на 37% меньше, чем у БЮТ), имели одинаковый индекс Банцафа, равный 0,231. Аналогичная ситуация сложилась и у СПУ и КПУ: у КПУ доля мест была на 35% меньше, чем у СПУ, а значение индекса Банцафа у них было одинаковое – 0,077. Таким образом, наиболее влиятельной в ВРУ 5-го созыва оказалась фракция Партии регионов, которая в итоге и создала парламентское большинство. С момента создания «Антикризисной коалиции» и до роспуска парламента, ее индекс Банцафа равнялся 1, т.к. ее доля мест превышала установленную квоту. Доля мест парламентского большинства увеличивалась, почти достигнув квоты для голосований по конституционным законам в марте 2007 г., однако вскоре она уменьшилась до первоначального значения, но эти изменения не повлияли на значение индекса Банцафа.

### 3.3.7 Верховная Рада Украины 6-го созыва (2007 – 2012)

#### 3.3.7.1 История и структура [26,27,37]

30 сентября 2007 г. на Украине прошли внеочередные парламентские выборы. Как и на выборах в ВРУ 5-го созыва, выборы в ВРУ 6-го созыва проходили исключительно по партийным спискам в общегосударственном избирательном округе, действовал 3-процентный избирательный барьер. Избирательная кампания проходила в сложных для партий и блоков условиях: помимо того, она была очень короткой, участникам предвыборной кампании было необходимо мобилизовать свой избирательный блок, уставший от политического кризиса.

По результатам выборов в ВРУ 6-го созыва было образовано пять фракций: фракции Партии регионов, БЮТ, НУНС, КПУ и Блока Литвина. ВРУ 6-го созыва была крайне неустойчивой. За время ее работы трижды сменилась

правящая коалиция, дважды формировалось новое правительство, дважды избирался спикер. По результатам выборов Партия регионов и БЮТ стали наиболее крупными силами в парламенте и имели практически одинаковое количество мест в парламенте; естественным образом каждая из этих фракций стремилась создать собственное большинство и не собиралась мириться с пребыванием в оппозиции, что затрудняло процесс принятия решений в парламенте и становилось причиной «расшатывания» политической ситуации в стране.

Суммарно у фракций Партии регионов и КПУ было недостаточно мандатов для создания собственного парламентского большинства. Обратная ситуация сложилась у фракций БЮТ и НУНС. За счет того, что БЮТ значительно улучшил свой результат на выборах и имел 156 мест в парламенте, БЮТ и НУНС сумели создать парламентское большинство в лице «Коалиции демократических сил» без привлечения третьей фракции. Фракции Партии регионов и КПУ объявили об уходе в жесткую оппозицию. Фракция «Блока Литвина» заняла нейтральную позицию, не присоединившись ни к коалиции, ни к оппозиции. Спустя около года после начала созыва, осенью 2008 г., в парламенте снова начался кризис, в ходе которого распалась «Коалиция демократических сил», а президент В. Ющенко на этот раз безуспешно попытался распустить парламент. В итоге, 16 декабря 2008 г., БЮТ и НУНС образовали «Коалицию национального развития, стабильности и порядка», и на этот раз в ее состав также вошел «Блок Литвина». Фракции Партии регионов и КПУ по-прежнему оставались в оппозиции.

### 3.3.7.2 Оценка влияния фракций в Верховной Раде Украины 6-го созыва

При расчете индекса Банцафа принимается предположение о том, что депутаты коалиции (как и депутаты оппозиции) голосуют согласованно. Ситуации, сложившиеся в ВРУ 6-го и предыдущего, 5-го, созыва до образования коалиций были очень похожи: во время этих обоих созывов в парламенте

были представлены 5 фракций, из которых две – крупные, две – небольшие, одна – среднего размера. Однако БЮТ увеличила свое количество представителей в парламенте, что значительно изменило распределение влияния в ВРУ 6-го созыва по сравнению с предыдущим созывом. В начале 6-го созыва, до образования коалиции, фракции Партии регионов, БЮТ и НУНС, согласно логике индекса Банцафа, при условии, что фракции не имеют предпочтений в формировании коалиций, разделили между собой все влияние в парламенте: их индексы Банцафа равны по 0,333.

При этом наименьшая разница между долей мест и значением индекса Банцафа наблюдается у фракции БЮТ (см. Таблице 3.4). Фракции КПУ и Блока Литвина имели индексы Банцафа, равные нулю. Напомним, что при расчете индексов Банцафа для фракций ВРУ 5-го созыва, Партия регионов имела наибольшее значение, отличное от значений индекса у БЮТ и НУНС, а более мелкие фракции КПУ и СПУ имели значения индекса, отличные от нуля. После образования первой правящей коалиции, имевшей долю мест, превышавшую квоту, ее значение индекса Банцафа, очевидно, равнялось единице. При этом и сформировавшаяся из фракций Партии регионов и КПУ оппозиция (доля мест которой незначительно отличалась от доли мест коалиции), и фракция «Блока Литвина», не имевшая и десятой части мест в парламенте, имели одинаковое значение индекса Банцафа, равное нулю. Нужно заметить, что депутаты созданной «Коалиции демократических сил» должны были отличаться крайне высокой партийной дисциплиной, поскольку доля мест коалиции едва превосходила квоту. Вторая коалиция, образованная уже при участии фракции «Блока Литвина», имела уже большую долю мест в парламенте (по сравнению с первой коалицией) и индекс влияния, равный 1.

Оппозиционное меньшинство при небольшом отличии от правящей коалиции в доле мест имело нулевой индекс влияния Банцафа. Последняя коалиция, «Стабильность и реформы», также имела индекс Банцафа, равный единице, при доле мест, равной 0,522.

Таблица 3.4 – Доля мест и индекс Банцафа  $\beta$  фракций, коалиций и оппозиций в ВРУ 6-го созыва

Фракция (коалиция, оппозиция)	Начало созыва		29 ноября 2007 г.		16 декабря 2008 г.		11 марта 2010 г.	
	Доля мест	$\beta$	Доля мест	$\beta$	Доля мест	$\beta$	Доля мест	$\beta$
1. Партия регионов	0,389	0,333	–	–	–	–	–	–
2. БЮТ	0,347	0,333	–	–	–	–	–	–
3. НУНС	0,160	0,333	–	–	–	–	–	–
4. КПУ	0,060	0	–	–	–	–	–	–
5. «Блок Литвина»	0,044	0	0,044	0	–	–	–	–
6. Коалиция БЮТ + НУНС	–	–	0,504	1	–	–	–	–
7. Коалиция БЮТ + НУНС+ «Блок Литвина»	–	–	–	–	0,550	1	–	–
8. Коалиция Партия регионов + КПУ + «Блок Литвина»	–	–	–	–	–	–	0,522	1
9. Оппозиция коалиции БЮТ + НУНС	–	–	0,449	0	–	–	–	–
10. Оппозиция коалиции БЮТ + НУНС + «Блок Литвина»	–	–	–	–	0,450	0	–	–
11. Оппозиция коалиции Партия регионов + КПУ + «Блок Литвина»	–	–	–	–	–	–	0,413	0
12. Внефракционные	–	–	–	–	–	–	0,051	0

Каждая из трех коалиций, созданных в ВРУ 6-го созыва, имела достаточно шаткое положение, а оппозиция периодически препятствовала работе правящей коалиции физически, блокируя парламент, в ситуации, когда она не могла оказывать влияния на принятие решения исключительно с помощью своих голосов.

### 3.3.8 Оценка влияния фракций и групп в Верховной Раде Украины с учетом их предпочтений в формировании коалиций

#### 3.3.8.1 $\alpha$ -индексы

Для оценки влияния фракций и групп в украинском парламенте с учетом из предпочтений в формировании коалиций предлагается использовать модификацию индекса Банцафа – порядковый  $\alpha$ -индекс. При построении порядкового  $\alpha$ -индекса предполагается, что для каждой фракции в парламенте можно построить упорядочение остальных фракций в соответствии с ее желанием вступать с ними в коалицию. Т.е. для фракции  $i$  на декартовом произ-

ведении  $(P \setminus \{i\}) \times (P \setminus \{i\})$  можно определить отношение вида  $R_i = (j, k)$ , которое показывает, что фракция  $i$  предпочтет вступить в коалицию скорее с фракцией  $j$ , чем с фракцией  $k$ . Отношение  $R_i$  является отношением линейного порядка, значит можно определить ранг  $p_{ij}$  фракции  $j$  в  $R_i$ , равный количеству фракций, с которыми фракция  $i$  будет вступать в коалицию менее охотно, чем с фракцией  $j$ . Наиболее предпочтительная для вступления в коалицию фракция будет иметь ранг (целое неотрицательное число)  $p_{ij} = |P| - 1$ , где  $|P|$  – количество фракций в парламенте. Таким образом,  $p_{ij}$  будет отражать желание фракции  $i$  объединиться с фракцией  $j$  в коалицию, причем в общем случае  $p_{ij} \neq p_{ji}$ , что позволяет учесть несимметричность предпочтений фракций.

После того как предпочтения фракций представлены в виде чисел, эти предпочтения можно учесть при построении индекса влияния. Для этого в [55] предлагается использовать функции интенсивности связи (intensity functions).

Пусть  $\omega$  – выигрывающая коалиция. Будем обозначать функцию интенсивности связи фракции  $i$  с коалицией  $\omega$  как  $f(i, \omega)$ . В [55] предложены несколько способов ее построения. В данной работе будем использовать функцию интенсивности прямых предпочтений фракции  $i$

$$f^+(i, \omega) = \frac{\sum_{j \in \omega} p_{ij}}{|\omega|}.$$

Она рассчитывается как сумма рангов  $p_{ij}$  каждой фракции  $j$  из выигрывающей коалиции, нормированная на количество фракций в выигрывающей коалиции.

Пусть фракция  $i$  является ключевой в выигрывающей коалиции  $\omega$ . Определим  $\chi_i$  как абсолютное влияние фракции  $i$ , равное сумме значений функции интенсивности связи фракции  $i$  со всеми выигрывающими коалициями  $w$ , в которых она является ключевой,

$$\chi_i = \sum_{\substack{\omega, i \\ \text{ключевая в } \omega}} f(i, \omega).$$

Нормируя  $\chi_i$  на  $\sum_j \chi_j$  (сумму значений абсолютного влияния всех фракций в выигрывающей коалиции), получим относительное влияние фракции  $i$ . Это и будет порядковый  $\alpha$ -индекс, индекс влияния фракции  $i$ , в котором предпочтения фракций в образовании коалиций учтены

$$\alpha_{(i)} = \frac{\chi_i}{\sum_j \chi_j}.$$

Как уже упоминалось,  $\alpha$ -индекс является обобщением индекса Банцафа. И если построение индекса Банцафа основано на нахождении количества выигрывающих коалиций, в которых фракция является ключевой, т.е. за каждую коалицию, которую данная фракция делает выигрывающей, она «получает» единицу, то в  $\alpha$ -индексе вместо единицы за каждую такую коалицию фракция «получает» некоторое значение, соответствующее силе связи данной фракции с коалицией.

### 3.3.8.2 Оценка влияния фракций и групп в Верховной Раде Украины с учетом их предпочтений в формировании коалиций

Оценка влияния фракций в парламенте с учетом предпочтений с помощью порядкового  $\alpha$ -индекса требует выстроить предпочтения в формировании коалиций каждой фракции в парламенте в виде линейного порядка. Существуют различные способы упорядочить фракции в парламенте и определить, насколько близки их позиции по отношению друг к другу. По причине отсутствия данных, позволяющих точно определить позиции групп ВРУ 1-го созыва в некотором одномерном пространстве, а также по причине отсутствия непротиворечивых данных о принципах структуризации и близости позиций фракций и групп в созывах с 4-го по 7-й (равно как по причине существенных расхождений экспертных мнений), порядковый  $\alpha$ -индекс рассчитан по имеющимся однозначным данным о структуризации парламента и о близости позиций фракций и групп исключительно для ВРУ 2-го и 3-го созывов.

### 3.3.8.3 $\alpha$ -индексы фракций и групп Верховной Рады Украины 2-го созыва

В ВРУ 2-го созыва идеологический принцип был основным принципом структурирования парламента. В ВРУ 2-го созыва существовала достаточно четкая поляризация партий по линии «левые – нелевые». Также наблюдались элементы структурирования по принципу «пропрезидентские – антипрезидентские» силы, однако они либо совпадали с линией «левые – нелевые», либо были незначительными. В Таблице 3.5 приведен идеологический спектр с соответствующим положением на нем фракций и групп в ВРУ 2-го созыва, предложенный в [10]. Следует отметить, что внефракционные депутаты, более 20 из которых были членами радикально-консервативных и радикально-националистических партий, не имевших собственных фракций в парламенте, рассматриваются как консолидированная группа правого идеологического крыла.

Таблица 3.5 – Положение фракций и групп в ВРУ 2-го созыва в 1995 г. на идеологическом спектре «левые – нелевые»

Левые радикалы	Левые	Прагматики-центристы	Национал-демократы	Правые радикалы и независимые
Коммунисты	Социалисты Агриарии	«Центр» МДГ «Единство»	«Реформы» НРУ	«Независимые» Внефракционные

Определение положения фракций и групп на идеологическом спектре позволяет каждой из них присвоить ранг  $r_i$ . Фракциям и группам, занимающим одинаковое положение на спектре, будем присваивать одинаковый ранг. Пусть значение  $r_i$  у левых радикалов равняется 1, а у правых радикалов и независимых – 5. Прагматики-центристы будут иметь ранг, равный 2 (см. Таблицу 3.6).

Таблица 3.6 – Позиции фракций и групп в ВРУ 2-го созыва в 1995 г.

Фракция/группа ( $i$ )		Ранг ( $r_i$ )
1.	Коммунисты	1
2.	Социалисты	2
3.	Аграрии	2
4.	«Центр»	3
5.	МДГ	3
6.	«Единство»	3
7.	«Реформы»	4
8.	НРУ	4
9.	«Государственность»	4
10.	«Независимые»	5
11.	Внефракционные	5

На основании присвоенных каждой фракции (группе) рангов можно построить матрицу предпочтений  $\|p_{ij}\|$ . Введем расстояние между фракциями – меру отдаленности позиций двух фракций  $\lambda_{ij}$ ,  $\lambda_{ij} = |r_i - r_j|$ . Чем больше расстояние между двумя фракциями (группами) на оси, тем менее вероятно, что они будут стремиться образовывать коалицию, значит значение  $p_{ij}$ , отражающее желание фракции образовать коалицию, будет тем меньше, чем мера отдаленности  $\lambda_{ij}$  будет больше. Будем считать, что фракции и группы не образовывают коалицию, если расстояние между ними превышает значение 3, т.е. при  $\lambda_{ij} \geq 3$  значение  $p_{ij}$  равно нулю. Если мера отдаленности позиций фракций принимает значение 2, соответственное значение  $p_{ij}$  будет равно 1, при  $\lambda_{ij} = 1$   $p_{ij}$  будет принимать значение 2 и наиболее близким фракциям с  $\lambda_{ij} = 0$  будет соответствовать  $p_{ij} = 3$ . Аналогичная схема применяется в [56].

Таким образом, становится возможным составить матрицу предпочтений фракций и групп в ВРУ 2-го созыва в 1995 г, а на ее основании – рассчитать значения функции интенсивности связи и, соответственно, порядковый  $\alpha$ -индекс. В Таблице 3.7 приведена матрица предпочтений фракций и групп в предположении, что эти предпочтения обладают свойством симметричности. В Таблице 3.8 представлены результаты вычислений порядкового  $\alpha$ -индекса

на основе функции интенсивности прямых предпочтений, а также доля мест фракций и групп в ВРУ 2-го созыва в 1995 г. и значения индекса Банцафа.

Построение порядкового  $\alpha$ -индекса позволяет добиться более тонкой оценки распределения влияния между фракциями и группами в парламенте.

Таблица 3.7 – Матрица предпочтений  $\|p_{ij}\|$  фракций и групп в ВРУ 2-го созыва в 1995 г.

$i \backslash j$	Коммунисты	Социалисты	Аграрии	«Центр»	МДГ	«Единство»	«Реформы»	НРУ	«Государств.»	«Независимые»	Внефракц.
Коммунисты	–	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
Социалисты	2	–	3	2	2	2	1	1	1	0	0
Аграрии	2	3	–	2	2	2	1	1	1	0	0
«Центр»	1	2	2	–	3	3	2	2	2	1	1
МДГ	1	2	2	3	–	3	2	2	2	1	1
«Единство»	1	2	2	3	3	–	2	2	2	1	1
«Реформы»	0	1	1	2	2	2	–	3	3	2	2
НРУ	0	1	1	2	2	2	3	–	3	2	2
«Государств.»	0	1	1	2	2	2	3	3	–	2	2
«Независимые»	0	0	0	1	1	1	2	2	2	–	3
Внефракц.	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	–

Как видим, между значениями индекса Банцафа и  $\alpha$ -индекса есть существенные расхождения. Следует также отметить, что разности значений  $\alpha$ -индекса и доли мест гораздо больше, чем соответствующие разности значений индекса Банцафа и доли мест.

Таблица 3.8 – Доля мест и индексы влияния фракций и групп в ВРУ 2-го созыва в 1995 г.

Фракция (группа)		Количество мест	Доля мест	Индекс Банцафа	$\alpha$ -индекс
1.	Коммунисты	89	0,220	0,261	0,146
2.	Социалисты	28	0,077	0,074	0,042
3.	Аграрии	47	0,116	0,095	0,077
4.	«Центр»	33	0,081	0,080	0,101
5.	МДГ	30	0,074	0,070	0,105
6.	«Единство»	31	0,077	0,074	0,104
7.	«Реформы»	36	0,089	0,095	0,133
8.	НРУ	29	0,072	0,069	0,096
9.	«Государственность»	30	0,074	0,070	0,093
10.	«Независимые»	28	0,069	0,065	0,060
11.	Внефракционные	21	0,052	0,045	0,042

Как видим, более всего индекс Банцафа завышает оценку влияния для крайних левых фракций: например, у фракции коммунистов  $\alpha$ -индекс оказался на 44% ниже, чем индекс Банцафа. Практически на столько же отличается  $\alpha$ -индекс от индекса Банцафа у группы социалистов. У аграриев аналогичная разность принимает меньшее значение. Следует заметить, что, несмотря на свою многочисленность в парламенте, левые фракции так и не смогли образовать устойчивый союз, порой оказываясь не в состоянии повлиять на принимаемые решения. Центристы («Центр», МДГ, «Единство») благодаря своему выгодному положению на идеологическом спектре имели достаточно большое влияние при его оценке с помощью  $\alpha$ -индекса, и оно оказывалось значительно выше, чем при его оценки с помощью индекса Банцафа (например,  $\alpha$ -индекс у группы МДГ превышает индекс Банцафа чуть более чем на 50%). Интересно, что представители нелевых фракций, даже занимая крайние позиции на идеологическом спектре, имели гораздо более меньшие расхождения в значениях индекса Банцафа и  $\alpha$ -индекса, чем левые радикалы.

### 3.3.8.4 $\alpha$ -индексы фракций и групп Верховной Рады Украины 3-го созыва

В ВРУ 3-го созыва положение фракций и групп на идеологическом спектре «левые – правые» стало менее значимым в поляризации парламента. Парламент был структурирован по принципу «отношение фракции или группы к президенту и правительству». Определение близости позиций фракций и групп, а также их упорядочение было осуществлено в [13] с помощью иерархического кластерного анализа с использованием результатов поименного голосования народных депутатов в период с октября по декабрь 1998 г. Согласно проведенному анализу фракции и группы разделились на pro-лагерь и contra-лагерь и расположились на оси «пропрезидентские (проправительственные) – антипрезидентские (антиправительственные)», как показано в Таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Мера лояльности к президенту и правительству фракций и групп в ВРУ 3-го созыва (октябрь – декабрь 1998 г.)

Contra-лагерь		Pro-лагерь		
Радикальные противники	Умеренные противники	Относительно дистанцированные	Достаточно лояльные	Максимально лояльные
ПСПУ «Громада»	КПУ СПУ Сел. ПУ (Крестьяне)	НДП СДПУ(о)	«Независимые» Внефракционные	НРУ ПЗУ

Согласно отношению фракций и групп к президенту (правительству) каждой из них можно присвоить ранг  $r_i$ , отражающий ее положение в одномерном пространстве. Пусть антипрезидентским (антиправительственным) фракциям ПСПУ и «Громада», занявшим наиболее радикальную позицию, соответствует ранг, равный 1, «умеренным противникам» – ранг 2, дистанцированным от президента и власти, но относительно лояльным к ним – ранг 4 (значение 3 пропущено, поскольку pro- и contra-лагери значительно удалены друг от друга), «достаточно лояльным» – ранг 5, а максимально лояльным к президенту и правительству фракциям НРУ и ПЗУ будет соответствовать ранг, равный 6. Позиции фракций и групп представлены в Таблице 3.10. Как и при расчете  $\alpha$ -индекса для фракций и групп 2-го созыва, будем считать, что фракции (группы) со значительно удаленными друг от друга позициями не будут образовывать коалиции, и минимально необходимым для объединения значением расстояния является  $\lambda_{ij} = 2$ .

Таблица 3.10 – Позиции фракций и групп в ВРУ 3-го созыва (октябрь – декабрь 1998 г.)

Фракция/группа ( $i$ )		Ранг ( $r_i$ )
1.	ПСПУ	1
2.	«Громада»	1
3.	КПУ	2
4.	СПУ	2
5.	Сел. ПУ (Крестьяне)	2
6.	НДП	4
7.	СДПУ(о)	4
8.	«Независимые»	5
9.	Внефракционные	5
10.	НРУ	6
11.	ПЗУ	6

Таким образом, среди фракций и групп, принадлежащих разным лагерям, только «умеренные противники» и «относительно дистанцированные»,

рассматриваются как потенциальные сотрудники, что в целом совпадает с результатами проведения кластерного анализа. Таким образом, расстоянию  $\lambda_{ij} \leq 3$  соответствует  $p_{ij} = 0$ . Расстоянию  $\lambda_{ij} = 2$  будет соответствовать значение предпочтений  $p_{ij} = 1$ , расстоянию  $\lambda_{ij} = 1$  – значение  $p_{ij} = 2$ , и наименьшему расстоянию, равному нулю, будет соответствовать наивысшее значение  $p_{ij} = 3$ . Считаем, что предпочтения фракций (групп) в образовании коалиций симметричны.

В Таблице 3.11 представлена матрица предпочтений фракций и групп в ВРУ 3-го созыва во время второй сессии. После построения матрицы предпочтений становится возможным рассчитать значения функций интенсивности связи, а значит и  $\alpha$ -индекса. В Таблице 3.12 приведены значения доли мест, индекса Банцафа, а также порядкового  $\alpha$ -индекса. Как видим, значения доли мест, индекса Банцафа, а также порядкового  $\alpha$ -индекса для фракций (групп) имеют ряд существенных различий. Во-первых, значение  $\alpha$ -индекса, учитывающего предпочтения, у фракций и групп, занимающих крайние позиции на оси «пропрезидентские – антипрезидентские», значительно ниже значений индекса Банцафа, согласно которому все коалиции равновероятны (например, у фракций НРУ и ПЗУ  $\alpha$ -индекс отличается от индекса Банцафа почти на 20%, аналогичная разность чуть меньше у ПСПУ и у «Громады»).

Таблица 3.11 – Матрица предпочтений  $\|p_{ij}\|$  фракций и групп в ВРУ 3-го созыва (октябрь – декабрь 1998 г.)

$i \backslash j$	ПСПУ	Громада	КПУ	СПУ	Сел. ПУ	НДП	СДПУ(о)	Независ.	Внефр.	НРУ	ПЗУ
ПСПУ	–	3	2	2	2	0	0	0	0	0	0
«Громада»	3	–	2	2	2	0	0	0	0	0	0
КПУ	2	2	–	3	3	1	1	0	0	0	0
СПУ	2	2	3	–	3	1	1	0	0	0	0
Сел. ПУ	2	2	3	3	–	1	1	0	0	0	0
НДП	0	0	1	1	1	–	3	2	2	1	1
СДПУ(о)	0	0	1	1	1	3	–	2	2	1	1
«Независ.»	0	0	0	0	0	2	2	–	3	2	2
Внефр.	0	0	0	0	0	2	2	3	–	2	2
НРУ	0	0	0	0	0	1	1	2	2	–	3
ПЗУ	0	0	0	0	0	1	1	2	2	3	–

Таблица 3.12 – Доля мест и индексы влияния фракций и групп в ВРУ 3-го созыва (октябрь – декабрь 1998 г.)

Фракция (группа)		Доля мест	Индекс Банцафа	$\alpha$ -индекс
1.	ПСПУ	0,032	0,035	0,029
2.	«Громада»	0,103	0,096	0,080
3.	КПУ	0,277	0,328	0,355
4.	СПУ	0,053	0,048	0,054
5.	Сел. ПУ (Крестьяне)	0,034	0,037	0,041
6.	НДП	0,197	0,164	0,177
7.	СДПУ(о)	0,057	0,052	0,056
8.	«Независимые»	0,050	0,046	0,045
9.	Внефракционные	0,034	0,037	0,036
10.	НРУ	0,108	0,106	0,085
11.	ПЗУ	0,055	0,052	0,042

У внефракционных депутатов и у группы «Независимые» значения  $\alpha$ -индекса и индекса Банцафа наиболее близки. Фракции и группы, расположенные наиболее близко к центру оси, имеют значения  $\alpha$ -индекса, превышающие значения индекса Банцафа. При учете предпочтений фракции и группы в центре оказываются в более выгодном положении и являются более влиятельными. Например, при оценке влияния фракций и групп с помощью индекса Банцафа, влияние НРУ, второй по влиятельности фракции в парламенте, оказывается на 35% меньше влияния НДП, наиболее сильной фракции в ВРУ 3-го созыва. Однако, если влияние фракций в парламенте оценивается с помощью  $\alpha$ -индекса, влияние НРУ оказывается уже на 52% меньше влияния НДП.

### 3.3.9 Некоторые выводы

За период с 1990 г. по 2012 г. Украина была провозглашена независимым государством, была принята новая Конституция, несколько раз изменялась избирательная система и дважды – форма правления, сменялась политическая элита. Верховная Рада Украины за время своего существования прошла путь от парламента с множеством мелких групп, образованных по не-партийным признакам, к парламенту с небольшим количеством крупных фракций, способных формировать относительно устойчивые коалиции. Однако во время всех созывов ситуация в парламенте была нестабильной, взаи-

модействие большинства и оппозиции, которые формировались в некоторых созывах, было сложным, что часто затрудняло принятие решений.

В работе показано, что влияние фракций и групп, оцененное с помощью индекса Банцафа, не всегда зависит от доли их мест в парламенте. Оценки распределения влияния фракций и групп, проведенные с помощью а-индекса, учитывающего предпочтения, и индекса Банцафа часто значительно отличаются. Показано, что фракции и группы, занимающие центристское положение, увеличивают свое влияние, в то время как радикальные фракции и группы уменьшают его.

Результаты этого подраздела отражены в работе [28]:

Олейник В.В., Лебедюк В.Н. Распределение влияния между фракциями и группами в Верховной Раде Украины (1990–2012 гг.)// WP7/2013/08. – М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2013, 76с.

## 4 Исследования по анализу данных

В этом разделе отчета приведены результаты исследований по анализу данных. Результаты в рамках исследования этого раздела были получены в следующих теоретических и прикладных направлениях:

- теоретико-экспериментальные исследования по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов;
- исследования по кластерному анализу социально-экономических данных;
- исследование изменений качественных характеристик свидетельств при их комбинировании в рамках теории Демпстера–Шейфера;
- исследование устойчивости нахождения параметров симметрии зашумленных изображений.

### 4.1 Теоретико-экспериментальные исследования по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов

В данном подразделе отчета приведены результаты исследований, связанных с развитием общей методологии решения задач агрегации данных или, точнее, суммаризации данных. Этот термин понимается в самом широком смысле. К задачам суммаризации относятся: вычисление среднего значения ряда чисел, количественная оценка уровня интеллекта школьников по результатам тестирования и школьным оценкам, выявление кластера школьников со сходными оценками. В первом пункте формулируется общая схема суммаризации данных, которая оказывается аналогична общей схеме прогнозирования (коррелирования) данных. Затем во втором пункте приводится обзор целей кластер-анализа как способа суммаризации данных. Основной третий пункт посвящен применению разработанной меры релевантности «слово-сочетание-текст» для продвижения в решении проблемы рубрикации научных статей. Проводятся результаты всесторонних экспериментов по сравнению разработанной меры релевантности с двумя другими мерами, развивае-

мыми в международных публикациях. Показано, что результаты использования новой меры существенно превосходят результаты, полученные с использованием этих других мер релевантности.

#### 4.1.1 Схема автоматизации задач суммаризации данных

Обычно при изучении связей в данных выделяют, как минимум, две группы признаков: прогнозирующие, или входные, признаки и целевые, или выходные, признаки. Обычно число целевых признаков невелико. Основные методы разработаны для случая, когда имеется только один целевой признак. Признак может выбираться в качестве целевого, если его трудно измерить или невозможно знать заранее. Поэтому хотелось бы получать такие «решающие» правила, чтобы для предсказания целевого признака было достаточно только измерения прогнозирующих признаков. Взаимосвязи входных и целевых признаков приведены на рисунке 4.1. Наблюдаемые данные представлены прямоугольниками, вычислительные структуры представлены овалами, сравнение наблюдений с предсказаниями обозначено шестиугольником. В обучении (вверху) решающее правило подбирается так, чтобы минимизировать разницу между предсказанными и наблюденными значениями. В тестировании (внизу) сформированное на этапе обучения правило используется для прогноза; здесь нет обратной связи с правилом.

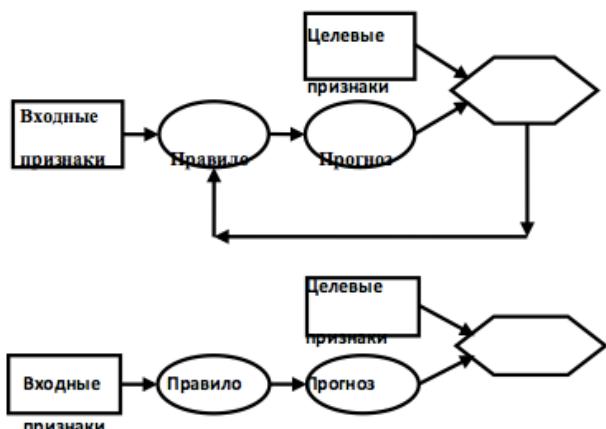


Рисунок 4.1 – Структура задачи обучения/тестирования

Примеры областей и формулировок этой проблемы:

- а) химические соединения: входные признаки – особенности молекулярной структуры, целевые признаки – виды активности, такие как токсичность или лечебные свойства;
- б) виды зерна в сельском хозяйстве: входные признаки – свойства семян, грунта и особенности погоды, целевые признаки – урожайность или содержание клейковины;
- в) промышленные предприятия: входные признаки представляют технологии, инвестиции и политику занятости населения, в то время как целевые признаки относятся к продажам и прибыли;
- г) муниципальные районы в маркетинговых исследованиях: входные признаки связаны с демографическими, социальными и экономическими характеристиками, целевые признаки – с покупательским поведением в данных районах;
- д) банковский кредит клиентам: входные признаки характеризуют демографические факторы и доход, а целевым является факт, окажется ли клиент потенциально безнадежным должником или нет;
- е) данные экспрессии (считывания) генов: входные признаки связаны с уровнем экспрессии материалов ДНК на разных стадиях болезни, а выходные признаки характеризуют уровень болезненных проявлений.

Решающее правило предсказывает значение целевого признака по значениям входных признаков. Решающее правило строится на основе подмножества объектов, на котором значения целевых признаков известны. Это подмножество часто называют обучающим. Множество объектов, на котором значения целевых признаков считаются неизвестными, используется для тестирования качества решающего правила. Идея процесса обучения заключается в том, чтобы определить такое решающее правило, которое бы минимизировало разницу между предсказанными и наблюдаемыми значениями целевого признака на обучающей выборке данных в классе допустимых решаю-

щих правил. Структура такого процесса представлена на верхней части рисунка 4.1.

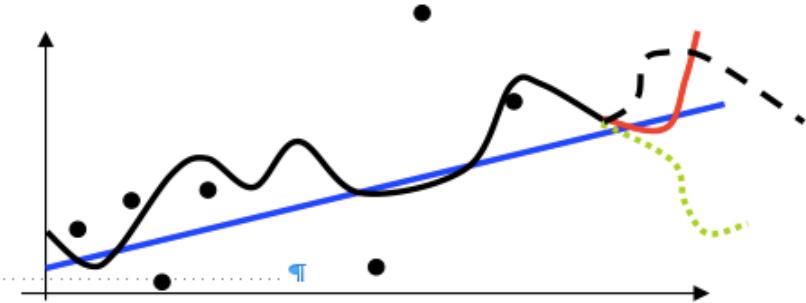


Рисунок 4.2 – Возможные графики взаимосвязи  $x$  и  $u$  по наблюденным данным (кружки)

Представление о том, что класс допустимых правил должен быть заранее задан, возникает поскольку обучающее множество является конечным. Поэтому используя достаточное количество параметров, можно «подогнать» решающее правило таким образом, чтобы ошибок на обучающем множестве не было вообще. Но, очевидно, что такое правило не сработало бы на тесте, так как подгонка захватывает все ошибки и шумы, неизбежные при сборе данных. Рассмотрим, например, задачу двумерной регрессии. На рисунке 4.2 изображены семь точек на плоскости  $(x, u)$ , соответствующие наблюденным комбинациям входного признака  $x$  и целевого признака  $u$ .

Семь точек – кружков на рисунке 4.2 могут быть точно учтены полиномом шестой степени  $u = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6$ . В самом деле, при его оценке получим семь уравнений  $u_i = p(x_i)$  ( $i=1, \dots, 7$ ), так что семь коэффициентов  $a_k$  полинома могут быть точно определены (при обычных условиях «несингулярности»). Если число наблюденных точек –  $N$ , то для точной оценки потребуется полином  $N$ -ой степени.

Однако такой многочлен не сможет предсказать значения целевого признака ни внутри, ни за пределами диапазона. Кривая может пойти в любом направлении при самых небольших изменениях в данных.

Выбор правильного вида регрессионной функции, по-видимому, должен включать в себя понятие об «обобщающей силеории», определяемой этой функцией, которая для нашего случая сводится к отношению числа наблюде-

ний к числу оцениваемых параметров: чем оно больше, тем лучше. Если это отношение относительно мало, статистики называют полученное правило избыточным или «переобученным». Избыточность обычно порождает малоинтересные (некачественные) прогнозы на вновь добавленных наблюдениях. Прямая линия не проходит ни через одну из семи точек, но выражает простую и надежную тенденцию. Следует отдать предпочтение этой прямой, поскольку она обобщает данные на более глубоком уровне: семь наблюдений обобщены здесь с использованием всего двух параметров: коэффициента наклона и свободного члена, в то время как многочлен не дает никакого обобщения, он включает в себя столько же параметров, сколько имеется объектов. Именно по этой причине в задаче построения решающих правил в первую очередь нужно выбрать класс допустимых правил. Откуда его взять? К сожалению, на данный момент нельзя дать никакого общего совета, как это можно сделать, кроме совета «посмотреть на форму графиков разброса». Без знаний о предметной области нет почвы для выбора класса решающих правил.

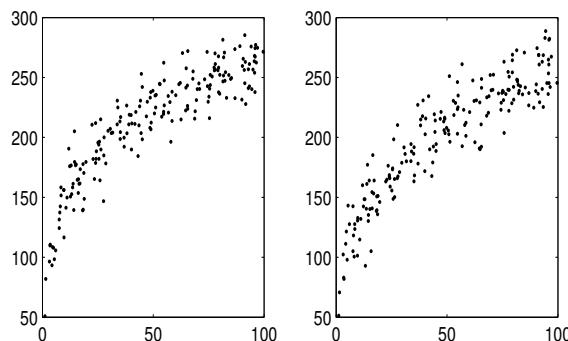


Рисунок 4.3 – Точечные значения графиков функции  $f(x)=65x^{0.3}$  (справа) и  $g(x)=50\log(x)+30$  (слева) с добавлением шума  $N(0, 15)$

Самый популярный подход – так называемая бритва Оккама. Согласно этому подходу, решающее правило должна быть простым настолько, насколько это возможно. Считается, что данный совет реализует речение британского монаха Уильяма Оккама (ок. 1285–1349): «не следует множить сущности без крайней необходимости». Обычно это интерпретируется так, что при прочих равных, простейшее объяснение считается наилучшим. Математически это выражается как «Принцип максимальной экономии», к ко-

торому обращаются, когда нет ничего лучшего. Будучи переформулирован как принцип «Минимальности длины описания», этот подход может быть осмысленно применен к проблеме оценки параметров статистических распределений (см. [44]). Несколько более широкое и, возможно, более естественное толкование бритвы Оккама было предложено в [4]. В несколько измененном виде, чтобы избежать смешения терминов в данном случае, это толкование может быть представлено так: найти допустимое решающее правило, которое объясняет наблюденные факты, используя наименьшее число свободных параметров [4, стр. 448]. Однако даже в такой форме принцип не дает никаких рекомендаций о том, как выбрать адекватную функциональную форму. Например, какая из двух функций, степенная  $f(x)=ax^b$  или логарифмическая  $g(x)=b\cdot \log(x)+a$ , более предпочтительна для суммаризации графиков на рисунке 4.3, ведь обе функции имеют два параметра  $a$  и  $b$ ?

Другие советы подобного рода относятся к так называемому принципу опровергаемости (фальсифицируемости) К. Поппера (1902–1994), который может быть выражен следующим образом: надо объяснить факты с помощью такого допустимого решающего правила, которое проще всего опровергнуть [4, стр. 451]. По идеи, для того, чтобы опровергнуть теорию, нужно привести пример, ей противоречащий. Фальсифицируемость решающего правила может быть определена в терминах так называемой *ёмкости* или ВЧ-сложности (мера сложности, разработанная В.Н. Вапником и А.С. Червоненкисом в 70-е годы прошлого века): чем ниже ёмкость, тем выше фальсифицируемость.

Проблема суммаризации, или агрегации, данных охватывает различные задачи, такие как измерение ненаблюдаемых факторов, построение кластеров, формирование аннотаций текстовых документов и пр. В отличие от задач коррелирования (см. рисунок 4.4(б)) признаки объектов здесь не разделяются на входные и выходные параметры некоторого рассматриваемого процесса. Скорее можно полагать все имеющиеся признаки данных целевыми признаками, а выделенные агрегаты – кластеры или ненаблюдаемые признаки – «скрытыми» входными признаками (см. рисунок 4.4(а)).

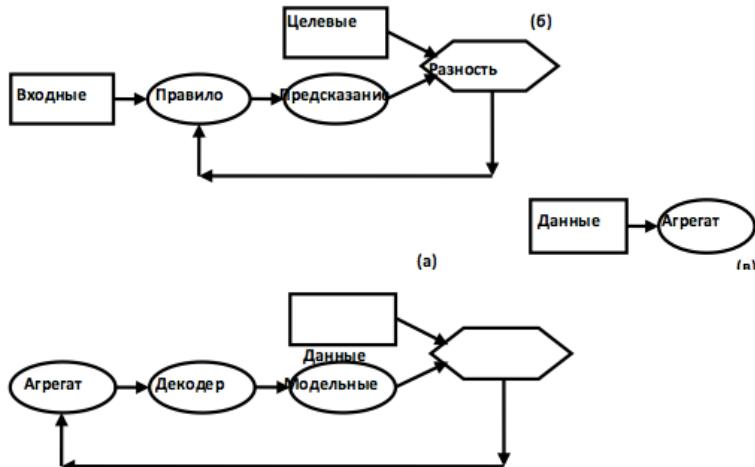


Рисунок 4.4 – Диаграмма, описывающая задачу агрегации данных с расшифровщиком (а), задачу выявления корреляции между переменными (б), и задачу агрегации данных без декодера (в). Наблюдаемые данные представлены прямоугольниками, вычислительные структуры представлены овалами, сравнение наблюдений с предсказаниями обозначено шестиугольником.

Таким образом, проблема агрегации концептуально может рассматриваться как аналог проблемы коррелирования; только надо включить правило восстановления исходных данных из их агрегированного представления. Тогда исходные данные будут играть роль целевых, а восстановленные, «модельные» данные – роль предсказания. Такой подход приводит нас к необходимости установления не одного правила, как в задачах исследования корреляции, а двух – 1) правило агрегации данных (кодировщик), 2) правило восстановления исходных данных из их агрегированного представления (расшифровщик).

В отличие от проблемы коррелирования признаков, в проблеме агрегации правило порождения исходных данных должно быть специфицировано именно для восстановления исходных данных по их агрегированному представлению, а не прогноза новых данных. Именно поэтому мы говорим о расшифровщике, а не правиле предсказания. В литературе по машинному обучению проблеме агрегации не уделяется должного внимания. Поэтому зачастую проблему агрегирования понимают упрощенно, без дальнейшего восстановления данных, как это показано на рисунке 4.4(в).

Такое осмысление структуры проблемы агрегации данных приводит к пониманию необходимости иметь обратную связь через сравнение восстановленных данных с самими исходными данными, что делает задачу агрегации похожей на задачу коррелирования (см. рисунок 4.4 (а) в сравнении с рисунком 4.4 (б)). При этом расшифровщик выступает инструментом отображения пространства агрегированных данных в пространство исходных данных. Для сравнения «целевых» данных, полученных из агрегированного представления с помощью расшифровщика, с исходными данными в пространстве исходных данных проще всего использовать критерий минимизации разницы между ними. В данном учебнике рассмотрены методы именно такого рода (рисунок 4.4 (а)), включая методы кластер-анализа, предназначенные для формирования кластеров – множеств близких друг к другу объектов.

Рассмотрим различные виды структур данных на рисунке 4.5: отчетливая структура кластеров на рисунке (а), «капля» на рисунке (б) и неопределенное «облако» на рисунке (г).

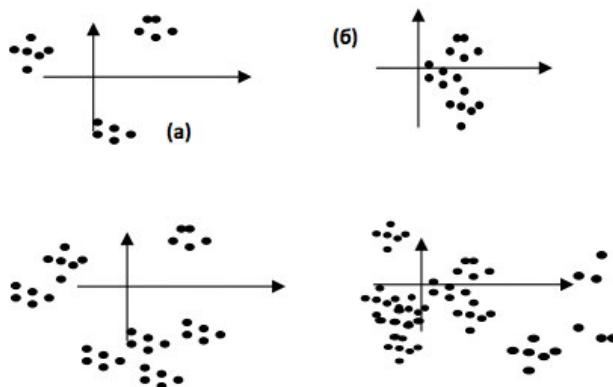


Рисунок 4.5 – Четкая структура кластеров на (а) и (в); наборы данных без четкой структуры (б) и (г)

Есть мнение, что термин «кластеризация» применяется исключительно к структурам данных, представленным на рисунках 4.5(а) и (в), хотя на рисунке (в) можно увидеть 3 или 7 кластеров в зависимости от уровня гранулярности. На рисунке 4.5(б) нет «естественных» кластеров, тогда как на рисунке 4.5(г) часть объектов организована в кластеры, а часть – нет.

Чтобы кластеры служили моделями натуральных классов и категорий, они должны быть не просто найдены, но также и концептуально объяснены. Действительно, говоря о классе как элементе какой-либо классификации, мы всегда имеем в виду двоякую структуру. С одной стороны, класс – это понятие, встроенное в соответствующий фрагмент знания (часто это называют интенсиональной интерпретацией), а с другой стороны, класс может быть представлен множеством соответствующих ему предметов реального мира (это называют экстенсиональной интерпретацией). Например, «береза» это дерево – элемент биологической таксономии, обладающий такими-то признаками. С другой стороны, объем этого понятия хорошо представлен всеми экземплярами березы, растущими в лесах, лугах, городах и пр. Подобным же образом для эмпирических классов – т.е. кластеров, эти два подхода, построение и описание, должны сосуществовать.

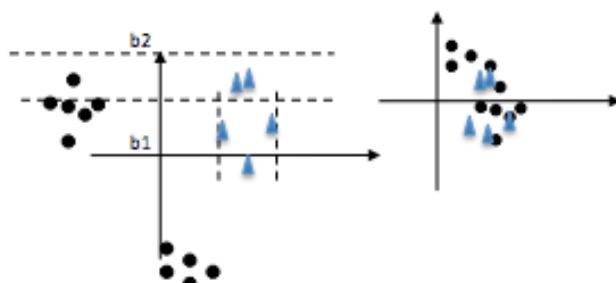


Рисунок 4.6 – Кластер, состоящий из треугольников на левом рисунке, хорошо описывается предикатом « $a1 < x < a2$  и  $b1 < y < b2$ ». Аналогичный кластер на правом рисунке не может быть хорошо описан с помощью интервальных предикатов без использования ошибок первого и второго рода.

Как показано на рисунке 4.6 слева, кластер можно описать без больших ошибок, если он отделён от остальных объектов. Использование такого подхода может быть отражено в разделении всех методов нахождения кластеров на следующие категории:

- а) кластеры получают непосредственно в терминах признаков (данний способ часто называется концептуальной кластеризацией);

- б) кластеры получают одновременно с трансформацией пространства признаков, что делает кластеры более четкими; данное направление совсем молодое и пока хорошо не изучено;
- в) сначала получают кластеры как подмножества объектов, а затем уже производят их описание – такой способ является самым распространенным в настоящее время. Мы тоже следуем этому пути.

#### 4.1.2 Цели кластер-анализа

Цели кластер-анализа:

- (А) структуризация (представление общей структуры данных);
- (Б) описание кластеров в терминах тех или иных признаков;
- (В) установление взаимосвязи между различными аспектами явлений;
- (Г) формирование обобщающих утверждений о свойствах данных и явлений;
- (Д) визуализация данных в процессах принятия решений.

Ниже представлены иллюстрации применения методов кластер-анализа для продвижения в вышеуказанных целях.

(А) структуризация (представление общей структуры данных)

А1. Структуризация деятельности (совместно с С. Насименто, Лиссабон)

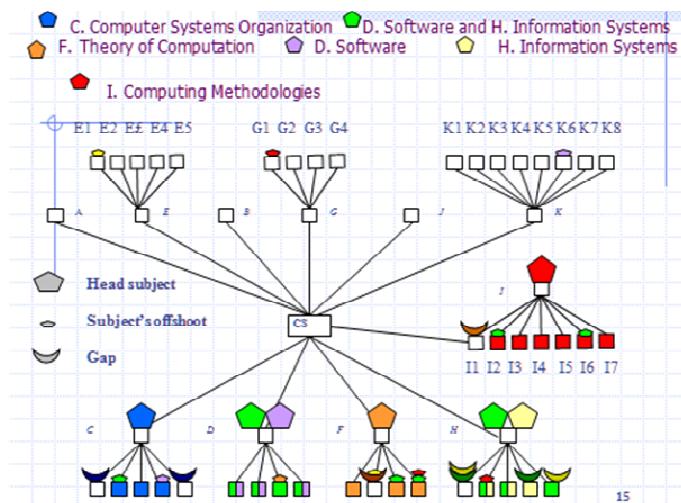


Рисунок 4.7 – Структура научной тематики работ ЦЕНТРИА, Лиссабон (в таксономии АВМ)

Данная структура научной тематики работ может быть представлена шестью кластерами тем из классификации компьютерной тематики, разработанной Ассоциацией вычислительных машин (раскрашены в разный цвет). Все кластеры попадают в свои гнезда классификации, кроме одного – зеленого. Он отображается сразу в две головные темы: Программное обеспечение и Информационные системы. Это, по идеи, обозначает какое-то исследование, ломающее границы между направлениями и, значит, несущее инновации. В данном случае, действительно, одна из крупных тем исследования – новое направление, называемое Software Engineering, не отраженное в классификации.

А2. Анализ жалоб жителей (совместно с Э. Бабкиным, Нижний Новгород)  
Сформированы кластеры писем жителей по тематике. Они отражены на  
таксономию городских служб и проблем, решаемых ими.

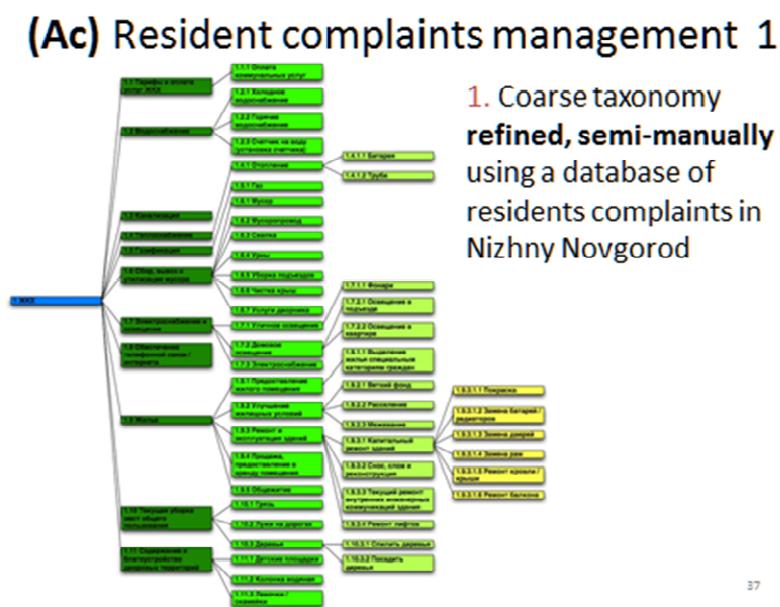


Рисунок 4.8 – Таксономия муниципальных служб

Оказалось, что кластеры писем не «ложатся» в гнезда таксономии, а скорее идут попрёк.

Вывод: кластеры потребностей не вписываются в структуру городского хозяйства. Например, при протечке крыши нужна помочь не только плотников, но и ремонт стен, и электропроводки, и т.п. Следовательно, нужны ком-

плексные «Центры услуг для горожанина», которые бы могли оперативно формировать бригады для помощи жителям. В Москве подобные центры начали создаваться и без нас.

(Б) описание кластеров в терминах тех или иных признаков

Проблема определения принадлежности нового химического соединения (совместно с Е. Колосовым и Р. Станфортом)

Чтобы применить прогностическую формулу активности того или иного соединения, нужно сначала определить, к какой группе оно относится. Пример: совокупность 14 000 химических соединений (признаки структуры):

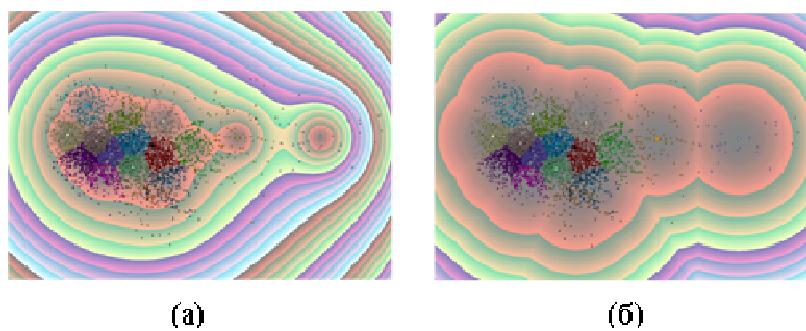


Рисунок 4.9 – Карта химических соединений, автоматически сгруппированных в кластеры (41) на (а)

(Г) формирование обобщающих утверждений о свойствах явлений

Ростовцев, Миркин, Шанин (1981): исследование заболеваний органов дыхания и их факторов риска в Академгородке г. Новосибирска. 50 000 анкет: 14 иерархических кластеров.

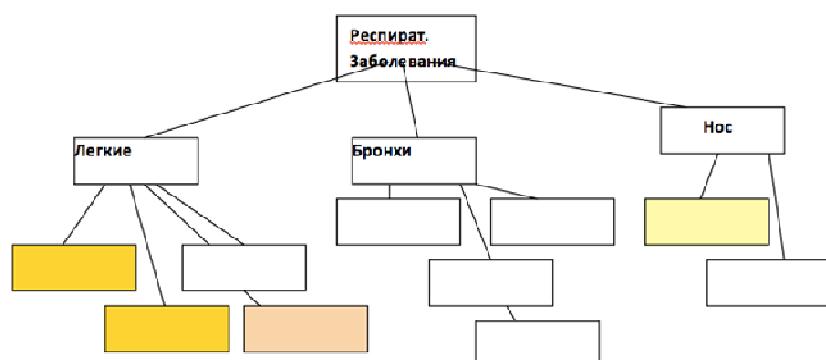


Рисунок 4.10 – Таксономия органов дыхания

Предполагавшиеся факторы риска:

- курение;
- алкоголь.

Факторы риска по полученным нами кластерам:

- наличие заболевания в семье;
- плохие жилищные условия.

Курение и Алкоголь оказались не связаны с факторами риска. К сожалению, наши выводы, ставшие сейчас общим местом, тогда были отвергнуты (1981), так как противоречили всем устоявшимся представлениям – нередкий случай, когда анализ данных оказывается бессилен.

(Д) визуализация данных в процессах принятия решений

Д1. Кластерный анализ данных по 47 районам Московской области за 1979 и 1988 позволил нам увидеть разрушение структуры факторов прироста населения, произошедшее за эти 9 лет (Панфилова, Миркин, 1990).

Д2. Выборы в Москве (В. Гурьянов, «Закон Бершидского: стоимость квадратного метра определила результаты выборов мэра», Квадратъ, №44, 16 Сентября 2013): два кластера в пространстве «стоимость жилья × % голосов за кандидата».

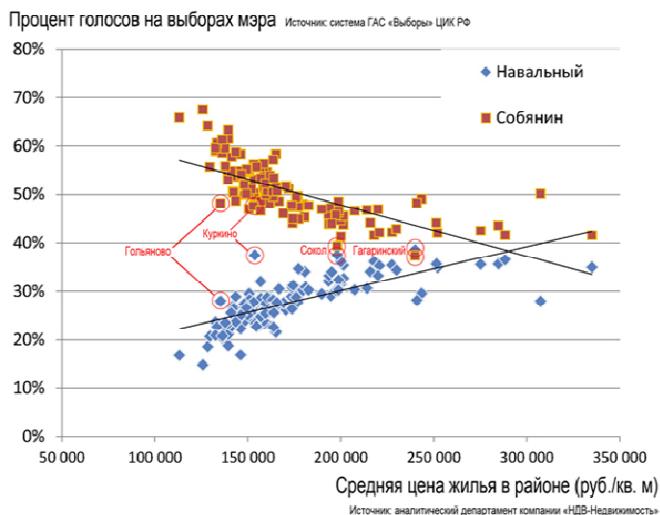


Рисунок 4.11 – Процент голосов на выборах мэра по данным ГАС «Выборы» ЦИК РФ

#### 4.1.3 Применение общих принципов для автоматизации рубрикации научных статей

В данном пункте исследуются три из вышеперечисленных целей:

(Б) описание кластеров в терминах тех или иных признаков;

(В) установление взаимосвязи между различными аспектами явлений;

(Г) формирование обобщающих утверждений о свойствах данных и явлений применительно к проблематике автоматизации анализа текстов. Конкретно, мы рассматриваем проблему автоматизации рубрикации научных статей и используем наши методологические и методические наработки для продвижения в данном направлении.

##### 4.1.3.1 Проблема категоризации текстовых документов

Разработка надёжных средств автоматизации семантического анализа текстовых материалов является одной из самых насущных задач информатики. Уровень актуальности этой проблемы не может быть переоценён из-за взрывного накопления текстовых документов в интернете. В частности, внимание многих исследователей привлекает проблема категоризации или классификации текстовых документов: для заданной коллекции текстовых доку-

ментов и заданного множества категорий, представленных текстовыми метками, требуется каждому документу приписать релевантные ему категории. Эта проблема является основой таких важных направлений информатики как извлечение/поиск информации [17], каталогизация документов [76], аннотирование текстов [14] и пр. Имеются два основных подхода к её решению: обучение с учителем и самообучение. Первоначально речь шла о том, что каждому тексту приписывается единственная категория. В последнее время всё чаще допускается многоаспектная категоризация, когда один и тот же документ может сопровождаться многими категориями (multi-label classification). В частности, нас интересует проблема рубрикации документов, таких как научные публикации, в системе рубрик, заданных таксономией соответствующей области знания или технологии. Например, публикации в сфере информатики и вычислительных процессов могут индексироваться рубриками так называемой Computing Classification System [20] – многоуровневой таксономии, разработанной международной Ассоциацией вычислительной техники, (Association for Computing Machinery (ACM)) [21]. Мы будем обозначать эту таксономию как ACM CCS. Как и многие другие классификации, она представляет собой иерархическую систему, в которой каждая рубрика является частью более общей концепции и сама, в свою очередь, делится на более конкретные части. Например, согласно ACM CCS, «майнинг данных» – это часть «приложений информационных систем», в свою очередь, содержащая такие части как «кластерный анализ» и «ассоциативные правила». В работе [28] приводятся обзор и результаты экспериментального сравнения методов многоаспектной категоризации с учителем для ситуаций, в которых категории образуют иерархическую систему, а в работе [75] подобный метод предлагается применительно к системе рубрик классификации ACM CCS.

Тематика построения систем рубрикации в режиме самообучения практически не привлекала исследователей, вероятно, потому, что не существовало адекватного аппарата. Вообще, задачи анализа данных и текстов в ре-

жиме самообучения пока решаются с значительно более низкими уровнями точности, чем аналогичные задачи в режиме обучения с учителем (см., например, [43,58,87]). Данная работа посвящена исследованию возможности использования популярного в анализе текстов инструмента – мер релевантности строка-текст – для рубрикации документов в режиме самообучения. Использование мер релевантности строк текстам в различных задачах обработки текстов насчитывает относительно долгую историю (см., например, [15,59,70]) и включает довольно развитый математический аппарат вероятностного моделирования таких мер применительно к проблематике извлечения информации [59,72]. Особенность этого подхода состоит в том, что используются только символьные последовательности и частоты их фрагментов, т.е. отсутствует какая-либо привязка к синтаксису, грамматике и семантике языка, на котором написаны тексты. С одной стороны, это определённое преимущество, так как методы, основанные на мерах релевантности, не зависят от особенностей языка и, следовательно, универсальны. С другой стороны, взятые как есть, они не могут учесть такие особенности естественного языка как наличие и использование синонимов, не говоря уже об особенностях структуры предложений.

Мы рассматриваем три основных подхода к измерению релевантности строка-текст, разработанные в международной литературе: (1) подход, основанный на векторном представлении текстов, берущий начало от самых ранних работ в области информационного поиска [18,74]; (2) подход, основанный на вероятностной модели текстов и их тематики [69]; (3) подход, основанный на представлении текстов аннотированными суффиксными деревьями [46, 69]. Мы дополняем этот последний подход оригинальной мерой релевантности, идея которой была сформулирована и описана нами в работе [15]. Эта мера отличается от других мер релевантности тем, что имеет чёткий операциональный смысл – суммарной условной вероятности символа в совпадении, в сокращённой форме, СУВСС. Цель данной статьи – подвергнуть эти меры экспериментальному сравнению.

В связи с этим следует упомянуть ещё одну инновацию данной работы – формирование относительно надёжной коллекции текстов для экспериментирования. В отличие от проблемы распознавания образов или, как её в последнее время называют, проблемы классификации, для которой имеется огромное количество данных, содержащих реальные классы объектов реального мира, в проблеме рубрикации таких «объективных» данных нет и быть не может. Любая рубрикация текстов порождена субъективными представлениями тех, кто рубрикацию выполняет. Поэтому важно, чтобы рубрикация была выполнена экспертами. В нашем случае речь идёт об аннотациях статей, опубликованных некоторыми журналами, издаваемыми вышеупомянутой Ассоциацией вычислительной техники ACM. Авторы статей в этих журналах сами выполняли рубрикацию своих статей с помощью тематических единиц таксономии ACM CCS. Мы постарались включить в эксперимент все наиболее популярные способы предобработки текстов. Для оценки результатов рубрикации мы использовали два популярных способа оценки, которые по-разному обобщают оценки точности и полноты, используемые для оценки результатов в традиционных задачах классификации, а также предложили ещё одну, в некоторых отношениях более адекватную меру. Наши эксперименты показывают существенные преимущества СУВСС по сравнению с другими мерами релевантности, хотя и оставляют желать лучшего с точки зрения достигаемого качества рубрикации.

#### 4.1.3.2 Меры релевантности

Мы рассматриваем три основных способа представления текстов: векторную модель, вероятностную модель и аннотированное суффиксное дерево АСД.

#### 4.1.3.2.1 Векторная модель

Согласно векторной модели [74], текстовый документ представляется множеством слов (или каких-нибудь других элементов документа), причём каждому слову соответствует своя координата векторного пространства. В качестве значения обычно используется величина так называемой tf-idf кодировки, равная количеству вхождений слова в документ, делённому на логарифм относительного количества документов, содержащих это слово [74]. Таким образом, текст характеризуется вектором в многомерном пространстве слов. Релевантность строки вектору определяется в векторной модели так: строка представляется вектором в том же многомерном пространстве, а релевантность определяется по сходству двух построенных векторов. В соответствии со сказанным, будем рассматривать аннотацию научной статьи и таксономическую тему как два набора термов. Терм – это слово либо в том виде, в котором оно встретилось в тексте, либо после некоторой предобработки.

Пусть  $w_{ia} = tf \times idf = tf_{ia} \times \log \frac{|A|}{n(t_i)+1}$ , где  $tf_{ia}$  – частота терма  $t_i$  в аннотации  $a$ ,  $n(t_i)$  – число аннотаций, содержащих терм  $t_i$ ,  $|A|$  – общее число аннотаций. Каждой аннотации соответствует вектор в пространстве термов. Размерность этого вектора совпадает с количеством различных термов во всех аннотациях  $N$ , а компоненты вектора – это tf-idf веса. Составим аналогичный вектор для таксономической темы с использованием tf-idf весов для термов из этой темы. Уровень релевантности таксономической темы и аннотации определяется через косинусную меру близости между соответствующими векторами. Пусть  $w_{ia}, w_{iq}$  – веса терма  $t_i$  в аннотации (abstract)  $a \in A$  и таксономической теме (topic)  $q$ . Близость между таксономической темой и аннотацией определяется по формуле:

$$\text{relevance(topic,abstract)} = \cos(\vec{q}, \vec{a}) = \frac{\vec{q} \times \vec{a}}{\|\vec{q}\| \times \|\vec{a}\|} = \frac{\sum_{i=1}^N w_{ia} \times w_{iq}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N w_{ia}} \sqrt{\sum_{i=1}^N w_{iq}}}.$$

#### 4.1.3.2.2 Вероятностная модель

Вероятностная мера релевантности построена в предположениях теоретической модели, в которой каждый текстовый документ представляется смесью двух Пуассоновских распределений [71]. Одно из них отвечает за распределение обычных слов, другое – за распределение «элитных» слов, то есть, тех, на которых лежит основная смысловая нагрузка в разрезе рассматриваемой тематики. Обычно тематика задаётся тем запросом на извлечение информации, относительно которого и оценивается релевантность. Уровень релевантности данной строки данному тексту в этой модели определяется по вероятности того, что слова, принадлежащие строке, окажутся элитными в тексте.

Так же, как и векторная модель, вероятностная модель предполагает, что аннотация (abstract) и таксономическая тема (topic) – два набора термов. Ставшая очень популярной в последнее время мера релевантности BM25 придаёт больший вес «значимым» термам и меньший – «незначимым»:

$$\text{relevance}(\text{topic}, \text{abstract}) = \sum_{i=1}^N \text{IDF}(t_i) \frac{(k_1 + 1)t f_{ia}}{t f_{ia} + k_1(1 - b + b \frac{|A|}{avgdl})},$$

где  $avgdl$  – усредненное количество слов в аннотации, а  $b$ ,  $k_1$  – константы, равные, как правило 1.5 и 0.75, соответственно, согласно [71].

В качестве нормализующего сомножителя используется функция IDF, имеющая следующий вид:  $\text{IDF}(t_i) = \log \frac{|A| - n(t_i) + 0.5}{n(t_i) + 0.5}$ , где  $|A|$  – общее число аннотаций, а  $n(t_i)$  – число аннотаций, содержащих терм  $t_i$ . Функция IDF имеет смысл обратной частоты: чем больше документов содержат данный терм, тем менее он значим.

#### 4.1.3.2.3 Модель аннотированного суффиксного дерева (АСД)

Согласно модели АСД [15,69], текстовый документ характеризуется не совокупностью слов или термов, а фрагментами – последовательностями символов в том порядке, в котором они встречаются в тексте. Каждому тако-

му фрагменту текста приписывают числовую характеристику, показывающую, какие фрагменты являются более важными в данном тексте.

Аннотированное суффиксное дерево – это структура данных, используемая для вычисления и хранения всех фрагментов текста совместно с их частотами. Она задаётся как корневое дерево, в котором каждый узел соответствует одному символу и помечен частотой того фрагмента текста, который кодирует путь от корня до данного узла.

Чтобы ограничить глубину конструируемого АСД, мы разбиваем текст на короткие фрагменты – строки, состоящие из двух – четырех слов. Алгоритм построения АСД, представляющий собой модификацию известных методов построения суффиксных деревьев [46,69], описан нами в работе [15] (рисунок 4.12). Там же приводится процедура сличения таксономической темы с АСД и экспериментально показано, что глубина дерева, построенного по строкам из 2–4 слов, вполне достаточна в задаче рубрикации научных статей в области информатики. По всей видимости, дело в том, что формулировки таксономических тем ACM CCS состоят из такого же числа слов.

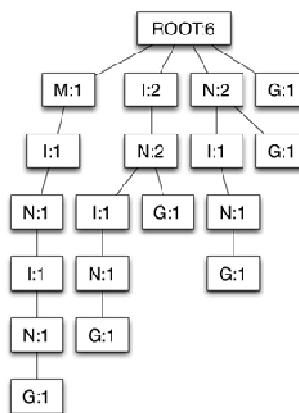


Рисунок 4.12 – Аннотированное суффиксное дерево (АСД) для строки “mining”

Каждую научную публикацию мы представляем своим АСД, с которым сличаем строки формулировок таксономических тем из таксономии ACM CCS для вычисления оценок релевантности. Оценка степени релевантности, или «присутствия» таксономической темы в данном АСД, вычисляется следующим образом:

– выделяются все суффиксы, т.е. конечные фрагменты, строки таксономической темы;

– для каждого суффикса вычисляется оценка его совпадения (match) с АСД:

$\text{score}(\text{match}(\text{suffix}, \text{ast})) = \sum_{\text{node} \in \text{match}} \varphi\left(\frac{\text{f}(\text{node})}{\text{f}(\text{parent}(\text{node}))}\right)$ , где совпадение – это путь от корня дерева, кодирующий совпадающий с ним префикс суффикса или суффикс целиком,  $\text{f}(\text{node})$  – частота, приписанная узлу АСД из совпадения,  $\text{f}(\text{parent}(\text{node}))$  – частота, приписанная родителю данного узла;

– оценка релевантности вычисляется как среднее всех оценок, приходящееся на один символ:

$$\text{relevance}(\text{topic}, \text{abstract}) = \text{SCORE}(\text{topic}, \text{ast}) = \frac{\sum_{\text{suffix}} \text{score}(\text{match}(\text{suffix}, \text{ast})) / |\text{suffix}|}{|\text{string}|},$$

где  $|\text{suffix}|$ ,  $|\text{string}|$  – количество символов в суффиксе и в строке. В этой формуле score – это шкалирующая функция, переводящая оценку совпадения в уровень релевантности. Мы рассматриваем три вида шкалирующей функции  $\varphi(x)$ , рекомендованных в [69] на основе экспериментов по категоризации электронной почты:

– линейная (обозначение – linear),  $\varphi(x) = x$ ;

– логистическая (обозначение – logit),  $\varphi(x) = \log \frac{x}{1-x} = \log(x) - \log(1-x)$ ;

– квадратный корень (обозначение – root),  $\varphi(x) = \sqrt{x}$ .

Из этих трёх только линейная, ничего не меняющая функция, имеет очевидный операциональный смысл – средней условной вероятности символа в совпадении (СУВСС); две нелинейные шкалы из [69] использованы для контроля.

Оценка релевантности строки “dine” при использовании линейной шкалирующей функции для АСД, изображенного на рисунке 4.12 (АСД), равна, согласно вышеприведённому определению:

$$\frac{\left[ \text{score(dine,ast)}/4 + \text{score(ine,ast)}/3 + \text{score(ne,ast)}/2 + \text{score(e,ast)} \right]}{4} = 0 + \frac{\phi\left(\frac{2}{6}\right) + \phi\left(\frac{2}{2}\right)}{3*4} + \frac{\phi\left(\frac{2}{6}\right)}{2*4} + 0 = \\ \frac{\frac{1}{3} + 1}{12} + \frac{\frac{1}{3}}{8} = \frac{11}{72}.$$

В больших АСД на первых уровнях располагается довольно большое число узлов с относительно высокими частотами, которые дают примерно одинаково большой вклад в оценку любой строки, накладываемой на АСД. Первый уровень характеризует частоты отдельных символов, второй – частоты упорядоченных пар символов, третий – частоты упорядоченных троек и т.д. Очевидно, что такие короткие элементы текста не могут нести особой тематической направленности. Поэтому возникает гипотеза, что вклады узлов начальных уровней АСД в оценки релевантности носят характер шума, и оценка релевантности станет более адекватной, если ее очистить от вклада узлов начальных уровней. Для проверки этой гипотезы мы обнуляли частоты узлов на первом, втором и т.д. уровнях от корня и обозначали такие способы вычисления через  $\phi(X)$ , где  $\phi$  – вид шкалирующей функции, а  $X$  – уровень в АСД, до которого обнулялись частоты. Таким образом, мы использовали три семейства моделей АСД с различными шкалирующими функциями и три способа удаления «коротких» совпадений путём насильтственного приравнивания нулю частот на начальных уровнях АСД.

Результат использования любой из рассмотренных мер релевантности применительно к данному тексту – упорядочение всех рассмотренных тематических единиц по степени релевантности между ними и текстом.

#### 4.1.3.3 Способы представления текста

Использование векторной и вероятностных моделей предполагает представление текста в виде неупорядоченного набора термов. Под термами понимаются либо слова в исходном виде, либо некоторые значимые фрагменты слов, как правило, основы, часто называемые «стемами», либо же словарные формы (леммы) слов [76]. Кроме этих двух традиционных способов представления текста, мы рассматривали способ, согласно которому в качестве

термов используются совпадения, получаемые при наложении всех ключевых словосочетаний на АСД. Понятно, что в «длинных» совпадениях фиксируется информация не только об отдельных словах, как обычно, но и об их упорядоченности, а в коротких – части слов, не учитываемые традиционными способами. Конкретные способы выбора термов из множества всех слов или всех совпадений, использованные в экспериментах, представлены в Таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Способы представления текста как совокупностей термов

Обозначение	Описание
words	Все вхождения слов в неизменённом виде.
stems	Стемы (основы) всех слов. Для выделения стемов использован стеммер Портера [70] из библиотеки NLTK [22].
coll3	Все совпадения, полученные наложением всех таксономических тем на АСД для текстов, в качестве строк которых взяты последовательные тройки слов.
coll3.4	Те из термов coll3, которые состоят из 4 и более букв.
coll3.5	Те из термов coll3, которые состоят из 5 и более букв.
coll3.6	Те из термов coll3, которые состоят из 6 и более букв.
coll3_long	Те термы из coll3, которые являются самыми длинными из совпадений соответствующей таксономической темы с АСД.
coll3_long.4	Те из термов coll3_long, которые состоят из 4 и более букв.
coll3_long.5	Те из термов coll3_long, которые состоят из 5 и более букв.
coll3_long.6	Те из термов coll3_long, которые состоят из 6 и более букв.

Символьные совпадения фрагментов таксономических тем с фрагментами аннотаций могут до некоторой степени помочь решить проблему потери порядка слов при представлении текста в виде «мешка» термов. Допустим, например, что в текстовом документе встречаются последовательно два слова так же, как в какой-нибудь таксономической теме. Если эту таксономическую тему наложить на АСД, построенное по документу, то точно получится совпадение, состоящие из двух этих слов, а также и все их фрагменты. Если же будут учитываться только вхождения отдельных слов или их стемов (основ), то связь между такими двумя словами будет потеряна. При поиске совпадений по методу АСД использовались разные способы наложения таксономических тем на АСД, построенное для данной аннотации, и различные ограничения на минимальную длину совпадения (см. Таблицу 4.1).

#### 4.1.3.4 Постановка эксперимента

Для того, чтобы поставить вычислительный эксперимент по сравнению относительных преимуществ использования различных мер релевантности в проблеме рубрикации научных публикаций, надо определить три основных составляющих такого эксперимента: (1) набор данных, на которых производится сравнение; (2) набор методов, участвующих в сравнении; (3) способ оценки качества результатов, получаемых при использовании того или иного метода. Эти составляющие описаны в нижеследующих разделах.

##### (1) Выбор данных

Данные взяты из электронной библиотеки ACM Digital Library. В этой библиотеке хранятся архивы журналов ACM. В свободном доступе находятся аннотации большей части научных статей и вспомогательные сведения, такие как ключевые слова и таксономические темы таксономии ACM CCS, приписанные авторами к научным статьям для рубрикации статей в библиотеке, т.н. авторские темы. Задача заключается в том, чтобы подобрать к каждой научной статье несколько наиболее релевантных таксономических тем.

Эксперимент проводился для коллекции данных, состоящей из трех частей: аннотаций научных статей, таксономии ACM CCS 2012, а также приписанных статьям их авторами тем из этой таксономии (см. рисунок 4.13). Эти части кратко представлены ниже.

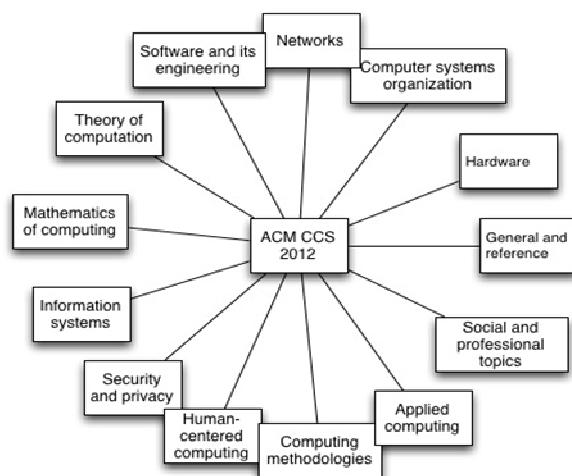


Рисунок 4.13 – Первый уровень таксономии ACM CCS 2012 [20]

1. Аннотации всех научных статей, опубликованных за период с начала 2007 года по первый квартал 2013 года включительно, в следующих журналах, размещённых на портале ACM [21]:

- ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD);
- ACM Transactions on Internet Technology (TOIT);
- ACM Transactions on Speech and Language Processing (TSLP).

Выбор журналов определялся профессиональными интересами авторов. Общее число аннотаций в данной коллекции – 244.

2. Таксономия ACM CCS 2012, состоящая из 2074 таксономических тем [20]. В таксономии ACM CCS 2012 6 уровней. На первом уровне располагается 13 основных разделов, на втором уровне – 90, на третьем – 547, на четвертом уровне находится большая часть листьев таксономии – 1074 тем. Некоторые из листьев появляются при дальнейшем дроблении тем – на пятом и шестом уровнях; но их сравнительно немного – 326 и 24.

3. Авторские темы, приписанные аннотации – это, как правило, 2–3 таксономические темы низших уровней таксономии, а также все темы, лежащие на пути от корня до них в дереве таксономии ACM CCS. Пример документа из рассматриваемого множества приведён в Таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Пример аннотации, участвующей в эксперименте, статья выбрана случайно

Discovering Knowledge-Sharing Communities in Question-Answering Forums	
Mohamed Bouguessa, Shengrui Wang, Benoit Dumoulin	
ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD), V.5, no.1, December 2010	
<p>In this article, we define a knowledge-sharing community in a question-answering forum as a set of askers and authoritative users such that, within each community, askers exhibit more homogeneous behavior in terms of their interactions with authoritative users than elsewhere. A procedure for discovering members of such a community is devised. As a case study, we focus on Yahoo! Answers, a large and diverse online question-answering service. Our contribution is twofold. First, we propose a method for automatic identification of authoritative actors in Yahoo! Answers. To this end, we estimate and then model the authority scores of participants as a mixture of gamma distributions. The number of components in the mixture is determined using the Bayesian Information Criterion (BIC), while the parameters of each component are estimated using the Expectation-Maximization (EM) algorithm. This method allows us to automatically discriminate between authoritative and nonauthoritative users. Second, we represent the forum environment as a type of transactional data such that each transaction summarizes the interaction of an asker with a specific set of authoritative users. Then, to group askers on the basis of their interactions with authoritative users, we propose a parameter-free transaction data clustering algorithm which is based on a novel criterion function. The identified clusters correspond to the communities that we aim to discover. To evaluate the suitability of our clustering algorithm, we conduct a series of experiments on both synthetic data and public real-life data. Finally, we put our approach to work using data from Yahoo! Answers which represent users activities over one full year.</p>	
Таксономические темы ACM CCS, приписанные автором (авторские темы)	
Human-centered computing	Information systems
Human computer interaction (HCI)	Information systems applications
Interaction paradigms	Data mining
Web-based interaction	

Отметим, что авторы статьи, представленной в Таблице 4.2, в своей рубрикации предпочли оттенить взаимодействие человека и компьютера как её основной сюжет. На наш взгляд, это не очень согласуется с содержанием аннотации. Согласно аннотации, статья представляет собой скорее упражнение в применении вероятностной модели кластер-анализа для выявления сообществ на основе информации с сайтов, пользователи которых задают вопросы и получают ответы от других пользователей. Термины “cluster” и “clustering” 6 раз участвуют в различных подразделениях таксономии ACM CCS, но никак не отражены в авторской рубрикации. Подобные нюансы интерпретации должны учитываться при оценке систем автоматической рубрикации.

## (2) Выбор мер релевантности

В качестве мер оценки релевантности таксономической темы и аннотации научной статьи, берутся популярные меры, рассмотренные ранее:

- косинусная мера близости на векторах tf–idf в векторной модели релевантности;
- мера релевантности BM25 в вероятностной модели релевантности;
- мера средней условной вероятности символа в совпадении, основанная на АСД, с тремя шкалирующими функциями.

Эти меры перечислены в Таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Обозначения рассматриваемых мер релевантности

Обозначение	Мера релевантности
cosine	косинусная мера релевантности
okapibm25	мера релевантности BM25
ast.linear	мера СУВСС с линейной шкалирующей функцией
ast.logit	мера СУВСС с логистической шкалирующей функцией
ast.root	мера СУВСС со шкалирующей функцией в виде квадратного корня

### (3) Оценка качества результатов

Зная авторские таксономические темы, можно оценить, насколько корректными получились упорядоченные списки таксономических тем, получаемые в результате применения той или иной меры релевантности. Мы использовали для оценки результатов две популярные характеристики точности: MAP (Mean Average Precision) и nDCG (normalized discounted cumulative gain) [59]. Они часто используются в тех вычислительных экспериментах и разработках, в которых возникает задача оценки качества ранжирований, например, при разработке рекомендательных систем [27] или систем извлечения новостей [45]. Другое приложение этим мерам – в работах по обучению ранжированию (learning to rank) [38,86]. В этих работах MAP и nDCG используются в качестве оптимизируемого критерия в ходе обучения. Меры MAP и nDCG применимы и для целей данной работы, так как результаты использования той или иной меры релевантности тоже ранжированы по значению этой меры. Для вычисления этих характеристик может использоваться следующая общая схема отбора таксономических тем:

- таксономические темы ранжируются по убыванию их релевантности;
- отбираются первые  $k$  (топ  $k$ ) таксономические темы, отсекая все остальные;
- вычисляется оценка получившегося ранжирования.

Мера MAP может быть представлена следующим образом:

$$\text{AveP} = \frac{\sum_{k=1}^n P(k) \times \text{rel}(k)}{|relevant\_topics|}, \quad \text{MAP} = \frac{\sum_{a \in abstracts} \text{AveP}(a)}{|abstracts|},$$

где  $P(k)$  – точность на уровне  $k$  в упорядоченном по убыванию меры релевантности списке таксономических тем,  $\text{rel}(k)$  – бинарный показатель, принимающий значение 1, если  $k$ -тая таксономическая тема в списке является авторской, и 0 в обратном случае,  $|relevant\_topics|$  – число авторских таксономических тем,  $n$  – количество рассматриваемых таксономических единиц из топа списка. Здесь AveP – средняя точность – рассчитывается для каждого текста рассматриваемого множества. Мера MAP имеет смысл средней точности, нормализованной по всем аннотациям.

Мера nDCG – это отношение оценки полученного ранжирования к оценке идеального случая:  $nDCG_k = \frac{DCG_k}{IDCG_k}$ , где  $DCG_k = \text{rel}(1) + \sum_{i=2}^k \frac{\text{rel}(i)}{\log_2 i}$  – количество авторских таксономических тем среди топ  $k$  таксономических тем, нормированное на их место в ранжировании,  $IDCG_k = \text{rel}(1) + \sum_{i=2}^{|relevant\_topics|} \frac{1}{\log_2 i}$  – значение DCG у идеального ранжирования. Как предложено в [83], меру nDCG можно усреднять, что мы и делаем, чтобы получить общее значение nDCG для всех 244 рассматриваемых научных статей.

Мы выбрали  $k = 15$  для MAP и nDCG, что заведомо больше числа авторских таксономических тем.

Кроме мер MAP и nDCG, мы использовали также собственную меру оценки полученных результатов, имеющую простой операциональный смысл – количество публикаций, у которых авторские темы попали в топ  $k$  ранжированных таксономических тем. Другими словами, подсчитывается число авторских тем, попавших в топ  $k$ . Будем обозначать эту меру через  $I_k$

(Intersection at k). Данная мера удобна тем, что позволяет легко отделить «хорошие» публикации – те, для которых удалось восстановить все или почти все авторские темы – от «трудных», для которых авторские темы находятся в конце соответствующего ранжирования, а также позволяет определить оптимальный порог отсечения  $k$ , т. е. число таксономических тем, которые могут быть использованы для рубрикации конкретной публикации.

В принципе, меры MAP и nDCG тоже позволяют устанавливать пороговые значения, но они имеют значительно менее интуитивных характер, чем пороговые значения, которые определяются мерой  $I_k$ .

#### 4.1.3.5 Результаты эксперимента

Полученные ранжирования тем оценивались по 6 характеристикам релевантности: четыре значения  $I_k$ , количество попаданий авторских тем в топ  $k$ , при  $k = 1, 5, 10, 15$ , а также меры MAP и nDCG при  $k=15$ . Эти оценки используются для сравнения, во-первых, рассматриваемых мер релевантности, во-вторых, рассматриваемых способов предобработки текстов. Результаты оценки сведены в Таблицы 4.4 – 4.6, соответствующие различным мерам релевантности – косинусной (Таблица 4.4), BM25 (Таблица 4.5) и СУБСС (Таблица 4.6).

Таблица 4.4 – Оценка полученных при использовании различных способов предобработки текстов результатов с помощью косинусной меры релевантности

Способ предобработки слов	Количество попаданий авторских тем в топ $k$				MAP_15	nDCG_15
	$I_1$	$I_5$	$I_{10}$	$I_{15}$		
Words	10	44	60	73	0.0748	0.0245
Stems	8	37	57	77	0.0788	0.0250
coll3	14	41	58	76	0.0911	0.0278
coll3.4	14	31	46	59	0.0727	0.0207
coll3.5	9	31	50	71	0.0642	0.0237
coll3.6	12	31	45	57	0.0633	0.0218
coll3_long	8	32	48	60	0.0599	0.0187
coll3_long.4	7	22	41	56	0.0570	0.0182
coll3_long.5	7	12	51	65	0.0643	0.0208
coll3_long.6	8	32	46	53	0.0444	0.0158

Таблица 4.4 показывает, что косинусная мера в целом работает лучше всего на совпадениях из coll3 (полный список). Этот факт подтверждается как значениями MAP\_15 и nDCG\_15, так и значением меры  $I_k$  при всех рассматриваемых  $k$ . Однако различия с результатами на словах и основах (word и stem) не так уж и значительны. Более того, последние в отдельных случаях могут даже дать несколько лучшие результаты.

Таблица 4.5 выявляет двух победителей, одного при  $k=1, 5$ , а другого – при  $k=10, 15$ . В первом случае побеждает использование основ (stems), как по СУВСС, так и по MAP\_15. Во втором случае слова (words) – наилучшие как по СУВСС, так и nDCG\_15. Вместе с тем, нельзя не отметить, что все результаты использования меры BM25 хуже, чем соответствующие результаты использования косинуса. Особенно чётко это проявляется по оценкам  $I_k$ .

Таблица 4.6 показывает, что, как и ожидалось, нешкалированная, т.е. линейная, СУВСС является наилучшей по всем рассматриваемым критериям, причём наилучшие результаты достигаются на первом уровне «очистки». Под уровнем очистки понимается тот ярус АСД, начиная с которого частоты считаются шумом и не учитываются при вычислениях.

Использование логистической шкалирующей функции даёт значительно худшие результаты. В то же время извлечение квадратного корня практически не ухудшает качества получаемых ранжирований.

Таблица 4.5 – Оценка полученных при использовании различных способов предобработки текстов результатов с помощью меры релевантности BM25

Способ предобработки слов	Количество попаданий авторских тем в топ $k$				MAP_15	nDCG_15
	$I_1$	$I_5$	$I_{10}$	$I_{15}$		
Words	1	14	40	52	0.0631	0.0279
Stems	7	21	30	36	0.0869	0.0259
coll3	3	15	30	46	0.0524	0.0224
coll3.4	4	13	28	45	0.0532	0.0212
coll3.5	4	16	29	46	0.0577	0.0228
coll3.6	4	17	30	43	0.0547	0.0214
coll3_long	2	12	26	37	0.0446	0.0188
coll3_long.4	3	11	27	42	0.0482	0.0199
coll3_long.5	3	14	27	46	0.0540	0.0223
coll3_long.6	3	17	28	46	0.0528	0.0217

Сравнение Таблиц 4.4, 4.5, 4.6 показывает, что использование меры СУВСС, основанной на методе АСД, приводит к результатам, значительно превосходящим те, которые получаются при использовании других мер. Например, использование СУВСС порождает ранжирования, в которых на первое место попадает 35–39 авторских тем, тогда как использование косинуса и BM25 приводят максимум к 14 и 7 авторским темам на первых местах, соответственно. Значения традиционных критериев, MAP\_15 и nDCG\_15, для СУВСС ранжирований превышают значения, достигнутые на ранжированиях по косинусной мере и BM25, в 4–5 раз.

При этом гипотеза о том, что очистка меры от коротких, двух- и трехбуквенных сегментов текста улучшит результаты, не подтвердилась. Только однобуквенные сегменты оказались неинформативны.

Таблица 4.6 – Оценка полученных результатов при использовании меры релевантности, основанной на АСД, при использовании различных видов шкалирующих функций

Вид шкалирующей функции и глубина очистки	Количество попаданий авторских тем в топ k				MAP_15	nDCG_15
	I_1	I_5	I_10	I_15		
linear.0	38	75	84	102	0.3588	0.1124
linear.1	35	77	89	105	0.3550	0.1133
linear.2	35	75	88	103	0.3486	0.1120
linear.3	34	70	90	105	0.3192	0.1020
linear.4	33	68	88	105	0.3059	0.0978
root.0	39	75	88	102	0.3657	0.1125
root.1	36	77	91	104	0.3561	0.1122
root.2	34	77	89	106	0.3497	0.1126
root.3	34	72	90	105	0.3232	0.1030
root.4	32	66	88	105	0.3064	0.0983
logit.0	7	36	48	57	0.1214	0.0450
logit.1	4	18	26	33	0.0521	0.0216
logit.2	6	29	46	56	0.0780	0.0335
logit.3	8	24	42	58	0.0850	0.0348
logit.4	8	37	54	64	0.1201	0.0482

Сравнение мер релевантности в разрезе критерия  $I_k$  при разных  $k$  можно проводить графически, используя то, что можно назвать кривыми попадания, т.е. кривые или ломаные, соединяющие значения меры при различных  $k$  от 1

до 15 на координатной плоскости ( $k$ ,  $I_k$ ). Чем выше кривая попадания, тем точнее и лучше использованная мера релевантности (рисунок 4.14).

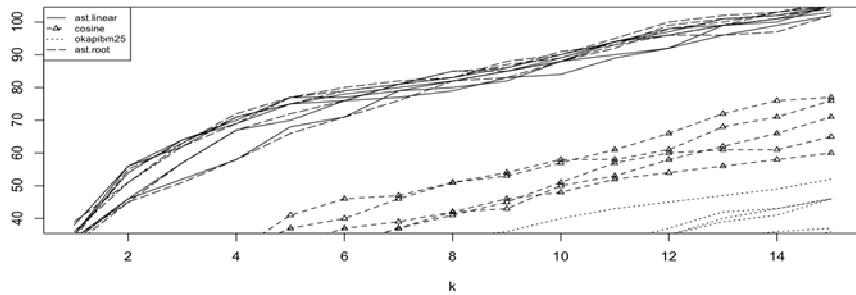


Рисунок 4.14 – Сравнение кривых попадания при использовании 4-х семейств мер релевантности: ast.linear, ast.root, cosine и okapibm25

Сравнение кривых попаданий позволяет убедиться, что кривые, соответствующие семействам мер релевантности `ast.linear` и `ast.root`, побеждают косинусную меру близости и меру близости BM 25, вне зависимости от того, какие параметры использованы. Из двух традиционных же мер релевантности косинусная мера оказывается более эффективной, чем мера BM25.

То же видно и при сравнении лучших значений критерииов MAP и nDCG (см. рисунки 4.15 и 4.16).

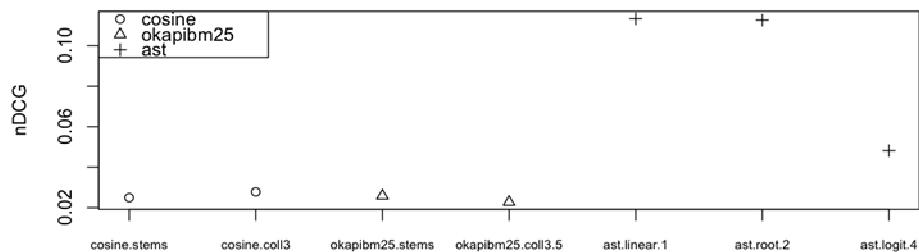


Рисунок 4.15 – Сравнение значений MAP при использовании разных мер релевантности

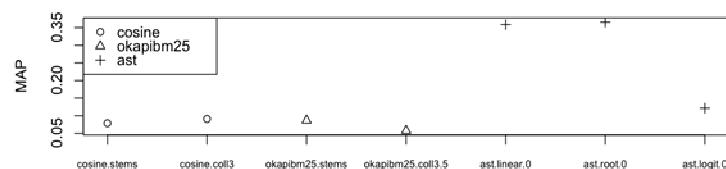


Рисунок 4.16 – Сравнение средних значений nDCG при использовании разных мер релевантности

Замечание 4.1. Так как данная проблема относится к области интерпретации ментальных, а не реальных объектов, то существенное значение приобретает адекватность эмпирического материала. Разметка множества публикаций тематическими единицами какой-либо иерархической классификации – непростое и не очень понятное дело. По нашему мнению, в качестве эмпирического материала лучше брать разметку, сделанную заинтересованными специалистами, чем заинтересованными дилетантами (см., например, использование DMOZ, иерархической системы вебсайтов, разработанной добровольцами в [28]). Именно поэтому мы выбрали статьи, опубликованные в журналах, издаваемых наиболее авторитетной организацией в области информатики, ACM, и размеченные авторами согласно ACM CCS, классификации, разработанной именно этой организацией. В этом плане мы в какой-то мере следовали работе [75], в которой тоже использовалась ACM CCS, хотя и в значительно более ранней версии 1998 г. Однако в работе [75] выбор публикаций и их рубрик оказался в какой-то мере случайным, так что подавляющая часть отобранных документов оказалась помеченной только одной рубрикой или вообще не помеченной: менее чем 10% выбранных текстов оказались пригодными для рубрикации. Наше множество текстов выбрано по-другому. Они все имеют иерархическую рубрикацию, присписанную самими авторами. Тем не менее, даже «при всём при том» рубрикации этой коллекции не могут не вызывать вопросов, как отмечено в комментарии к Таблице 4.2.

#### 4.1.4 Некоторые выводы

Мы использовали оценку релевантности строка-документ как основной механизм автоматизации рубрикации документов строками из заранее заданного списка в режиме самообучения. Было проведено сравнение трёх различных подходов к измерению релевантности: (а) косинусная мера векторной модели, (б) популярная мера вероятности порождения рубрик в рамках веро-

ятностной модели, (в) средняя условная вероятность символа в совпадающих частях рубрики и текста на основе модели аннотированного суффиксного дерева. Оказалось, что предложенная нами мера (в) с большим отрывом пре- восходит две другие, более популярные меры, по крайней мере, в задаче рубрикации. Аппарат АСД оказывается наилучшим и в других задачах, таких как категоризация [69]. Проверка гипотезы о том, что короткие, одно-, двух- и трех-буквенные сегменты текста не вносят полезного вклада в качество рубрикации, оказалась верна только в той части, которая относится к однобуквенным сегментам. Конечно, абсолютный уровень достигнутой точности остаётся относительно низким, что характерно и для других задач анализа текстов в режиме самообучения [40,43,87].

Однако ситуация представляется не безнадёжной. Предполагается в дальнейшем исследовать два пути дальнейшего развития. Первый – учёт синонимических отношений при оценке релевантности строки-текст. Этот путь связан с необходимостью представления тематических единиц не одним словосочетанием, как сейчас, но множеством синонимичных словосочетаний, которые должны учитываться при сличении с АСД текста и, тем более, при оценке релевантности. Второй путь связан с возможным приспособлением латентного семантического анализа (ЛСА, LSA) [32] и/или аппарата латентных распределений Дирихле (ЛРД, LDA) [24,25] для вывода новых мер релевантности, основанных на многопараметрическом погружении пар строки-текст [84]. В настоящее время эти методы используются только для рубрикации (multi-label classification) с помощью элементов самих анализируемых текстов; следует их адаптировать к условиям задачи рубрикации текстов с помощью внешней системы рубрикации.

Результаты этого подраздела нашли отражение в работах [8,19,29,65–67]:

1. Черняк Е.Л., Миркин Б.Г. Использование ресурсов Интернета для построения таксономии// Сб. докладов конференции АИСТ 2013, с.36–49.

2. Дубов М.С., Черняк Е.Л. Аннотированные суффиксные деревья: особенность реализации// Сб. докладов конференции АИСТ 2013, с.49–58.
3. Chernyak E., Mirkin B. Computationally refining of a russian-language taxonomy using Wikipedia// Сб. докладов международной конференции по компьютерной лингвистике «Диалог», 2013, с.177–186.
4. Mirkin B.G., Shestakoff A. Least squares consensus clustering: criteria, methods, experiments// Lecture Notes in Computer Science, 7814 Springer, 2013, pp.764–768.
5. Mirkin B. Methods for Interpretation of Data in Medical Informatics// Advances in Intelligent Analysis of Medical Data and Decision Support Systems, Studies in Computational Intelligence, 473, 2013, pp.15–22.
6. Mirkin B. G. Individual approximate clusters: methods, properties, applications// Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing. Issue 8170: Lecture Notes in Artificial Intelligence. Heidelberg: Springer, 2013. pp.26–37.

#### 4.2 Исследования по кластерному анализу социально-экономических данных

В данном подразделе отчета приведены результаты исследований по кластерному анализу социально-экономических данных.

При исследовании систем, в которых человеческий фактор является определяющим, традиционные или (как их теперь чаще называют) жёсткие математические модели оказываются мало адекватными. Поэтому кластерный анализ, т.е. выбор нескольких групп похожих в определённом смысле объектов из рассматриваемого множества, является одним из наиболее подходящих инструментов исследования в подобных слабо структуризованных ситуациях. В задачах классификации обычно требуется также, чтобы выделенные кластеры образовывали разбиение исходного множества, однако отказ от этого требования представляется более реалистичным. В предлагаемом подходе может быть получено как полное разбиение, так и отдельные кластеры;

это не задаётся заранее, а определяется в процессе реализации алгоритма в зависимости от самих данных. В качестве одного из ответов возможно указание на полное отсутствие кластеров.

Неформальный характер кластерного анализа, его различные модификации, утверждения и приложения, многочисленные подходы и методы решения подробно описаны во многих публикациях и обзорах [2,39,42,57,62–64].

Основное внимание в данной работе сфокусировано на формализации, точном определении и алгоритмах подсчёта важного свойства подмножеств заданного множества объектов, которое описывает их стабильность, точность, значимость – по сути дела, целесообразность их выбора в качестве кластеров. Это свойство названо волатильностью. Волатильность определена как для отдельных кандидатов в кластеры, так и всей рассматриваемой задачи кластерного анализа заданного множества.

Пример 4.1. Приведём пример, дающий некоторое неформальное представление о волатильности. Кластеры с различной волатильностью показаны на рисунке 4.17. На рисунках 4.17а и 4.17б три рассматриваемых совпадающих кластера имеют волатильность 0, несмотря на то, что выделение кластеров на рисунке 4.17б представляется более трудным, чем на рисунке 4.17а. Кластеры, показанные на рисунке 4.17с, имеют различную волатильность. Интуитивно кластер 1 имеет ту же волатильность 0, кластер 2 имеет некоторую небольшую волатильность, а волатильность кластера 3 больше, чем кластера 2. Наконец, на рисунке 4.17д кластер 3 практически исчезает (его волатильность близка к максимально возможному уровню 1), в то время как кластеры 1 и 2 остаются такими же, как на рисунке 4.17с.

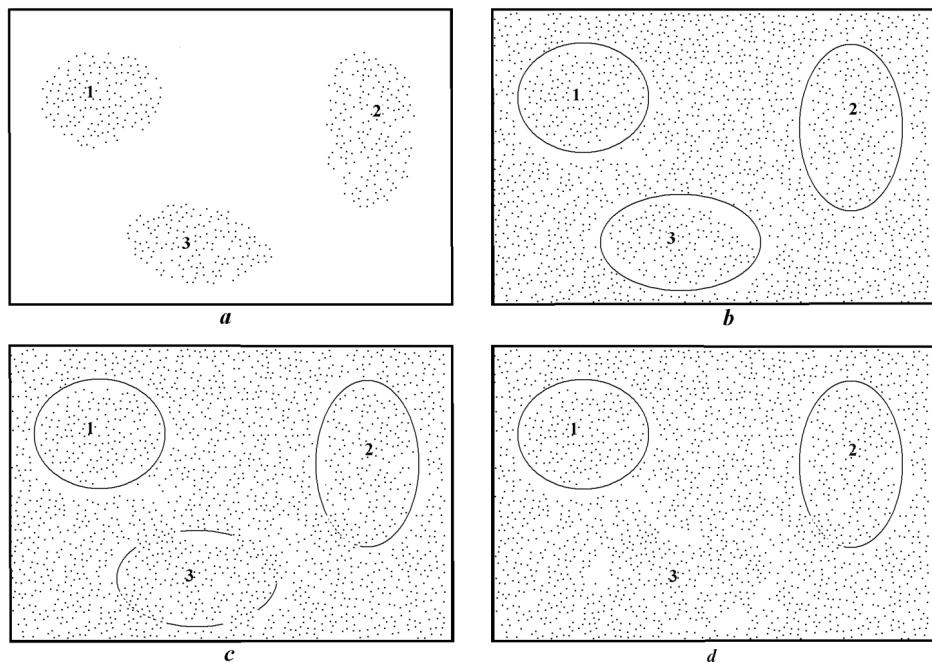


Рисунок 4.17 – Интуитивное представление о волатильности

Обычно понятия волатильности, устойчивости и т.д. связаны с изменением рассматриваемых систем во времени. Однако в предложенном подходе это не так. Волатильность определена для фиксированной задачи классификации. Суть дела в том, что разработанный алгоритм выделения кластеров, как и некоторые другие алгоритмы, состоит из повторяющихся рандомизированных шагов. На каждом шаге строится семейство подмножеств (кандидатов в кластеры). Чёткие кластеры с нулевой волатильностью, выделенные на каждом шаге, полностью совпадают друг с другом. Менее чёткие кластеры на разных шагах могут слегка отличаться друг от друга и/или вообще отсутствовать (на некоторых шагах). Эти соображения позволяют сформулировать простой формальный алгоритм вычисления волатильности каждого кластера. Волатильность всей классификации определяется как взвешенная сумма волатильностей найденных кластеров. Алгоритм подробно описан в пункте 3.

Представляется, что высокий уровень волатильности соответствует трудности задач классификации, и осознание этой зависимости и приводит к новому алгоритму. Алгоритм находит кластеры с произвольным уровнем волатильности (включая обычный случай нулевой волатильности), что позволяет ему справляться как с «трудными», так и с «лёгкими» (в указанном

смысле) задачами. Более того, допустимый уровень волатильности является одним из очень немногих параметров алгоритма. Он же является единственным, который определяется человеческим решением, что является само по себе неожиданно в столь плохо структуризованных ситуациях.

Цель исследования состоит в разработке нового алгоритма кластерного анализа, удовлетворяющего следующим требованиям:

- результаты кластеризации не противоречат интуитивно ясным ответам в разнообразных двумерных случаях;
- не делается никаких предположений относительно исходного множества объектов геометрического, вероятностного и любого другого характера;
- число кластеров определяется только в процессе выполнения алгоритма;
- в алгоритм входит очень мало параметров с ясным объяснением;
- человеческое решение (если оно необходимо) делается только на заключительной стадии алгоритма.

Рассматриваемое формальное представление задач кластеризации и структура предложенного алгоритма описаны в пункте 1. Предложенный алгоритм дихотомии описан в пункте 2. Построение упомянутого семейства множеств – кандидатов в кластеры, повторяющееся на каждой внешней итерации алгоритма, описано в пункте 3. Окончательное выделение кластеров, сопровождаемое вычислением их волатильности, описано в пункте 4. Результаты применение предложенного алгоритма кластеризации для модельных и реальных данных описано в пункте 5. Наконец, сравнение с другими алгоритмами дано в пункте 6.

#### 4.2.1 Структура алгоритма

В предложенном подходе исходные данные о близости вариантов представлены в хорошо известном виде графа соседства (см., например, [57]). Суть дела в том, что для каждого объекта  $a$  несколько (4–5) ближайших объектов считаются близкими к  $a$ . Соответствующие вершины соединены в гра-

фе соседства ребром. Близость объектов определяется по исходному описанию: данной матрице схожести / несхожести, матрице «объект-свойства» и другими способами.

После построения графа соседства в алгоритме используется только информация, заключённая в этом графе. Никакие другие сведения (в частности, о точных расстояниях между исходными объектами) далее не используются. Конечно, обоснованием такого подхода к представлению данных для кластерного анализа (как и к самому алгоритму) могут служить только экспериментальные результаты. Тем не менее, можно сказать, что модель графа соседства является одной из самых «мягких» моделей, и ей можно пользоваться, когда для каждого объекта каким-то образом (например, экспертным) указано несколько наиболее похожих на него объектов без каких-либо точных значений расстояния.

Другим преимуществом такого представления является расширение потенциальной области применения. В рамках рассматриваемого подхода оказывается и задача о декомпозиции произвольных неориентированных графов, которая сама по себе является важной в теоретическом и практическом отношении.

Алгоритм представляет собой трёхуровневую процедуру. На внешнем уровне по семействам множеств-кандидатов в кластеры, найденных при каждом из  $r$  прогонов процедуры дивизимно-агломеративного кластерного алгоритма (далее ДАК-алгоритма) строятся финальные кластеры. Алгоритм построения финальных кластеров описан в пункте 4.

Построение семейства кандидатов в кластеры ДАК-алгоритмом представляет собой промежуточный уровень предложенной трёхуровневой процедуры. Подробное описание ДАК-алгоритма даётся в пункте 3.

Сам ДАК-алгоритм основан на новом алгоритме дихотомии графов, рассмотренном в пункте 2. Алгоритм дихотомии многократно применяется при реализации ДАК-алгоритма; он представляет собой внутренний уровень общей трёхуровневой процедуры. Этот алгоритм является новой модификацией

частотного подхода к кластерному анализу, предложенному в статье [41]. Как и некоторые другие алгоритмы, включающие спектральные (см. [57]), он также даёт некоторую аппроксимацию решения Ratio-cut задачи о разрезе с лучшим делением (Ratio-cut problem), рассмотренной далее в пункте 2. В отличие от упомянутых там подходов, предложенный алгоритм позволяет выявить недостатки дихотомий, полученных не только приближённым, но и точным решением данной *NP*-полной задачи. Однако в рамках ДАК-алгоритма на промежуточном уровне даже очевидно «неправильные» дихотомии приводят к правильным классификациям, а их построение не требует точного решения указанной *NP*-полной задачи. Эти два уровня (внутренний и промежуточный) были описаны в препринте [72]. Использование внешнего уровня и понятия волатильности оказалось связанным с реальными задачами классификации социально-экономических данных, которые не всегда укладываются в описанную в цитированной работе двухуровневую схему.

#### 4.2.2 Новый частотный алгоритм дихотомии

##### 4.2.2.1 Алгоритм Жирвана–Ньюмана

В 2002 в статье «Структура сообществ в социальных и биологических сетях» [41] был предложен принципиально новый подход к декомпозиции графов и тем самым – к задаче автоматической классификации. Некоторый разрез исходного графа находится в результате выполнения определённых операций без предварительных оптимизационных или других требований к этому разрезу.

Изложим суть дела, цитируя эту работу. «Определим степень промежуточности ребра как число всех кратчайших путей между парами вершин, которые проходят по данному ребру. Если для некоторой пары вершин есть несколько кратчайших путей, проходящих по данному ребру, то кратчайший путь считается один раз. Если в сети имеются непересекающиеся подмножества вершин (группы или сообщества), связанные небольшим количеством

рёбер, то все кратчайшие пути между вершинами из этих групп должны проходить по одному из этих немногих рёбер. Таким образом, рёбра, соединяющие различные группы, имеют значительно большую степень промежуточности. Удаление таких рёбер приводит к отделению групп друг от друга, и, следовательно, к выявлению искомой структуры сообществ».

Формальный алгоритм выделения групп в цитируемой статье описан следующим образом (алгоритм Жирвана–Ньюмана):

- 1) вычислить степень промежуточности для всех рёбер сети;
- 2) удалить ребро с максимальной степенью промежуточности;
- 3) пересчитать степени промежуточности для всех рёбер получившейся сети;
- 4) повторять шаги, начиная со 2-го, пока не будут удалены все рёбра.

Понятно, что в процессе работы данного алгоритма каждое увеличение (на 1) числа компонент связности сети означает разделение одной группы на две части, т.е. в результате получается иерархическая структура групп (или сообществ), определяемая только исходной сетью. Вычисление степени промежуточности сводится к нахождению кратчайших путей для всех пар вершин, что является, как хорошо известно, вычислительно эффективной операцией с верхней оценкой  $n^2$ .

В дальнейшем (см. [67]) было предложено несколько модификаций этого подхода, из которых наиболее важными являются следующие:

- использование случайных путей (вместо кратчайших) для определения степени промежуточности рёбер;
- использование не всех, а сравнительно небольшой части пар вершин для оценки степени промежуточности рёбер;
- удаление рёбер на основании указанной оценки.

В этой связи оказывается вместо термина «степень промежуточности» будет удобно использовать термин «частота в ребре», имея в виду число вхождений ребра в построенные пути. В результате алгоритм деления сети на две части можно описать следующим образом:

Обобщённый алгоритм Жирвана–Ньюмана;

- 1) положить текущую частоту в каждом ребре равной нулю;
- 2) выбрать случайно две вершины сети;
- 3) найти некоторым способом путь между найденными на предыдущем шаге вершинами; если такой путь не существует, перейти к 7;
- 4) добавить к частотам всех рёбер, вошедших в найденный на шаге 3 путь, по единице;
- 5) при выполнении определённых условий переходим к следующему шагу 6; в противном случае возвращаемся к шагу 2; например, к указанным условиям можно отнести достижение достаточно большого числа прохождений шагов 2 – 4 или же достижение стохастической стабильности, когда номера рёбер с максимальной частотой достаточно давно не меняются (очевидна возможность различных реализаций этого шага);
- 6) удалить ребро с максимальной частотой и перейти к шагу 1;
- 7) остановка. Сеть разбита на две компоненты связности, которые и соответствуют искомым группам.

Рассмотренный выше подход естественно назвать частотным, поскольку он основан на подсчёте частот, с которой рёбра графа входят в последовательно строящиеся пути. Он может быть применён к общей задаче кластерного анализа, как только она будет представлена графом, в частности, вышеупомянутым графом соседства. Очевидный недостаток алгоритма Ньюмана и Жирвана (указанный его авторами), состоит в том, что после удаления одного ребра с максимальной частотой на шаге 2 вся накопленная ранее статистика по степени промежуточности рёбер уничтожается, и следовательно, никак не используется в дальнейшем. Если бы эту информацию удалось сохранить для последующих шагов, это могло бы значительно ускорить алгоритм. По этому поводу в уже упомянутой статье [41] говорится следующее. «Пытаясь сократить время вычислений, можно попытаться посчитать степени промежуточности всех рёбер только однажды и затем удалять их в порядке убыва-

ния этой степени. Оказывается, что эта стратегия не работоспособна, потому что если две группы соединены более чем одним ребром, то нет гарантии, что все эти рёбра будут иметь высокую степень промежуточности – известно только, что хотя бы одно из них будет её иметь. Пересчитывая степени промежуточности после каждого удаления одного ребра, мы уверены, что по крайней одно из оставшихся рёбер между двумя группами всегда будет иметь высокую степень. Можно добавить, что то же самое относится и к обобщённому алгоритму Ньюмана–Жирвана. Тем не менее, в следующем пункте показано, как избежать этой ловушки.

#### 4.2.2.2 Алгоритм построения равномерного разреза

Заметим, что в ранее предлагавшихся частотных алгоритмах пути, соединяющие очередную пару вершин, проводятся независимо от предыдущих путей. Однако учёт всех ранее проведённых путей позволяет получать разрезы между двумя группами вершин, в которых все рёбра имеют одинаковую максимальную частоту. Тогда одновременное и однократное удаление всех рёбер с максимальной частотой определяет искомую дихотомию графа.

Начнём с изложения самого алгоритма, затем дадим необходимые комментарии и приведём примеры его работы в разных ситуациях. Хотя алгоритм и относится к частотным алгоритмам классификации, имеющиеся существенные отличия позволяют считать его новым. Важно также, что, в отличие от ранее известных вариантов частотных алгоритмов, он реализует приближённое решение некоторой оптимизационной задачи на графике, выражающей разумное (хотя, как и в других случаях, неполное) представление о правильности классификации (подробнее см. в комментариях в конце этого пункта).

##### Частотный минимаксный алгоритм дихотомии.

Входом алгоритма является неориентированный связный график  $G$ . Параметрами алгоритма являются два целых числа:

- максимальное начальное значение частоты  $f$ ;
- число повторений для набора статистики  $T$ .

1. Предварительный этап. В каждом ребре графа задаётся начальное значение частоты – равномерно распределённое случайное целое число в пределах от 0 до  $f - 1$  включительно.

2. Накопительный этап. Операции шагов 2.1 – 2.3 повторяются  $T$  раз.

2.1. Случайный выбор пары вершин сети.

2.2. Нахождение минимаксного пути (пути, в котором максимальная длина ребра минимальна) между выбранными на шаге 2.1 вершинами алгоритмом Дейкстры. Длинами рёбер считаются текущие накопленные значения частот.

2.3. Модификация частот. Прибавляется единица к предыдущим значениям частот во всех рёбрах найденного на шаге 2.2 пути.

3. Заключительный этап.

3.1. Запоминается число  $f_{\max}$  – максимальное значение частоты в рёбрах сети.

3.2. Выполняются операции шагов 2.1 – 2.3 один раз.

3.3. Находится число  $f_{\text{mod}}$  – новое максимальное значение частоты в рёбрах сети.

3.4. Если  $f_{\text{mod}} = f_{\max}$ , возвращаемся на шаг 3.2. Иначе переходим на шаг 3.5.

3.5. Вычитаем единицу из значений частот во всех рёбрах последнего найденного пути.

3.6. Удаляем все рёбра, в которых частота совпадает с  $f_{\max}$ .

3.7. Находим две компоненты связности получившейся сети. Эти компоненты и представляют собой решение задачи дихотомии.

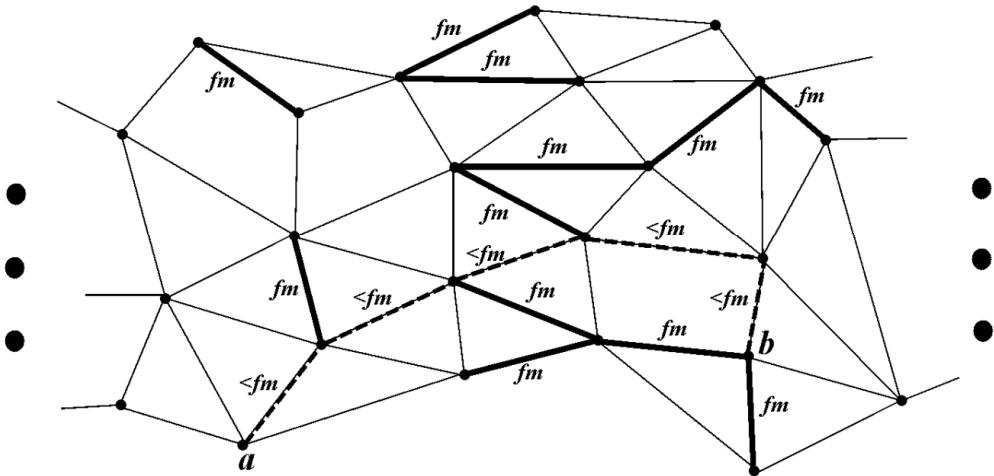


Рисунок 4.18 – Штриховой линией показан путь, соединяющий вершины  $a$  и  $b$ , во всех рёбрах которого частота меньше максимальной частоты  $f_m$

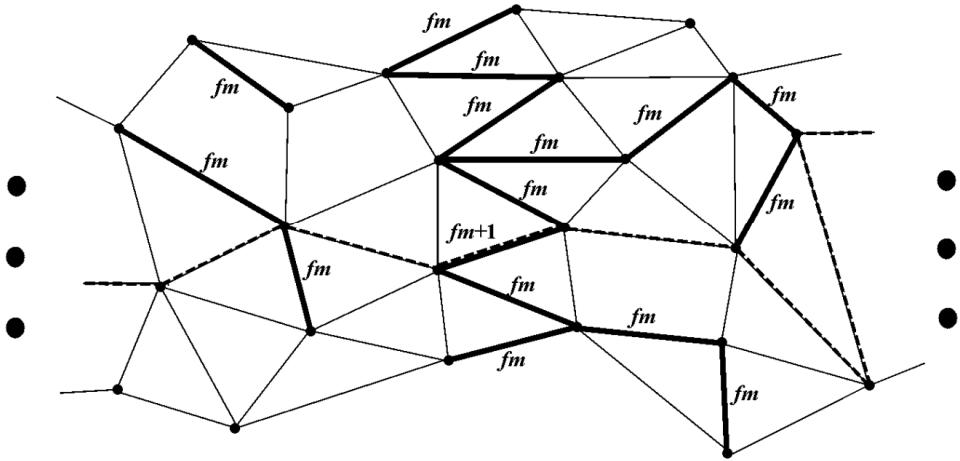


Рис. 4.19 – Штриховой линией показан путь, соединяющий две вершины, находящиеся по разные стороны от разреза, во всех рёбрах которого частоты равны максимальной; такой путь обязательно пройдёт по ребру с максимальной частотой  $f_m$

Рисунки 4.18 и 4.19 иллюстрируют случаи, когда существует минимаксный путь, соединяющий выбранные на шаге 2.1 вершины, в каждом ребре которого частота меньше  $f_{\max}$  и когда такого пути не существует соответственно. Сам разрез, конечно, зависит от способа выбора пар вершин и распределения частот в рёбрах графа, сложившееся перед выполнением пункта 3.1. Именно поэтому и проводится накопительный этап (занимающий большую часть времени). В результате этого этапа искомый разрез стабилизируется – в том смысле, что образующие его рёбра перестают зависеть от числа  $T$  по-

строенных минимаксных путей. Однако этот разрез может зависеть от инициализации случайного датчика. Оказывается, что наличие (или отсутствие) зависимости разреза (и, следовательно, определяемой им дихотомии) от инициализации случайного датчика является важной характеристикой самой задачи, а не используемого метода. Подробнее это будет рассмотрено ниже.

Рассмотрим связь между предложенным алгоритмом и известными оптимизационными постановками поиска сбалансированного разреза в графе. Введём необходимые обозначения. Пусть  $N$  – число вершин графа,  $M$  – число прохождений шагов 2.1 – 2.3 на 2-м и 3-ем этапе предложенного алгоритма (кроме последнего прохождения),  $A$  и  $B$  – любое разбиение вершин графа,  $d(A, B)$  – число рёбер в разрезе, отделяющем  $A$  от  $B$ . Заметим, что  $M$  равно общему числу построенных путей в графе и  $M \geq T$ .

Рассмотрим все пути (из числа найденных), у которых один конец содержиться в  $A$ , а другой конец – в  $B$ . Тогда сумма  $S(A, B)$  всех частот в разрезе  $(A, B)$  не меньше, чем число этих путей (обозначаемое далее через  $M(A, B)$ ). Во-первых, каждый путь увеличивает сумму частот по крайней мере на единицу (если он пересекает разрез ровно один раз, а ведь некоторые пути могут пересекать его несколько раз); во-вторых, нужно добавить начальные значения частот (см. предварительный шаг алгоритма). Поскольку вершины выбираются случайно, то вероятность того, что один конец пути лежит в  $A$ , а другой – в  $B$ , примерно равна  $(2 \cdot |A| \cdot |B|)/N^2$ . Поэтому для общего числа таких путей имеет место примерное равенство

$$M(A, B) \approx ((2 \cdot |A| \cdot |B|)/N^2) \cdot M. \quad (4.1)$$

Допустим (для получения грубой оценки), что каждый путь из  $A$  в  $B$  пересекает разрез  $(A, B)$  ровно один раз. Поскольку число путей  $M$  заметно пре-восходит максимальное возможное значение начальных частот  $f$ , можно напи-сать достаточно грубую оценку

$$S(A, B) \approx ((2 \cdot |A| \cdot |B|)/N^2) M. \quad (4.2)$$

Разделив обе части этого равенства на число дуг разреза, получаем

$$\bar{f}(A, B) = S(A, B)/d(A, B) \approx (((2 \cdot |A| \cdot |B|)/N^2) M)/d(A, B), \quad (4.3)$$

где через  $\bar{f}(A, B)$  обозначена средняя частота в ребре из разреза  $(A, B)$ .

Очень важно то, что предложенный алгоритм находит такой разрез  $(A^*, B^*)$ , в котором частоты всех рёбер максимальны. Это значит, что для любого другого разреза  $(A, B)$

$$\bar{f}(A, B) \leq \bar{f}(A^*, B^*). \quad (4.4)$$

Формулы (4.4) и (4.3) вместе означают, что разрез  $(A^*, B^*)$  максимизирует (конечно, приближённо, с учётом сделанных допущений) выражение  $((((2 \cdot |A| \cdot |B|)/N^2) M)/d(A, B)$  на множестве всех разрезов исходного графа. «Убирая» из последнего выражения общие для всех разрезов константы 2,  $N$  и  $M$ , получаем следующее выражение, зависящее от произвольного разреза  $(A, B)$  исходного графа:

$$D(A, B) = \frac{|A| \times |B|}{d(A, B)}. \quad (4.5)$$

Назовём функцию  $D(A, B)$  декомпозиционной функцией графа. Проведённые рассуждения позволяют сделать следующий «правдоподобный» содержательный вывод. Разрез  $(A, B)$ , найденный предложенным алгоритмом, приближённо максимизирует декомпозиционную функцию (4.5) рассматриваемого графа. Тот факт, что в некоторых случаях этот разрез зависит от инициализации случайного датчика (и уже поэтому не может строго максимизировать функцию (4.5), определяемую только самим графом), как раз и отражает приближённый характер решения данной оптимизационной задачи. Соответствующие примеры приведены в следующем пункте.

В уже цитированном обзоре [57], рассмотрена задача минимизации

$$R(A, B) = d(A, B) \times \left( \frac{1}{|A|} + \frac{1}{|B|} \right) \rightarrow \min, \quad (4.6)$$

называемая RatioCut Problem. Непосредственное сравнение формул (4.5) и (4.6) сразу показывает, что задача минимизации (на множестве всех разрезов графа) функции  $R(A, B)$  и задача максимизации (на том же множестве) функ-

ции  $D(A, B)$  эквивалентны. Тем самым предложенный алгоритм является весьма эффективным (в экспериментальном плане) приближённым методом решения той же RatioCut Problem, для которой используются спектральные и ядерные (kernel) методы. Однако основной вопрос, связанный с данной  $NP$ -полной оптимизационной задачей, состоит не в поиске её приближённых решений, а в том, насколько функции  $D$  или  $R$  адекватны задачам декомпозиции графа соседства, или, точнее, насколько её приближённая максимизация предложенным минимаксным алгоритмом позволяет находить интуитивно правильные дихотомии. Естественно, этот вопрос является содержательным и ответ на него может быть дан только примерами.

#### 4.2.2.3 Примеры дихотомий, построенных минимаксным алгоритмом

Пример 4.2. Дихотомии, полученные предложенным минимаксным алгоритмом для шести различных двумерных множеств, представлены на рисунке 4.20. На нём, как и на последующих рисунках, представляющих результаты классификации, оставлены только те рёбра, которые соединяют вершины, попавшие в разные классы; условная линия, пересекающие эти рёбра, разделяет найденные классы. Сам же алгоритм дихотомии относит каждую точку к одному из двух классов. Во всех шести случаях не только использовалась одна и та же программа, но и немногие изменяемые параметры были одними и теми же:  $f = 10$ ,  $T = 1000$ . При других  $f$  и  $T$  результаты были теми же самыми. Они не зависят и от начального значения случного датчика. Во всех случаях результаты не противоречат интуитивному представлению о правильности классификации, которое в данном случае не вызывает сомнений.

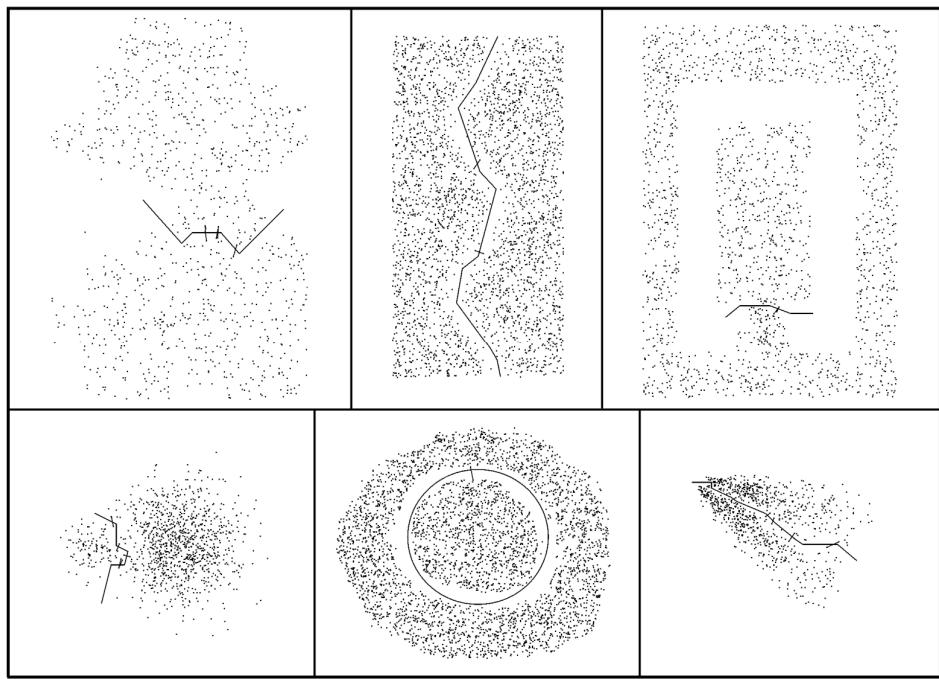


Рисунок 4.20 – Решение шести простых двумерных задач классификации

Однако так бывает не всегда, что инициировало разработку описываемого в следующем разделе ДАК-алгоритма, в котором предложенный метод дихотомии используется в качестве основного шага на дивизионном этапе (см. пункт 3). Для объяснения необходимости более глубокого анализа рассмотрим следующий пример.

Пример 4.3. Рассматриваются два двумерных множества, показанные на рисунке 4.21а и 4.21с. Результат дихотомии для множества рисунка 4.21а показан на рисунке 4.21б. Как и во всех 6 случаях, показанных на рисунке 4.20, он не зависит от инициализации случайного датчика. Найденный минимаксным алгоритмом разрез максимизирует декомпозиционную функцию (4.5) на множестве всех разрезов графа соседства и определяет интуитивно верную классификацию на два класса. Естественно, этот же разрез минимизирует функцию (4.6).

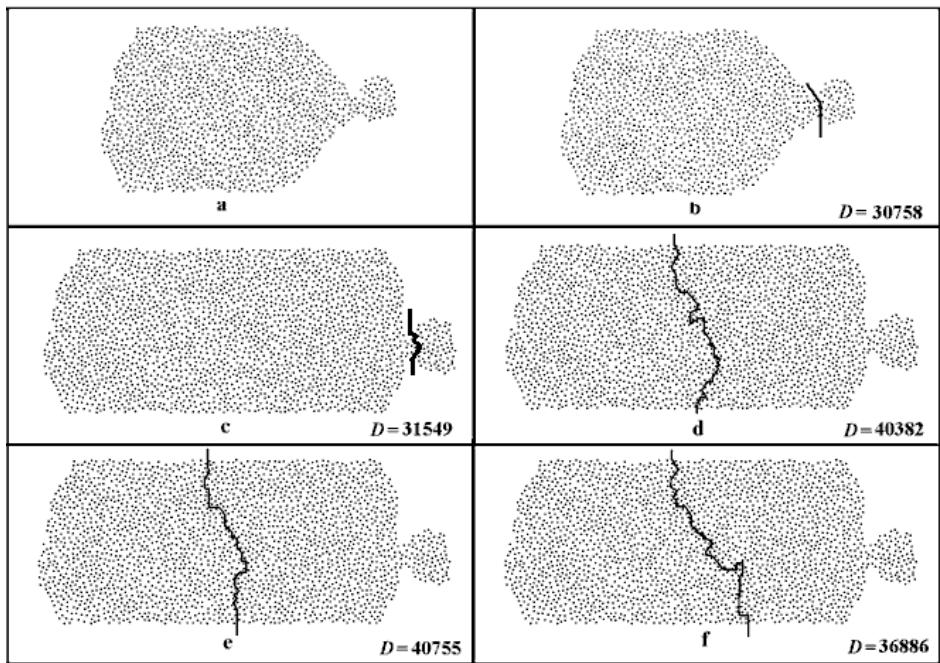


Рисунок 4.21 – Другие примеры дихотомии

В то же время при использовании того же самого алгоритма для похожего множества, показанного на рисунке 4.21b, результат заметно зависит от инициализации случайного датчика, как это видно на рисунках 4.21d, 4.21e и 4.21f. Во всех этих случаях найденное решение не совпадает с интуитивно очевидным. Наконец, значение декомпозиционной функции для «правильного» разреза равно 31549, а для неверного разреза, найденного минимаксным алгоритмом и показанного на рисунке 4.21d, эта функция равна 40382. В других двух случаях эта функция также существенно больше, чем её значение на правильном разрезе. Причём речь идёт о точных, а не приближённых значениях декомпозиционной функции. Как уже говорилось, всё то же самое относится и к минимизации критерия RatioCut. Это ещё раз говорит о той осторожности, с которой надо относиться к достаточно популярным критериям сбалансированности (как и ко многим другим формальным моделям классификации).

Причина неудачи критерия (4.5) (и эквивалентного ему критерия (4.6)) в рассматриваемом случае вполне понятна. Отношение максимального и минимального числа точек, принадлежащих «правильным» классам, в примере рисунке 4.21d существенно больше, чем в примере рисунка 4.21a и во всех

примерах рисунка 4.20. Поэтому произведение числа точек  $|A| \times |B|$ , являющееся числителем в (4.5), настолько мало по отношению к произведению мощностей подмножеств, близких к половине исходного множества, что это уже не компенсируется знаменателем, равным сравнительно небольшому числу рёбер в «правильном» разрезе. То же самое относится (и даже в большей степени, поскольку проявляется при меньшем отношении мощностей) к другим частотным алгоритмам дихотомии.

Принимая во внимание результаты десятков вычислительных экспериментов с различными данными, приходим к следующим неформальным выводам:

- известный RatioCut (и, следовательно, аппроксимирующие его спектральные и ядерные методы) могут давать неверные результаты во многих относительно простых случаях;
- все стохастически устойчивые дихотомии, найденные предложенным минимаксным алгоритмом, интуитивно правильны и максимизируют критерий (4.5);
- все стохастически неустойчивые дихотомии, найденные предложенным минимаксным алгоритмом, интуитивно неправильны, а числовые значения критерия (4.1) превосходят значения на «правильном» разрезе.

Однако само понятие устойчивости не является точно определённым. Между очевидно устойчивыми и очевидно неустойчивыми ситуациями есть «серая зона» слабой нестабильности. Подобно многим ситуациям такого типа, встречающимся во многих разделах чистой и прикладной математики, такие промежуточные ситуации в некотором смысле неизбежны, а всё самое интересное и важное происходит именно в таких промежуточных зонах. Реальные примеры в пункте 5 показывают, что такие явления действительно встречаются в кластерном анализе, что не только инициирует, но и в некотором смысле оправдывает разработку предложенного подхода к задачам классификации, не только объясняющего, но и использующего в алгоритмах нестабильность кластеров.

#### 4.2.3 Дивизимно-агломеративный кластерный алгоритм

Пример 4.4. Желание сохранить сильные свойства предложенного метода дихотомии и избавиться от указанной слабости естественно приводит к рассмотрению последовательных дихотомий. Использование того же алгоритма для максимального (по числу точек) из двух классов, показанных на рисунке 4.21d, даёт деление на три класса, показанное на рисунке 4.22. Если теперь объединить два самых больших из этих трёх классов, то получится как раз правильная классификация.

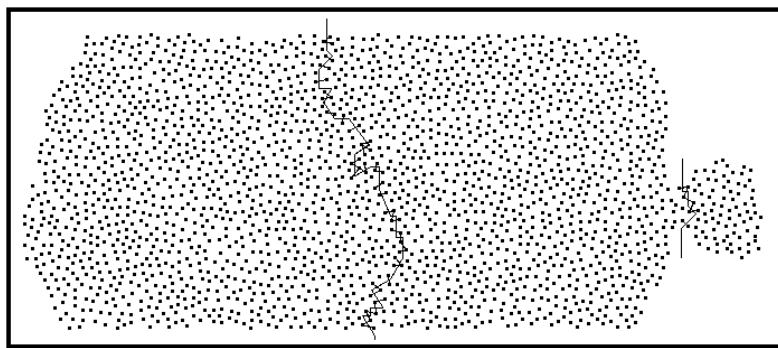


Рисунок 4.22 – Результат двух последовательных дихотомий

В настоящем разделе описывается ДАК-алгоритм промежуточного этапа (см. пункт 1). Его блок-схема показана на рисунке 4.23. Входом алгоритма является исходный неориентированный граф. Выход алгоритма будет определён далее. Единственным параметром ДАК-алгоритма является максимальное число  $K$  частей, на которые делится исходное множество на дивизимном этапе.



Рисунок 4.23 – Блок-схема ДАК-алгоритма

Рассмотрим этапы блок-схемы рисунка 4.23 по отдельности.

1. **ДИВИЗИМНЫЙ ЭТАП.** Исходный граф последовательно делится на две подграфа минимаксным алгоритмом дихотомии, описанным в пункте 2.

Для деления на каждом шаге выбирается тот из уже построенных графов, у которого число вершин максимально (а при равенстве – тот, который был построен раньше). На  $i$ -ом шаге получается классификация исходного множества на  $(i+1)$  класс ( $i = 1, \dots, K-1$ ). Выходом этапа является семейство вложенных классификаций  $D = (D_2, D_3, \dots, D_K)$  на  $2, 3, \dots, K$  классов.

**2. АГЛОМЕРАТИВНЫЙ ЭТАП.** Каждая из классификаций  $D_j$  на  $j$  классов определяет подсемейство классификаций: на  $j$  классов (сама  $D_j$ ), на  $(j-1)$  классов (полученная из  $D_j$  путём объединения двух подграфов, связанных максимальным числом рёбер); и т.д., в соответствии с обычной агломеративной схемой (последовательно соединяя подграфы, связанные максимальным числом рёбер), вплоть до классификации на два класса. Обозначим полученные классификации через  $C_j^j, C_{j-1}^j, \dots, C_2^j$  и представим их все следующим образом:

$$\begin{array}{c} C_2^2, C_2^3, \dots, C_2^{k-1}, C_2^k \\ C_3^3, C_3^4, \dots, C_3^k \\ \dots\dots\dots \\ C_{k-1}^{k-1}, C_{k-1}^k \\ C_k^k \end{array}$$

Все классификации, расположенные в 1-ой строке, являются классификациями на 2 класса, во 2-ой строке – на 3 класса, и т.д., вплоть до последней строки, содержащей единственную классификацию  $C_k^k$  на  $K$  классов. Все указанные в приведённом списке классификации образуют выход агломеративного этапа.

**3. ЭТАП ВЫДЕЛЕНИЯ МНОЖЕСТВ.** Все различные множества, вошедшие хотя бы в одну из найденных выше классификаций, образуют выход ДАК-алгоритма, т.е. всего промежуточного уровня трёхуровневой схемы. Заметим, что этих множеств будет не так уж много: по построению, все они либо совпадают с классами единственной классификации  $C_k^k$  на  $K$  классов, либо являются объединениями некоторых из этих классов. Нетрудно понять, что число всех таких множеств не может быть очень велико: самая грубая

оценка даёт  $K^3 / 4$ , но эксперименты показывают, что их обычно гораздо меньше.

Пример 4.5. Рассмотрим множество точек, показанное на рисунке 4.24а. Применим к этому множеству (точнее, к графу соседства, полученному соединением каждой точки ребром с 4-мя ближайшими точками) ДАК-алгоритм. Положим  $K = 4$ .

1. Дивизимный этап. Последовательные дихотомии показаны на рисунках 4.24b – 4.24d.

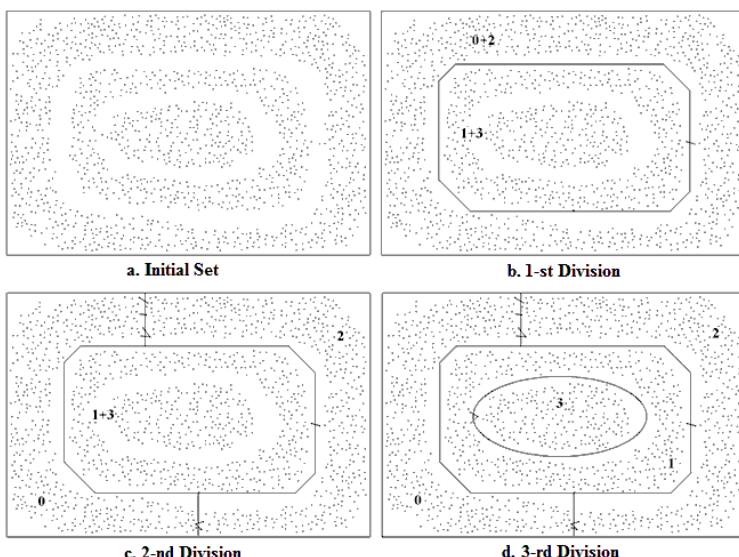


Рисунок 4.24 – Последовательные дихотомии

На рисунке, как и ранее, показаны только рёбра, концы которых принадлежат разным кластерам. Матрица, элементы которой равны числу рёбер, соединяющих соответствующие подграфы, представлены в Таблице 4.7.

Таблица 4.7 – Матрица, элементы которой равны числу рёбер, соединяющих соответствующие подграфы

	0	1	2	3
0	*	0	7	0
1	0	*	1	2
2	7	1	*	0
3	0	2	0	*

В соответствии с алгоритмом дивизимного этапа получаем следующие вложенные классификации:  $D_2 = \{0+2, 1+3\}$ ,  $D_3 = \{0, 2, 1+3\}$ ,  $D_4 = \{0, 2, 1, 3\}$ .

2. Агломеративный этап. В соответствии с алгоритмом определим классы  $C_i^j$  ( $j = 2, 3, 4; i = 2, \dots, j$ ), объединяя множества с наибольшим числом соединяющих их рёбер (см. Таблицу 4.7). Получаем из  $D_4$  классификации  $C_4^4 = D_4 = \{0, 2, 1, 3\}$ ,  $C_3^4 = \{0+2, 1, 3\}$  (так как множества 0 и 2 соединены максимальным числом рёбер, равным 7),  $C_2^4 = \{0+2, 1+3\}$  (соединены одним ребром. Далее, получаем из  $D_3$  классификацию  $C_3^3 = D_3 = \{0, 2, 1+3\}$  и классификацию  $C_2^3 = \{0+2, 1+3\}$  (опять максимальное число 7 рёбер, соединяющих множества 0 и 2). Наконец, имеем  $C_2^2 = D_2 = \{0+2, 1+3\}$ .

Таким образом, выходом агломеративного этапа являются следующие 6 классификаций:  $\{0+2, 1+3\}$ ,  $\{0+2, 1+3\}$ ,  $\{0, 2, 1+3\}$ ,  $\{0+2, 1+3\}$ ,  $\{0+2, 1, 3\}$ ,  $\{0, 2, 1, 3\}$ . Заметим, что среди них есть и единственная «правильная» классификация  $C_3^4 = \{0+2, 1, 3\}$ , которая не была получена на дивизионном этапе, но найдена на агломеративном этапе. Она отдельно показана на рисунке 4.25.

3. Этап выделения множеств. Различными множествами, входящими в построенные 6 классификаций, являются следующие 6 множеств: 0, 1, 2, 3,  $0+2$ ,  $1+3$ . Кластерами в правильной классификации  $\{0+2, 1, 3\}$  являются входящие в этот перечень множества 0+2, 1 и 3. Построение правильных кластеров в общем случае осуществляется на внешнем уровне предложенной трёхуровневой процедуры. Операции, выполняемые на этом уровне, описаны в следующем пункте 4.

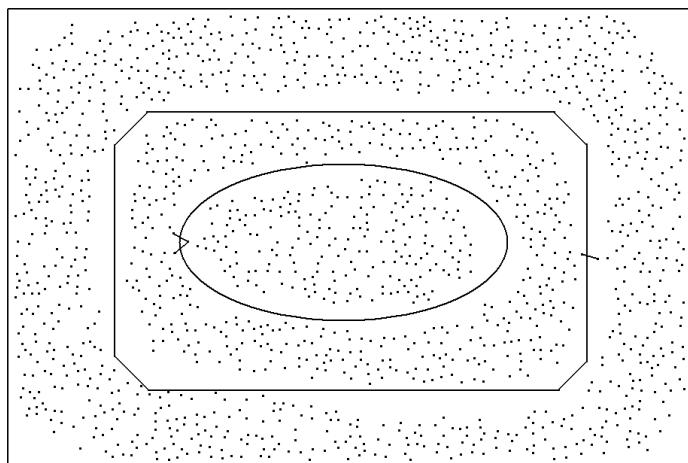


Рисунок 4.25 – Правильная классификация  $C_3^4$

#### 4.2.4 Алгоритм построения кластеров

Обозначим через  $r$  число прогонов ДАК-алгоритма. Поскольку на каждом прогоне используются случайные числа (например, для выбора последовательных пар вершин в минимаксном алгоритме построения равномерного разреза), на каждом прогоне выходом ДАК-алгоритма будут, вообще говоря, различные множества, хотя многие из них в достаточно простых случаях будут совпадать. Забегая вперёд, скажем, что в рассмотренной в примере 4.5 ситуации при всех прогонах алгоритма множества 1, 3, 0+2 и 1+3 будут полностью совпадать, а множества 0 и 2 будут от прогону к прогону отличаться. Степень совпадения множеств (далее точно определяемая) и послужит основой для алгоритма построения финальных кластеров.

Введём необходимые понятия и обозначения. Обозначим через  $U_i$  множество всех потенциальных кластеров, найденных при  $i$ -ом прогоне ДАК-алгоритма. Для краткости будем называть просто кластерами.

Пусть  $F$  – произвольное семейство кластеров, принадлежащих различным множествам  $U_i$ . Представим  $F$  в следующем виде:

$$F = \langle F_{i_1}, \dots, F_{i_d} \rangle, \text{ где } F_{i_k} \in U_{i_k} (k = 1, \dots, d\}), \text{ и } s < t \text{ влечёт } i_s < i_t. \quad (4.7)$$

Обозначим

$$A(F) = \cap F_j, B(F) = \cup F_j, \alpha(F) = |A(F)| / |B(F)|, \quad (4.8)$$

где пересечение и объединение берётся по всем множествам  $F$  из семейства  $F$ . Ясно, что  $\alpha(F)$  не может превзойти 1. Семейства  $F$ , такие, что  $\alpha(F) > 0.5$ , называются  $\alpha$ -стабильными. Близость  $\alpha(F)$  к 1 означает стабильность некоторого кластера при всех рассматриваемых прогонах с номерами  $i_1, \dots, i_d$ . Это понятие иллюстрируется на рисунке 4.26.

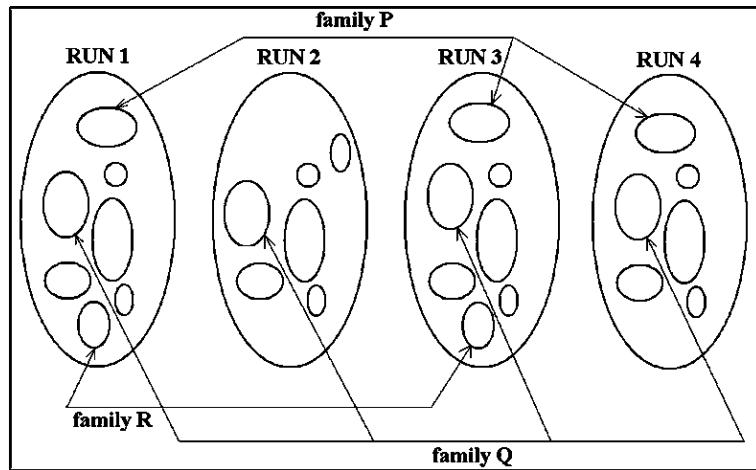
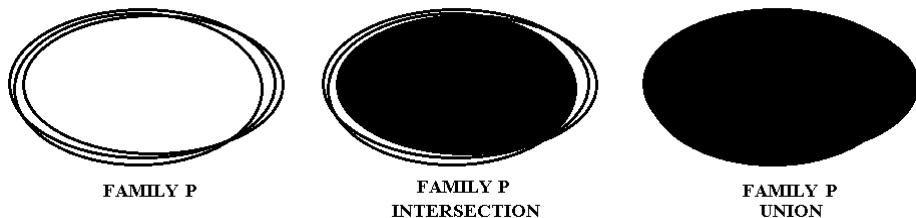


Рисунок 4.26 – Результаты 4-х прогонов

Три семейства Р, Q и R подробней представлены на рисунке 4.27.

Рисунок 4.26 показывает, что кластеры из семейства Р появляются 3 раза из 4-х, кластеры из семейства Q – 4 раза из 4-х, и кластеры из семейства R – появляются 2 раза из 4-х. Этот пример приводит к другому понятию стабильности. Обозначим через  $c(F) = |F| = d$  (см. (4.7)). Положим  $\beta(F) = c(F)/r$ . Это число указывает на долю прогонов, в которых рассматривается некоторое семейство кластеров F, по отношению ко всем  $r$  прогонам. Наконец, положим

$$\gamma(F) = \alpha(F) \times \beta(F). \quad (4.9)$$



a

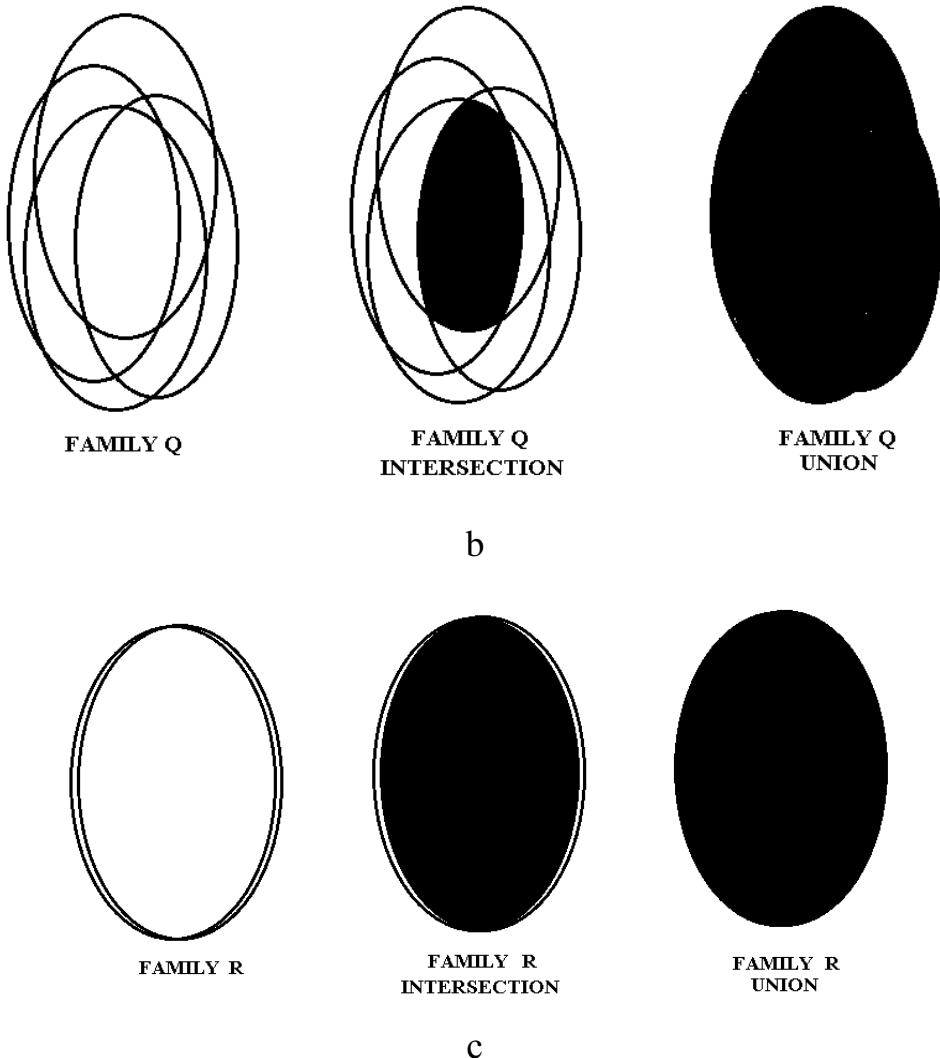


Рисунок 4.27 – Пересечения и объединения множеств из одного семейства

Число  $V(F) = 1 - \gamma(F)$  называется волатильностью семейства  $F$ . Предположим, что все семейства  $F$  (см. (7)) упорядочены по возрастанию волатильности:  $F_1, F_2, \dots$ , так что  $s < t$  влечёт  $F_s < F_t$ . Положим  $C_i = A(F_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (см. (4.8)). Эти множества показаны в средней колонке рисунка 4.27. Предположим также, что задано число  $V^*$  – максимально допустимый уровень волатильности.

Следующие шаги алгоритма построения кластеров определяют предложенное решение задачи кластеризации.

Алгоритм построения кластеров:

- 1) найти все  $\alpha$ -стабильные семейства  $F_1, F_2, \dots, F_m$  (см. (4.8));

- 2) выделить из них все семейства  $F$ , такие что  $V(F) \leq V^*$  (они названы допустимыми);
- 3) упорядочить допустимые семейства  $F_i$  в порядке возрастания  $V(F_i)$ ;
- 4) положить  $C_i = A(F_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) (здесь  $k$  – число допустимых семейств);
- 5) положить  $D_1 = C_1$  и текущее значение  $i_c = 1$ ;
- 6) если множества  $D_1, \dots, D_t$  уже найдены, рассмотреть последовательно все  $i > i_c$  до тех пор, пока не будет выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:
  - $C_i$  содержит  $D_j$  ( $j \in 1, \dots, t$ ) или  $D_j$  содержит  $C_i$  ( $j \in 1, \dots, t$ ) или  $C_i$  не пересекается с  $D_j$  ( $j \in 1, \dots, t$ ); тогда положить  $D_{t+1} = C_i$ ,  $i_c = i$ ,  $t = t+1$  и вернуться к шагу 6;
  - $i = k+1$ ; тогда перейти к следующему шагу 7;
- 7) рассмотреть все кластеры  $D_1, \dots, D_t$  и удалить из него кластеры, содержащие другие кластеры из этого же списка;
- 8) остановка алгоритма.

Построенные множества  $D_1, \dots, D_s$  образуют выход внешнего уровня трёхуровневого алгоритма кластеризации. Другими словами, они являются найденными кластерами. Эти кластеры могут образовывать полное разбиение исходного множества объектов, или могут образовывать его неполное разбиение. Волатильность  $V(D)$  кластера  $D$  определяется как волатильность семейства  $F$  такого, что  $D = A(F)$ . Волатильность всей задачи кластеризации определяется как взвешенная сумма волатильности всех найденных кластеров:

$$V = \sum_{i=1}^s V(D_i) |D_i| / \sum_{i=1}^s |D_i|. \quad (4.10)$$

Для завершения описания алгоритма дадим описание операций шага 1: Найти все  $\alpha$ -стабильные семейства  $F_1, F_2, \dots, F_m$ . Алгоритм достаточно прост. Строим список всех семейств  $F$ , таких что  $\alpha(F) > 0.5$ . Предположим, что у нас уже имеется текущий список таких семейств  $F_1, \dots, F_s$ . Пусть  $F = \langle F_{i_1}, \dots, F_{i_d} \rangle$

– одно из построенных семейств, представленное в виде (4.7). Рассмотрим любое множество  $F_i$  из любого множества  $U_i$ , где  $i > i_d$ . Проверим новое семейство  $F' = \langle F_{i_1}, \dots, F_{i_d}, F_i \rangle$  на выполнение условия  $\alpha(F') > 0,5$  (это простая операция). Если это условие выполняется, то  $F'$  добавляется к списку.

Те же самые операции выполняются:

- для всех элементов (множеств) из  $U_i$ ;
- для всех  $i$  ( $i_d < i \leq r$ );
- для всех семейств из текущего списка.

Алгоритм останавливается, когда ни одного нового семейства нельзя добавить к текущему списку, используя указанные операции. Сначала список состоит из всех множеств из каждого  $U_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Заметим, что алгоритм (который на первый взгляд может показаться перебирающим все возможные семейства  $F$ , на самом деле выполняется очень быстро. Дело в том что почти все пары из двух множеств из различных  $U_i$  имеют пустое пересечение, вследствие чего почти все цепочки  $F_{i_1}, \dots, F_{i_d}$  очень быстро обрываются: для них не выполняется условия  $\alpha(F') > 0,5$ .

Продемонстрируем работу алгоритма построения кластеров на достаточно простом примере.

Пример 4.6. Продолжение примера 4.5. В результате одного прогон ДАК-алгоритма были получены 6 множеств: 0, 1, 2, 3, 0+2, 1+3. При каждом из четырёх прогонов вновь получаем те же самые 6 множеств, показанных на рисунке 4.28. Рисунок ясно показывает, что 4 множества: 0+2, 1, 3 и 1+3 при всех прогонах полностью совпадают, а множества 0 и 2 заметно отличаются.

При выполнении шага 1 будут получены  $\alpha$ -стабильные семейства  $F$ , состоящие из всех последовательностей длины 1, 2, 3 и 4, состоящих из однотипных множеств, полученных на разных итерациях. Например,  $\langle 1,1,1 \rangle$ ,  $\langle 0+2,0+2 \rangle$ ,  $\langle 2,2,2,2 \rangle$  и т.д. Если в семейство входят разные множества, то, как следует из рисунка, ни одно из них не будет  $\alpha$ -стабильным. Например, в случае семейства, состоящего из множества 2 из 1-го прогона и множества 1 из 3-

его прогона их пересечение (хотя и не пустое) всё равно составляет сильно меньше половины от их объединения, что и означает, что такое семейство не будет  $\alpha$ -стабильным. На шаге 2 выделяются все семейства с требуемой волатильностью. В данном случае неформальное решение состоит в выборе уровня  $V^* = 0$ . Понятно, что  $\gamma(F) = 1$  только для четырёх семейств:  $\langle 0+2,0+2, 0+2,0+2 \rangle$ ,  $\langle 1,1,1,1 \rangle$ ,  $\langle 3,3,3,3 \rangle$  и  $\langle 1+3,1+3,1+3,1+3 \rangle$ . Для всех более коротких семейств  $F$  будет  $\beta(F) \leq 0,75$ , откуда  $\gamma(F) \leq 0,75$ . А для семейств из четырёх одноименных 0 (как и из четырёх одноименных 2) из несовпадения множеств сразу следует, что  $\gamma(F) < 1$ .

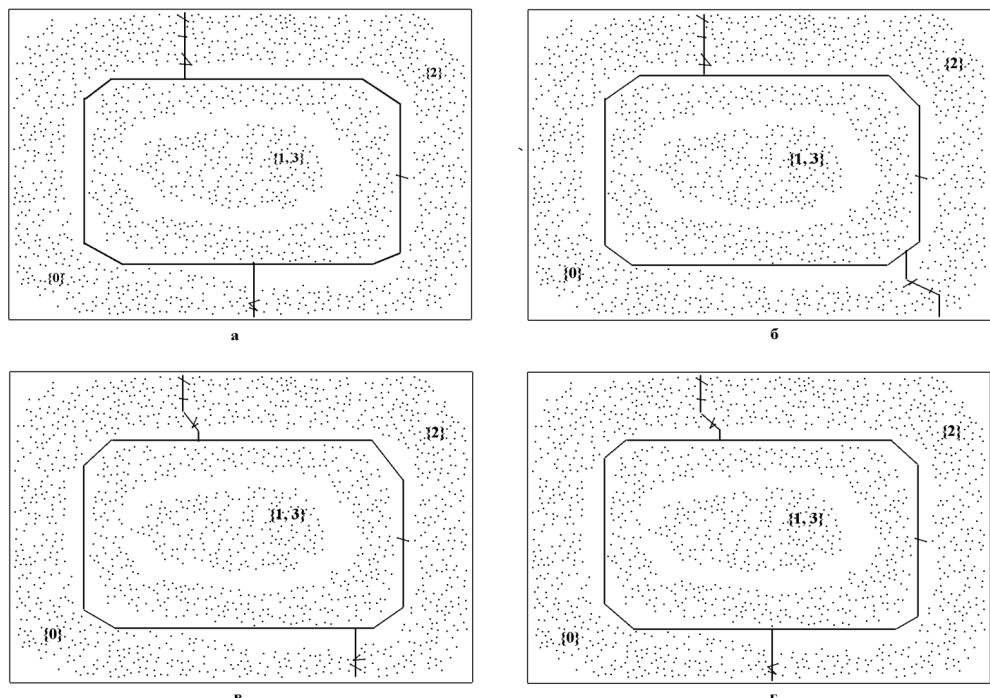


Рисунок 4.28 – Устойчивые и неустойчивые кластеры

Таким образом, в список попадают только 4 указанных семейства  $\langle 0+2,0+2, 0+2,0+2 \rangle$ ,  $\langle 1,1,1,1 \rangle$ ,  $\langle 3,3,3,3 \rangle$  и  $\langle 1+3,1+3,1+3,1+3 \rangle$ . Для всех волатильность равна 0. После выполнения очевидных в данном случае шагов 3 – 6 получаем кластеры 0+2, 1, 3 и 1+3. Но на шаге 7 удаляется кластер 1+3, так как он содержит кластеры 1 и 3. В результате получаем три кластера: 0+2, 1 и 3, которые образуют полную правильную классификацию (см. рисунки 4.24d и 4.25).

Можно заметить, что во всех многочисленных примерах, приведённых в препринте [73], правильные классификации получаются при уровне волатильности  $V^* = 0$  или очень близкой к 0 (порядка 0,01). Однако в реальных ситуациях, рассмотренных в пункте 5, действительно существуют кластеры с уровнем волатильности порядка 0,5, а иногда и больше.

### Параметры трёхуровневой процедуры.

Имеется очень немного, особенно для столь универсальной схемы, параметров. Два параметра  $f$  и  $T$  предложенного частотного алгоритма на внутреннем уровне не оказывают заметного влияния на результаты. Во всяком случае, результаты при любых  $f$  в пределах 5 – 25 и любых  $T$  в пределах 500 – 3000 практически совпадают. Единственный параметром ДАК-алгоритма (промежуточный уровень) является число частей  $K$ . Этот параметр является существенным. Грубо говоря, при слишком малом  $K$  правильные классификации могут не быть найденными, а при слишком большом  $K$  могут появиться «лишние» устойчивые классификации. Однако при всех промежуточных  $K$  находятся одни и те же правильные классификации. В частности, в ситуации примера 5  $K$  может меняться от 4 до 15 – найденная классификация останется той же самой. В общем случае  $K$  можно выбирать «с запасом», заметно большим, чем предполагаемое число классов. Наконец, на внешнем уровне при построении финальных кластеров задаётся два параметра – число прогонов ДАК-алгоритма  $r$  и допустимый уровень волатильности  $V^*$ . Во всех экспериментах (см. следующий раздел 6) произвольный выбор  $r$  в пределах 5 – 10 не оказывал влияния на результаты. Однако допустимый уровень волатильности  $V^*$  в наиболее сложных случаях действительно может оказаться существенным: он влияет на финальное число кластеров. Более того, подсчитанный реальный уровень волатильности классификации (а не задаваемый заранее допустимый уровень  $V^*$ ) является в некоторых случаях важной характеристикой рассматриваемой ситуации (см. пример 4.15).

## 4.2.5 Примеры применения алгоритма

### 4.2.5.1 Модельные примеры

В этом подпункте приведём примеры работы предложенной трёхуровневой схемы в разнообразных – хотя с точки зрения предложенного подхода простых – случаях. Параметры во всех рассмотренных в этом разделе примерах 4.7 – 4.15 (кроме параметра  $K$ ) были одними и теми же:  $f = 10$ ;  $T = 1500$ ,  $r = 10$ ,  $V^* = 0,01$ . Во всех примерах, кроме примеров 4.10 и 4.11,  $K = 6$ ; в примерах 4.10 и 4.11  $K = 15$ .

В случае двумерных множеств результаты просто представлены на рисунках. Ещё раз обратим внимание, что число классов во всех случаях не задавалось – есть только верхнее ограничение  $K$ . Напомним также, что здесь, как и вообще в предложенном подходе, никакой информации, кроме координат исходных точек, не используется. Более того, эти координаты используются только для построения графа соседства.

Пример 4.7. Исходное множество точек состоит из реализаций двух случайных величин, нормально распределённых по горизонтали и равномерно по вертикали. Результат классификации показан на рисунке 4.29.

Пример 4.8. Исходное множество точек состоит из двух соприкасающихся колец, дополненных небольшим числом точек внутри. Результат классификации представлен на рисунке 4.30.

Пример 4.9. Исходное множество точек состоит из реализаций четырёх двумерных слегкаискажённых нормальных случайных величин. Результат его классификации показан на рисунке 4.31.

Пример 4.10. Исходное множество точек представляет собой спираль с двумя перешейками – примерно посередине и рядом с одним из концов. Результат его классификации показан на рисунке 4.32.

Пример 4.11. Исходное множество точек представляет собой озеро с двумя полуостровами. Меньший полуостров содержит сравнительно мало точек (223 из 4501), а число соединяющих его с остальной частью множества

рёбер равно 6, т.е. не слишком мало. Поэтому указанный полуостров обнаруживается только после достаточно большого числа последовательных дихотомий и поэтому здесь было выбрано достаточно большое  $K = 15$ . Результат классификации показан на рисунке 4.33.

Пример 4.12. Исходное множество точек показано на рисунке 4.34. Кластерной структуры в нём не наблюдается. Результат применения общего алгоритма подтверждает это: кластеры отсутствуют даже на уровне волатильности 0,6.

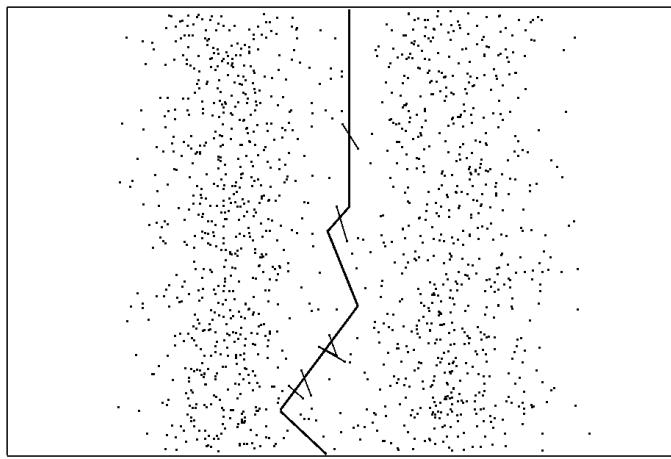


Рисунок 4.29 – Результат классификации в примере 7 (1397 точек)

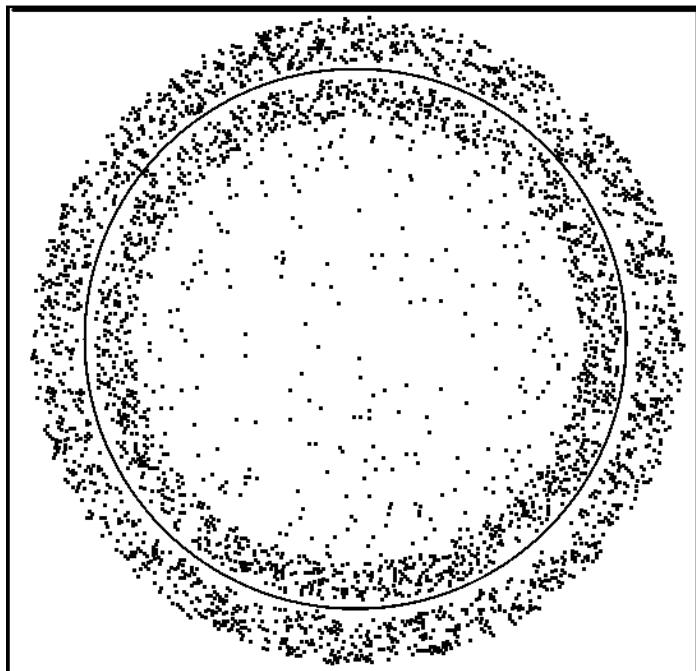


Рисунок 4.30 – Результат классификации в примере 8 (3228 точек)

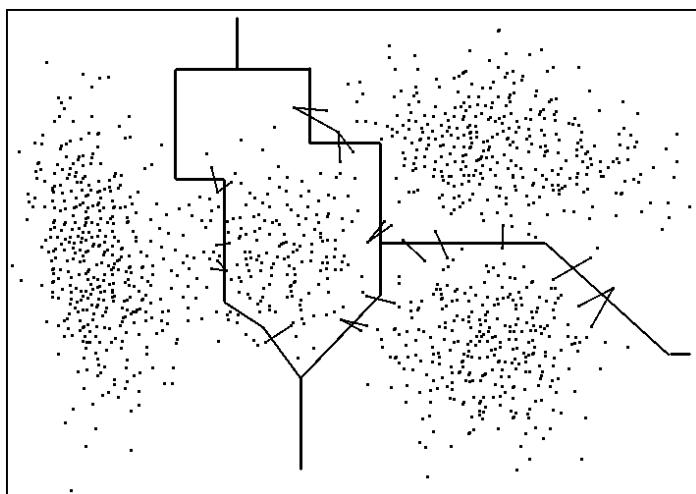


Рисунок 4.31 – Результат классификации в примере 9 (1279 точек)

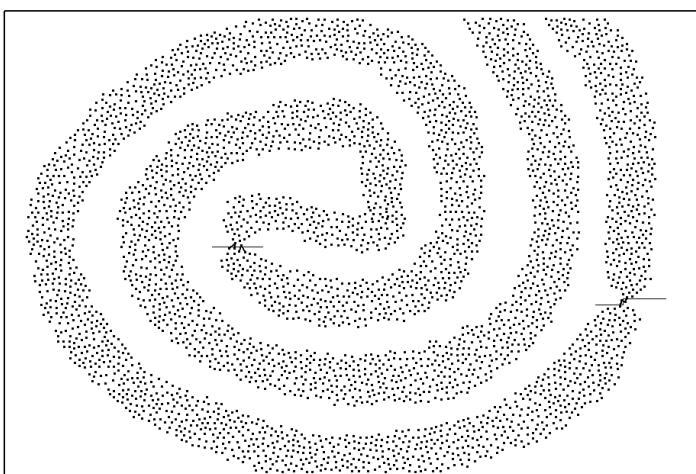


Рисунок 4.32 – Результат классификации в примере 10 (4272 точки)

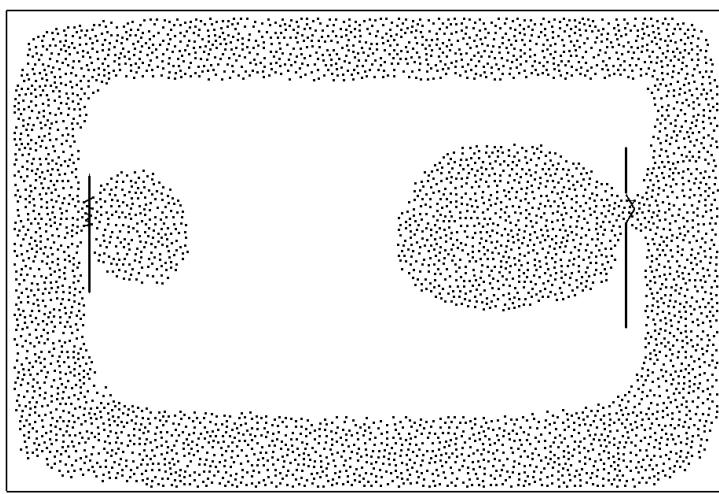


Рисунок 4.33 – Результат классификации в примере 11 (4501 точка)

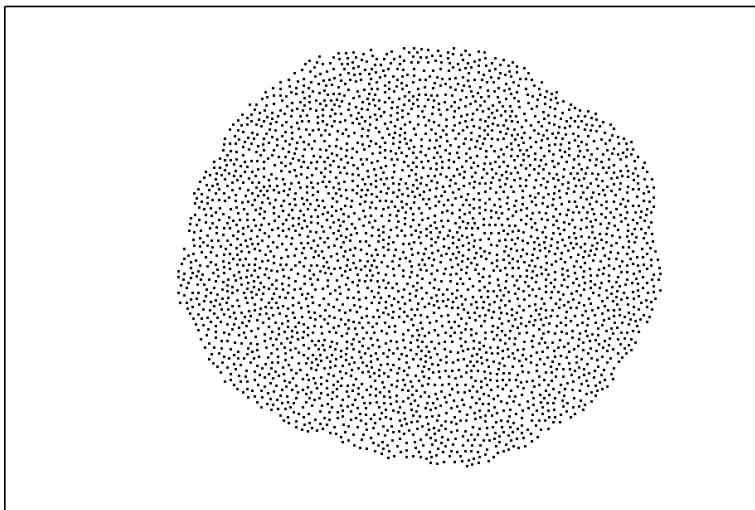


Рисунок 4.34 – Пример отсутствия кластерной структуры

Пример 4.13. Многомерная матрица «объекты-параметры» (Таблица 4.8). В отличие от всех предыдущих примеров, в данном случае исходное множество не является двумерным. Имеется 15 объектов и 20 параметров. Выделены три класса. Первый класс состоит из объектов с номерами 0, 3, 6, 7, 10, 13; второй класс состоит из объектов с номерами 1, 4, 5, 8, 14; третий класс состоит из объектов с номерами 2, 9, 11, 12. Выделены две группы параметров. Первая группа состоит из параметров с номерами 0, 2, 3, 5, 8, 9, 11, 14, 16, 17, 19; вторая группа состоит из параметров с номерами 1, 4, 6, 7, 10, 12, 13, 15, 18.

Таблица 4.8 – Многомерная матрица «объекты-параметры»

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0 69	16	56	76	27	45	54	52	50	82	39	56	45	21	51	50	80	88	55	51
1 34	57	47	32	74	40	58	59	48	28	47	21	70	79	28	87	28	39	67	17
2 48	55	43	52	71	56	44	43	72	28	37	42	30	29	47	48	40	60	39	63
3 72	21	46	69	33	49	49	12	72	50	24	54	47	38	58	23	63	65	54	50
4 35	50	47	27	84	15	59	72	40	12	57	36	85	88	21	46	53	26	72	15
5 33	53	43	25	46	15	77	57	19	54	79	19	56	52	52	57	50	48	71	31
6 71	31	86	71	47	74	16	48	76	80	19	62	50	26	86	20	83	54	43	55
7 70	15	64	69	11	50	28	42	44	68	17	56	13	46	86	21	62	80	31	45
8 39	71	48	10	84	55	65	77	35	12	67	29	57	74	48	79	17	24	64	31
9 35	68	42	37	63	33	51	38	42	53	58	72	64	64	35	66	72	52	30	34
10 49	12	83	65	14	55	44	10	76	79	12	47	36	28	71	51	54	84	24	71
11 46	46	59	29	67	57	29	46	27	58	62	34	55	47	60	28	70	37	54	45
12 29	58	38	45	55	44	34	27	50	47	30	70	43	55	29	44	66	71	64	62
13 54	24	78	54	12	70	48	39	86	46	19	55	49	24	89	53	49	54	17	65
14 53	81	55	44	73	14	66	49	44	16	77	26	82	69	13	63	50	47	47	33

В данной матрице объекты из 1-го класса имеют «большие» значения (от 44 до 90) по параметрам из 1-ой группы и «малые» значения (от 10 до 56) по параметрам из 2-ой группы. Объекты из 2-го класса имеют «большие» значения (от 44 до 90) по параметрам из 2-ой группы и «малые» значения (от 10 до 56) по параметрам из 1-ой группы. Объекты из 3-го класса имеют «промежуточные» значения (от 27 до 73) по параметрам из обеих групп. Все числа в матрице данных выбраны случайно из соответствующих интервалов.

Общий алгоритм (при  $K = 4$ ) находит без ошибок указанную классификацию на три класса (см. Таблица 4.9). Параметры из 2-ой группы выделены серым фоном; строки матрицы переставлены так, что объекты из одного класса стоят подряд. Таким образом, в этом примере найдена верная классификация, несмотря на существенное пересечение интервалов «малых», «промежуточных» и «больших» значений:

Таблица 4.9 – Классификация данных на три класса

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	169	16	56	76	27	45	54	52	50	82	39	56	45	21	51	50	80	88	55	51
3	172	21	46	69	33	49	49	12	72	50	24	54	47	38	58	23	63	65	54	50
6	171	31	86	71	47	74	16	48	76	80	19	62	50	26	86	20	83	54	43	55
7	170	15	64	69	11	50	28	42	44	68	17	56	13	46	86	21	62	80	31	45
10	149	12	83	65	14	55	44	10	76	79	12	47	36	28	71	51	54	84	24	71
13	154	24	78	54	12	70	48	39	86	46	19	55	49	24	89	53	49	54	17	65
1	134	57	47	32	74	40	58	59	48	28	47	21	70	79	28	87	28	39	67	17
4	135	50	47	27	84	15	59	72	40	12	57	36	85	88	21	46	53	26	72	15
5	133	53	43	25	46	15	77	57	19	54	79	19	56	52	52	57	50	48	71	31
8	139	71	48	10	84	55	65	77	35	12	67	29	57	74	48	79	17	24	64	31
14	153	81	55	44	73	14	66	49	44	16	77	26	82	69	13	63	50	47	47	33
2	148	55	43	52	71	56	44	43	72	28	37	42	30	29	47	48	40	60	39	63
9	135	68	42	37	63	33	51	38	42	53	58	72	64	64	35	66	72	52	30	34
11	146	46	59	29	67	57	29	46	27	58	62	34	55	47	60	28	70	37	54	45
12	129	58	38	45	55	44	34	27	50	47	30	70	43	55	29	44	66	71	64	62

Пример 4.14. Матрица несходства. Имеется 40 объектов. Выделены два класса. 1-ый класс состоит из объектов с номерами 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 20, 21, 22, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38; 2-ой класс состоит из объектов с номерами 5, 6, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 29, 34, 39. Несходства между объектами, принадлежащими к одному и тому же классу, являются

ются случайными числами от 10 до 60, в то время как несходства между объектами, принадлежащими к разным классам, являются случайными числами от 25 до 80. Матрица несходств представлена в Таблице 4.10.

Таблица 4.10 – Матрица несходств

52 — 49 45 43 46 69 49 19 39 42 14 31 51 48 41 49 77 37 26 21 60 52 35 66 53 76 48 24 75 39 13 13 58 48 21 35 30 60 74
51 49 — 47 11 31 66 57 48 11 34 36 42 35 29 60 63 50 38 67 59 28 57 65 62 32 52 44 37 27 29 46 27 30 51 45 12 37 49 47
35 45 47 — 11 47 53 13 15 28 21 30 59 30 52 35 36 55 77 78 27 36 26 75 34 52 71 39 38 31 32 35 37 25 31 48 15 31 46 50
23 43 11 11 — 40 75 17 46 24 31 21 54 59 69 28 57 41 55 35 56 52 25 42 40 65 47 22 60 41 33 55 58 15 75 36 41 47 45 53
77 46 31 47 40 — 13 48 37 28 78 41 60 46 14 44 22 28 19 18 59 51 77 53 46 55 31 69 65 19 25 46 26 76 44 79 37 31 50 21
41 69 66 53 75 13 — 56 43 37 33 60 43 52 37 66 41 42 41 27 31 56 29 39 57 31 29 52 31 48 62 77 53 40 31 61 62 77 77 39
25 49 57 13 17 48 56 — 53 19 54 59 69 35 31 30 37 59 51 74 60 14 58 65 48 27 28 50 54 77 51 16 28 36 34 52 60 28 28 55
55 19 48 15 46 37 43 53 — 56 14 56 70 73 43 47 59 29 72 68 34 56 24 39 28 78 68 46 24 58 25 27 12 11 66 19 20 56 33 40
21 39 11 28 24 28 37 19 56 — 58 30 56 54 64 38 49 38 30 53 37 28 52 64 73 28 59 44 37 78 26 40 27 31 48 42 55 17 54 39
49 42 34 21 31 78 33 54 14 58 — 57 78 47 61 49 65 70 57 52 50 39 33 32 66 50 40 38 46 58 21 36 24 55 27 40 60 19 56 34
20 14 36 30 21 41 60 59 56 30 57 — 54 61 77 28 76 63 62 32 28 60 48 50 71 25 41 44 31 51 36 50 53 29 66 32 50 44 25 48
73 31 42 59 54 60 43 69 70 56 78 54 — 16 23 25 22 42 12 55 38 75 65 55 39 58 44 69 35 15 52 26 51 48 43 43 30 46 47 12
62 51 35 30 59 46 52 35 73 54 47 61 16 — 29 52 59 40 18 19 73 61 34 36 13 12 59 79 59 23 43 75 25 60 31 54 40 32 44 50
79 48 29 52 69 14 37 31 43 64 61 77 23 29 — 47 46 49 36 31 41 71 35 48 28 58 49 44 33 33 77 52 43 72 34 58 41 34 47 51
37 41 60 35 28 44 66 30 47 38 49 28 25 52 47 — 30 67 50 67 42 32 20 70 61 31 63 19 28 65 30 41 56 58 71 20 23 57 42 66
43 49 63 36 57 22 41 37 59 49 65 76 22 59 46 30 — 53 16 60 29 30 33 27 36 14 53 49 54 15 43 32 60 35 23 64 62 50 45 31
63 77 50 55 41 28 42 59 29 38 70 63 42 40 49 67 53 — 54 46 34 59 25 24 57 55 57 58 71 33 58 36 69 48 23 51 31 41 40 40
68 37 38 77 55 19 41 51 72 30 57 62 12 18 36 50 16 54 — 12 76 40 45 25 40 15 37 50 45 33 33 54 55 58 15 31 75 64 62 15
60 26 67 78 35 18 27 74 68 53 52 32 55 19 31 67 60 46 12 — 25 74 65 13 19 48 25 77 34 56 66 75 59 66 26 34 60 61 73 16
13 21 59 27 56 59 31 60 34 37 50 28 38 73 41 42 29 34 76 25 — 19 57 67 71 47 77 14 40 62 36 20 50 18 70 27 20 53 33 52
37 60 28 36 52 51 56 14 56 28 39 60 75 61 71 32 30 59 40 74 19 — 42 51 49 64 68 14 50 30 50 35 54 33 73 33 39 11 54 38
53 52 57 26 25 77 29 58 24 52 33 48 65 34 35 20 33 25 45 65 57 42 — 34 32 72 74 27 23 65 40 31 19 60 53 32 16 28 54 29
67 35 65 75 42 53 39 65 39 64 32 50 55 36 48 70 27 24 25 13 67 51 34 — 19 54 56 67 74 58 78 41 61 61 44 39 49 37 46 35
74 66 62 34 40 46 57 48 28 73 66 71 39 13 28 61 36 57 40 19 71 49 32 19 — 47 52 31 74 12 64 45 70 77 38 26 48 35 34 28
50 53 32 52 65 55 31 27 78 28 50 25 58 12 58 31 14 55 15 48 47 64 72 54 47 — 18 43 67 36 63 74 44 42 47 52 71 27 57 42
66 76 52 71 47 31 29 28 68 59 40 41 44 59 49 63 53 57 37 25 77 68 74 56 52 18 — 50 49 29 71 71 58 55 48 44 68 47 75 33
22 48 44 39 22 69 52 50 46 44 38 44 69 79 44 19 49 58 50 77 14 14 27 67 31 43 50 — 60 70 52 17 17 19 77 35 16 24 27 56
44 24 37 38 60 65 31 54 24 37 46 31 35 59 33 28 54 71 45 34 40 50 23 74 74 67 49 60 — 74 13 34 17 41 66 19 13 25 29 77
62 75 27 31 41 19 48 77 58 78 58 15 23 33 65 15 33 33 56 62 30 65 58 12 36 29 70 74 — 57 51 40 59 22 49 62 70 58 50
21 39 29 32 33 25 62 57 25 26 21 36 52 43 77 30 43 58 33 66 36 50 40 78 64 63 71 52 13 57 — 43 16 17 68 50 25 35 43 68
28 13 46 35 55 46 77 16 27 40 36 50 26 75 52 41 32 36 54 75 20 35 31 41 45 74 71 17 34 51 43 — 31 17 52 28 40 45 18 59
48 13 27 37 58 26 53 28 12 27 24 53 51 25 43 56 60 69 55 59 50 54 19 61 70 44 58 17 17 40 16 31 — 45 43 17 23 18 21 56
55 58 30 25 15 76 40 36 11 31 55 29 48 60 72 58 35 48 58 66 18 33 60 61 77 42 55 19 41 59 17 17 45 — 67 57 49 19 24 78
73 48 51 31 75 44 31 34 66 48 27 66 43 31 34 71 23 23 15 26 70 73 53 44 38 47 48 77 66 22 68 52 43 67 — 46 59 60 36 58
51 21 45 48 36 79 61 52 19 42 40 32 43 54 58 20 64 51 31 34 27 33 32 39 26 52 44 35 19 49 50 28 17 57 46 — 15 51 18 55
16 35 12 15 41 37 62 60 20 55 60 50 30 40 41 23 62 31 75 60 20 39 16 49 48 71 68 16 13 62 25 40 23 49 59 15 — 55 23 49
48 30 37 31 47 31 77 28 56 17 19 44 46 32 54 57 50 41 64 61 53 11 28 37 35 27 47 24 25 70 35 45 18 19 60 51 55 — 32 30
28 60 49 46 45 50 77 28 33 54 56 25 47 44 47 42 45 40 62 73 33 54 54 46 34 57 75 27 29 58 43 18 21 24 36 18 23 32 — 72
42 74 47 50 53 21 39 55 40 39 34 48 12 50 51 66 31 40 15 16 52 38 29 35 28 42 33 56 77 50 68 59 56 78 58 55 49 30 72 —

Общий алгоритм (при  $K = 4$ ) находит без ошибок указанную классификацию. Строки и столбцы матрицы несходств переставлены так, что объекты из одного класса стоят подряд. Подматрицы, числа в которых равны расстояниям внутри классов, выделены серым фоном. Правильность классификации подтверждается тем, что среди выделенных нет чисел, больших 60, а среди невыделенных нет чисел, меньших 25 (см. Таблицу 4.11).

Таблица 4.11 – Результат работы алгоритма кластеризации

0	1	2	3	4	7	8	9	10	11	15	20	21	22	27	28	30	31	32	33	35	36	37	38	5	6	12	13	14	16	17	18	19	23	24	25	26	29	34	39		
0	—	52	51	35	23	25	55	21	49	20	37	13	37	53	22	44	21	28	48	55	51	16	48	28	77	41	73	62	79	43	63	68	60	67	74	50	66	62	73	42	
1	52	—	49	45	43	49	19	39	42	14	41	21	60	52	48	24	39	13	13	58	21	35	30	60	46	69	31	51	48	49	77	37	26	35	66	53	76	75	48	74	
2	51	49	—	47	11	57	48	11	34	36	60	59	28	57	44	37	29	46	27	30	45	12	37	49	31	66	42	35	29	63	50	38	67	65	62	32	52	27	51	47	
3	35	45	47	—	11	13	15	28	21	30	35	27	36	26	39	38	32	35	37	25	48	15	31	46	47	53	59	30	52	36	55	77	78	75	34	52	71	31	31	50	
4	23	43	11	11	—	17	46	24	31	21	28	56	52	25	22	60	33	55	58	15	36	41	47	45	40	75	54	59	69	57	41	55	35	42	40	65	47	41	75	53	
7	25	49	57	13	17	—	53	19	54	59	30	60	14	58	50	54	57	16	28	36	52	60	28	28	48	56	69	35	31	37	59	51	74	65	48	27	28	77	34	55	
8	55	19	48	15	46	53	—	56	14	56	47	34	56	24	46	24	25	27	12	11	19	20	56	33	37	43	70	73	43	59	29	72	68	39	28	78	68	58	66	40	
9	21	39	11	28	24	19	56	—	58	30	38	37	28	52	44	37	26	40	27	31	42	55	17	54	28	37	56	54	64	49	38	30	53	64	73	28	59	78	48	39	
10	49	42	34	21	31	54	14	58	—	57	49	50	39	33	38	46	21	36	24	55	40	60	19	56	78	33	78	47	61	65	70	57	52	32	66	50	40	58	27	34	
11	20	14	36	30	21	59	56	30	57	—	28	28	60	48	44	31	36	50	53	29	32	50	44	25	41	60	54	61	77	76	63	62	32	50	71	25	41	51	66	48	
15	37	41	60	35	28	30	47	38	49	28	—	42	32	20	19	28	30	41	56	58	20	23	57	42	44	66	25	52	47	30	67	50	67	70	61	31	63	65	71	66	
20	13	21	59	27	56	60	34	37	50	28	42	—	19	57	14	40	36	20	50	18	27	20	53	33	59	31	38	73	41	29	34	76	25	67	71	47	77	62	70	52	
21	37	60	28	36	52	14	56	28	39	60	32	19	—	42	14	50	50	35	54	33	33	39	11	54	51	56	75	61	71	30	59	40	74	51	49	64	68	30	73	38	
22	53	52	57	26	25	58	24	52	33	48	20	57	42	—	27	23	40	31	19	60	32	16	28	54	77	29	65	34	35	33	25	45	65	34	32	72	74	65	53	29	
27	122	48	44	39	22	50	46	44	38	44	19	14	14	27	—	60	52	17	17	19	35	16	24	27	69	52	62	69	79	44	49	58	50	77	67	31	43	50	70	77	56
28	144	24	37	38	60	54	24	37	46	31	28	40	50	23	60	—	13	34	17	41	19	13	25	29	65	31	35	59	33	54	71	45	34	74	74	67	49	74	66	77	
30	121	39	29	32	33	57	25	26	21	36	30	36	50	40	52	13	—	43	16	17	50	25	35	43	25	62	52	43	77	43	58	33	66	78	64	63	71	57	68	68	
31	128	13	46	35	55	16	27	40	36	50	41	20	35	31	17	34	43	—	31	17	28	40	45	18	46	77	26	75	52	32	36	54	75	41	45	74	71	51	52	59	
32	148	13	27	37	58	28	12	27	24	53	56	50	54	19	17	17	16	31	—	45	17	23	18	21	26	53	51	25	43	60	69	55	59	61	70	44	58	40	43	56	
33	155	58	30	25	15	36	11	31	55	29	58	18	33	60	19	41	17	17	45	—	57	49	19	24	76	40	48	60	72	35	48	58	66	61	77	42	55	59	67	78	
35	151	21	45	48	36	52	19	42	40	32	20	27	33	32	35	19	50	28	17	57	—	15	51	18	79	61	43	54	58	64	51	31	34	39	26	52	44	49	46	55	
36	16	35	12	15	41	60	20	55	60	50	23	20	39	16	13	25	40	23	49	15	—	55	23	37	62	30	40	41	62	31	75	60	49	48	71	68	62	59	49		
37	148	30	37	31	47	28	56	17	19	44	57	53	11	28	24	25	35	45	18	19	51	55	—	32	31	77	46	32	34	50	41	64	61	37	35	27	47	70	60	30	
38	128	60	49	46	45	28	33	54	56	25	42	33	54	54	27	29	43	18	21	24	18	23	32	—	50	77	47	44	47	45	40	62	73	46	34	57	75	58	36	72	
5	177	46	31	47	40	48	37	28	78	41	44	59	51	77	69	65	25	46	26	76	79	37	31	50	—	13	60	46	14	22	28	19	18	53	46	55	31	19	44	21	
6	141	69	66	53	75	56	43	37	33	60	66	31	56	29	52	31	62	77	53	40	61	62	77	77	13	—	43	52	37	41	42	41	27	39	57	31	29	48	31	39	
12	173	31	42	59	54	69	70	56	78	54	25	38	75	65	69	35	52	26	51	48	43	30	46	47	60	43	—	16	23	22	42	12	55	55	39	58	44	15	43	12	
13	162	51	35	30	59	35	73	54	47	61	52	73	61	34	79	59	43	75	25	60	54	40	32	44	46	52	16	—	29	59	40	18	19	36	13	12	59	23	31	50	
14	179	48	29	52	69	31	43	64	61	77	47	41	71	35	44	33	77	52	43	72	58	41	34	47	14	37	23	29	—	46	49	36	31	48	28	58	49	33	34	51	
16	143	49	63	36	57	37	59	49	65	76	30	29	30	33	49	54	43	32	60	35	64	62	50	45	22	41	22	25	59	46	—	53	16	60	27	36	14	53	15	23	31
17	163	77	50	55	41	59	29	38	70	63	67	34	59	25	58	71	58	36	69	48	51	31	41	40	28	42	42	40	49	53	—	54	46	24	57	55	57	33	23	40	
18	168	37	38	77	55	51	72	30	57	62	50	76	40	45	50	45	33	54	55	58	31	75	64	62	19	41	12	18	36	16	54	—	12	25	40	15	37	33	15	15	
19	160	26	67	78	35	74	68	53	52	32	67	25	74	65	77	34	66	75	59	66	34	60	61	73	18	27	55	19	31	60	46	12	—	13	19	48	25	56	26	16	
23	167	35	65	75	42	65	39	64	32	50	70	67	51	34	67	74	78	41	61	39	49	37	46	53	39	55	36	48	27	24	25	13	—	19	54	56	58	44	35		
24	174	66	62	34	48	28	73	66	71	61	71	49	32	31	74	64	45	70	77	26	48	35	34	46	57	39	13	28	36	57	40	19	—	47	52	12	38	28			
25	150	53	32	52	65	27	78	28	50	25	31	47	64	72	43	67	63	74	44	42	52	71	27	57	55	31	58	12													

рыночном графе (при различных значениях  $\theta$ ) соответствуют акциям с «близким поведением». Конструкция рыночного графа совпадает с хорошо известной конструкцией порогового графа в автоматической классификации, в которой роль матрицы несхожести играет корреляционная матрица.

В настоящей работе корреляционной матрице сопоставляется другой хорошо известный в автоматической классификации граф – упоминаемый в начале пункта 1 граф соседства. Эта конструкция представляется более гибкой. Во-первых, она позволяет учесть различный масштаб в различных «частях» исходного множества объектов; во-вторых, в ней не требуется выделение в качестве компонент графа его клик, что представляется слишком жёстким требованием; в третьих, не требуется определять «правильный» уровень  $\theta$  или рассматривать несколько таких уровней.

Результаты применения разработанного подхода представлены в Таблицах Д.1 и Д.2 Приложения Д в виде групп акций на фондовом рынке США и России соответственно. Исходными матрицами несхожести служили корреляционные матрицы с октября 2008 по октябрь 2010 года: для 500 случайно выбранных (из более чем 5000) компаний США, 151 российских компаний и 266 шведских компаний. На шведском фондовом рынке кластеры не были обнаружены, что является достаточно важным содержательным фактом.

Найденные кластеры для фондовых рынков США и России расположены в порядке возрастания их волатильности. В отличие от рассмотренных выше модельных примеров, наличие кластеров со значительным уровнем волатильности является обычным явлением, которое может иметь рациональное содержательное объяснение.

Кластер 1 имеет 0-ую волатильность; он оказывается в точности одним и тем же при каждом прогоне алгоритма. В него попали все компании, занятые добычей и производством золота. В кластере 2 ситуация другая. Компании, занятые инвестициями, попали в несколько из найденных кластеров. Можно сказать, что все кластеры состоят в основном из акций компаний, занятых в одной и той же или достаточно близких видах деятельности. Конечно, при

определении кластеров область деятельности никак не учитывалась – использовались только попарные коэффициенты корреляции. При этом существует достаточно много акций с близкими курсами, занятых различными видами деятельности. Таким образом, предложенный метод кластерного анализа учитывает не только близость внутри одной группы объектов, но и их расстояние относительно других групп, что и позволяет получить достаточно разумные кластеры.

Рассмотрим корреляционные подматрицы для кластера 1 на фондовом рынке США и для кластера 2 на российском фондовом рынке. Корреляционная матрица для кластера 1 показана в Таблице 4.12.

Таблица 4.12 – Корреляционная матрица для кластера 1 на фондовом рынке США

	25	69	242	247	270	409	483
25	1	0.7341	0.7214	0.7963	0.6558	0.5945	0.6971
69		1	0.6249	0.7212	0.6032	0.5085	0.5783
242			1	0.7387	0.6016	0.6309	0.6301
247				1	0.7071	0.6220	0.6760
270					1	0.5115	0.5600
409						1	0.5588
483							1

Среднее значение коэффициента корреляции равно  $\rho = 0.6444$ . В других кластерах на фондовом рынке США средний коэффициент корреляции  $\rho$  превосходит 0.6, что представляется естественным для таких кластеров.

Корреляционная матрица для кластера 2 на российском фондовом рынке показана в Таблице 4.13.

Таблица 4.13 – Корреляционная матрица для кластера 2 на российском фондовом рынке

	45	49	51	56	115
45	1	0.07846	0.26579	0.23474	0.24056
49		1	0.20525	-0.00745	0.22365
51			1	0.12311	0.25670
56				1	0.29438
115					1

Среднее значение коэффициента корреляции равно  $\rho = 0.1915$ . В кластере 1 на российском фондовом рынке средний коэффициент корреляции также близок к 0. Тщательная формальная проверка подтвердила эти данные. Кластер 2 с теми же самыми вершинами появляется 4 раза из 5 прогонов алгоритма. Расстояние его вершин от других ближайших к ним превосходит расстояние между вершинами из кластера. Однако такое значительное отличие от кластеров на рынке США нуждается в содержательном объяснении.

2. Кластеры в депутатском корпусе. Деятельность Государственной Думы рассмотрена за 5-месячный период с 01.09.2001 по 31.01.2002. Этот период представляется важным, поскольку в нём произошло важное политическое событие – создание партии «Единая Россия 01.12.2001. Этот период достаточно подробно освещён в книге [1]. Было построено пять классификаций по результатам голосований в течение каждого из 5 месяцев этого периода. В каждом месяце учитывались все (а не только политически значимые) голосования (от 200 до 400 в месяц). Каждому  $i$ -му депутату ( $i = 1, 2, \dots, 479$ ) был сопоставлен вектор  $v_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$ , где  $n$  – число голосований в данном месяце,

$$v_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый депутат голосовал за } j\text{-ое предложение;} \\ -1, & \text{если } i\text{-ый депутат голосовал против } j\text{-го предложения;} \\ 0, & \text{в противном случае (воздержался или не участвовал).} \end{cases}$$

Несходство  $d_{st}$  между  $s$ -ым и  $t$ -ым депутатами определяется как обычное евклидово расстояние между векторами  $v_s$  и  $v_t$ . Матрица несходства  $D = (d_{st})$  была исходной для определения депутатских кластеров и их волатильности предложенным трёхуровневым методом, описанным выше. Волатильность кластеров описана (в зависимости от месяца) в Таблице 4.14.

Таблица 4.14 – Волатильность депутатских кластеров

Сентябрь	0; 0; 0; 0; 0
Октябрь	0; 0; 0; 0; 0; 0; 0
Ноябрь	0; 0; 0.022; 0.200; 0.260; 0.315
Декабрь	0; 0; 0; 0.010; 0.012; 0.074; 0.125
Январь	0; 0; 0; 0.020; 0.035; 0.060; 0.144

Заметим, что число кластеров не является постоянным. Более того, они не всегда соответствуют депутатским фракциям. Однако наиболее важным фактом в полученных данных является резкий рост волатильности непосредственно перед возникновением «Единой России» и незначительное уменьшение волатильности в последующие два месяца.

#### 4.2.6 Сравнение с другими результатами

Проблема сравнения в кластерном анализе связана с неформальным характером самой задачи. Точные численные данные обычно получают, используя различные методы на стандартных наборах данных: смеси нормальных распределений и т.д. При этом оцениваются далеко не самые важные свойства методов. Понятно, что сравнения в сколько-нибудь нетривиальных случаях также не очень поучительны, поскольку многие известные алгоритмы кластерного анализа хорошо справляются с одними задачами и плохо – с другими, не более сложными. При этом ситуации, благоприятные для одних методов, являются неблагоприятными для других, и наоборот.

Не пытаясь решить проблему сравнения методов кластерного анализа в сколько-нибудь общем виде, изложим достаточно простые соображения, связанные с таким сравнением.

1. Двумерные задачи. Для достаточно простых двумерных задач, в которых правильное решение видно непосредственно, разумные методы кластерного анализа должны находить эти решения, используя небольшое число содержательно понятных параметров.

Начнём с хорошо известного пакета GPSS, включающего многие известные методы и алгоритмы кластерного анализа. Рассмотрим шесть множеств, показанных на рисунке 4.20. Все они правильно разделены на два класса предложенным алгоритмом дихотомии. Результат применения метода  $K$ -средних показан на рисунке 4.35. Результат применения иерархического алгоритма (при методе between-groups linkage) приведён на рисунке 4.36.

Примерно таковы же результаты применения других методов при иерархической классификации. Лучшие результаты получены при использовании метода Ворда, но и в этом случае правильно классифицированы только три множества из шести (рисунок 4.37). В несколько более сложной ситуации, детально рассмотренной в примерах 4.5 и 4.6, результат классификации методом Ворда неудовлетворителен (рисунок 4.38).

Другие сравнения. Для многих известных методов их формальная проверка (т.е. прогонка соответствующих программ для тех исходных данных, на которых предложенная общая схема даёт правильные классификации) вообще не требуется, чтобы убедиться в их неработоспособности (во всяком случае, для этих данных). Сами описания показывают, что во многих случаях (в том числе достаточно простых) они не будут работать. Остановимся на нескольких хорошо известных методах.

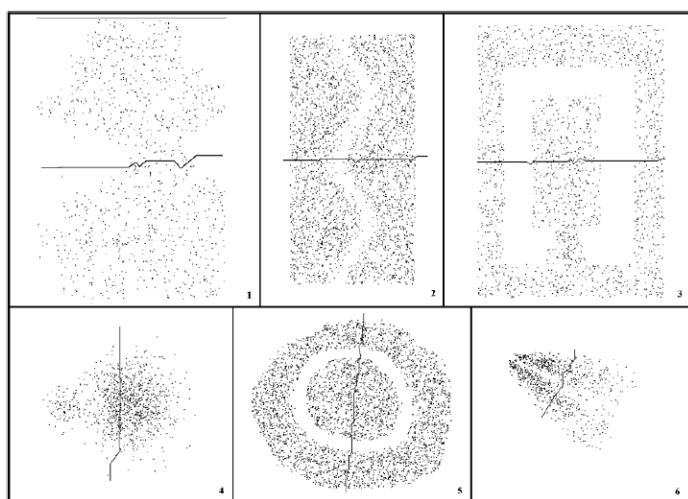


Рисунок 4.35 – Результаты применения метода  $K$ -средних

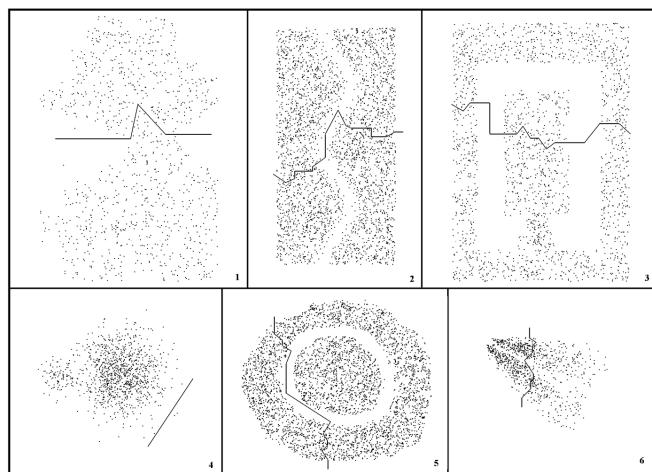


Рисунок 4.36 – Результаты применения метода between-groups linkage при иерархической классификации

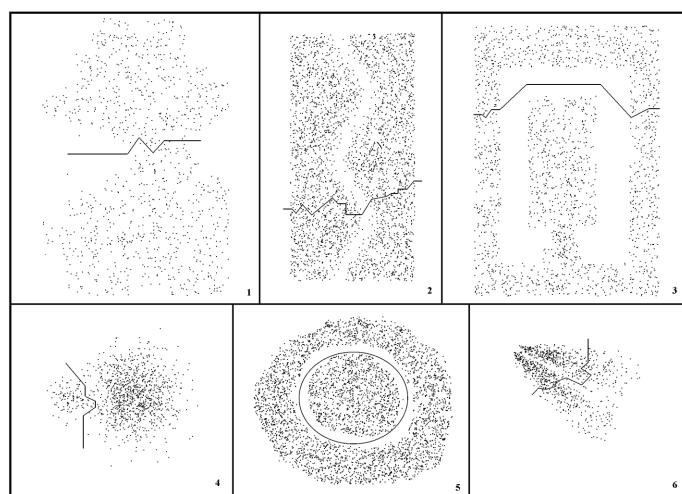


Рисунок 4.37 – Результаты применения метода Ворда при иерархической классификации; множества 1, 4 и 5 классифицированы правильно

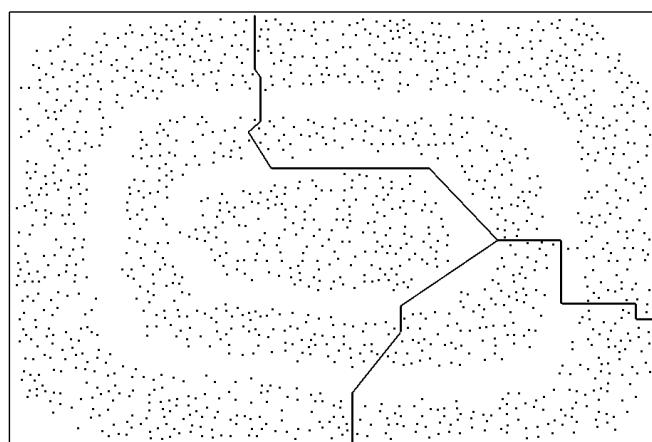


Рисунок 4.38 – Пример неправильной классификации методом Ворда

Нетрудно видеть, что на указанных данных рассматриваемые популярные алгоритмы дают неправильную классификацию. Сами описания показывают, что во многих случаях (в том числе достаточно простых) они не будут работать. Остановимся на нескольких хорошо известных методах.

1. Методы, минимизирующие средневзвешенную дисперсию. Хорошо известно, что в случае двух классов экстремум достигается на разбиении, определяемой линейной разделяющей функцией. Понятно, что для невыпуклых классов правильной классификации получено не будет.

2. Методы минимальной связи. Пусть  $A$  и  $B$  – произвольное разбиение исходного множества на две подмножества. Положим

$$d(A, B) = \min_{i \in A, j \in B} d_{ij}.$$

В качестве решения рассматривается такое разбиение, которое максимизирует величину  $d(A, B)$ . Пример 4.12, в котором расстояние между классами практически равно 0, демонстрирует, что эти методы в подобных ситуациях не работают.

3. Обобщённый алгоритм Жирвана–Ньюмана. Частотные методы являются, возможно, наиболее сильными (в смысле разнообразия и распространённости решаемых ими задач) из известных сегодня методов. Этот алгоритм справляется со всеми тестовыми множествами 1 – 6, кроме только множества 4 (рисунок 4.20). Результат классификации для этого множества показан на рисунке 4.39. Причиной (как и в примере 4.3) является слишком большое отношение мощностей правильных классов.

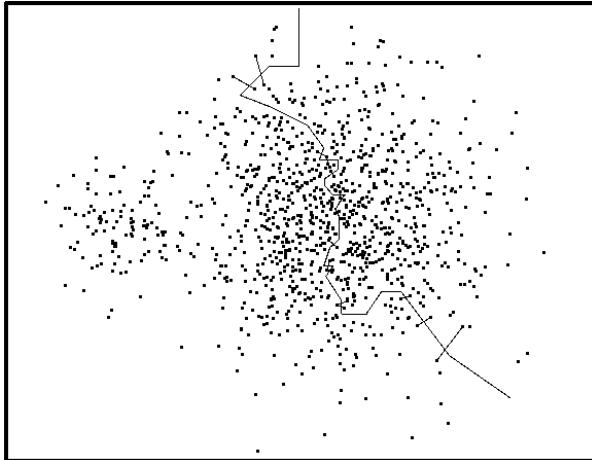


Рисунок 4.39 – Пример неверной классификации обобщённым алгоритмом Жирвана–Ньюмана

**4. Максимизация критерия сбалансированности (4.5).** В том же примере 4.3 указывалось на несоответствие этого критерия некоторым реальным задачам классификации (правильное решение не соответствует максимизирующему этот критерий разрезу). Однако этот пример тянет за собой гораздо больше. В обзоре [57], посвящённом спектральным методам кластеринга, говорится о формальном соответствии между решением оптимизационной задачи (4.5) и одним из вариантов спектрального алгоритма (а также о соответствиях между другими вариантами критериев сбалансированности и спектральных алгоритмов). В обзоре [39] обращается внимание на формальное соответствие между тремя подходами: оптимизацией критериев сбалансированности, спектральными методами и ядерными методами (*kernel clustering*). Но оптимизация критериев сбалансированности, как установлено в ряде примеров (не только в примере 4.20) не определяет правильной классификации. Следовательно, тот же вывод справедлив и для очень популярных и активно развивающихся в последние годы спектральных и ядерных методов.

## 2. Реальные задачи.

При сравнении разных методов в реальных задачах можно исходить только из мнения специалистов (если простые соображения здравого смысла не работают). Кластеры на фондовом рынке при тех же самых исходных дан-

ных по США и России строились в работах [5,11,16]. В этих работах использовались другие подходы и были выделены другие кластеры. Однако очевидный кластер из фондового рынка США, содержащий акции 7-и компаний, занятых добычей и производством золота, выделен не был. Как на российском рынке, так и на рынке США выделенные кластеры состояли из акций компаний, действующих в различных сферах. Типичным примером является кластер, состоящий из акций следующих компаний: Банк ВТБ, Норильский Никель, Газпром, Лукойл, Роснефть, Сбербанк.

Достаточно подробный анализ Государственной Думы 3-его созыва про- ведён в книге [1]. Однако рассмотренные там индексы и показатели не про- демонстрировали всплеска, падения или другим особых элементов поведения в окрестности политической «особой точки» 01.12.2001. Можно сказать, что применённый подход может оказаться полезным в ситуациях двухпартийных парламентов или абсолютного большинства одной из партий, когда обычные индексы влияния и согласованности мало применимы.

#### 4.2.7 Некоторые выводы

В большинстве случаев волатильность ассоциируется с хаосом и, как следствие, она имеет негативную коннотацию. Но в предложенном формальном использовании данного термина это не так. Можно предположить, что высокая волатильность – в данном случае отсутствие кластеров – фондового рынка указывает на его регулярный характер (как на шведском фондовом рынке). Наоборот, наличие чётких кластеров с нулевой или низкой волатильностью указывает на наличие специальных видов деятельности (как добыча золота) или на некоторые специальные действия по согласованию между фирмами, образующими кластер (особенно при малом размере этого кластера). Можно предположить, что тщательное отслеживание фондового рынка и его отдельных кластеров с точки зрения волатильности может помочь в предсказании так называемых «чёрных лебедей» на этих рынках. Но сейчас

это не более чем предположение, для обоснования которого понадобится много аналитической и экспериментальной работы.

Ситуация с выборными органами является другой. Можно предположить, что как очень низкий, так и очень высокий уровень волатильности может быть нежелателен. Но и здесь требуется большая аналитическая и экспериментальная работа для выработки и проверки различных предположений. В первую очередь необходимо проанализировать работу 3-ей Думы за весь период, а не только за 5 месяцев.

Наконец, за пределами рассмотренных здесь моделей находится много ситуаций, для которых применение разработанного метода кластерного анализа может быть интересным и перспективным.

Результаты этого подраздела нашли отражение в работах [23,74]:

1. Blagoveschenskiy N.Y., Rubchinsky A.A. Cluster Analysis of Socio-Economical Data// Сб. трудов XIV Апрельской международной научной конференции «Модернизация экономики и общества», М.:Изд. Дом ВШЭ, 2014 (в печати).
2. Rubchinsky A.A. Volatility in Clustering// Вестник УДН. Серия Математика. Информатика. Физика, 2014 (в печати).

#### 4.3 Исследование изменений качественных характеристик свидетельств при их комбинировании в рамках теории Демпстера–Шейфера

В данном подразделе приведены результаты исследований по изменению качественных характеристик свидетельств при их комбинировании в рамках теории Демпстера–Шейфера.

В теории Демпстера–Шейфера [33,78] (теории свидетельств, теории функций доверия) рассматриваются правила комбинирования свидетельств для агрегирования экспертной информации, полученной из разных источников. Исторически первым таким правилом было правило Демпстера [33]. Это правило было подвергнуто, как многочисленному анализу, так и критике

[34,37,80,86,88,91]. В результате этого были предложены новые правила комбинирования. Эти правила применимы в тех или иных ситуациях, обладают разными свойствами. В одних ситуациях комбинирования то или иное правило дает правдоподобный результат, а в других ситуациях – неправдоподобный. Более того, правдоподобность комбинирования часто зависит только от контекста, а не от конкретных параметров комбинируемых свидетельств. Но в первую очередь это связано со следующими причинами: 1) возможной конфликтностью свидетельств; 2) возможностью большого недостатка информации, содержащейся в свидетельствах (незнание свидетельств); 3) различной интерпретируемостью свидетельств. Ниже мы не будем анализировать третью причину, но остановимся на исследовании первых двух причин.

Эффективность применения правил комбинирования может быть оценена с помощью оценки изменения количества незнания после применения правил комбинирования. В этом исследовании количество незнания оценивалось с помощью, так называемых индексов неточности, определенных на монотонных мерах (например, функциях доверия). Такие индексы исследовались во многих работах в рамках теории неточных вероятностей. В данном исследовании использовалось аксиоматическое определение индекса неточности, предложенное в работах [3,26]. Предположим, что мы используем некоторое правило комбинирования  $R$  для комбинирования двух свидетельств. Как результат мы получим новое свидетельство. Тогда можно поставить вопрос о количестве уменьшения незнания после применения правила комбинирования  $R$ . Это количество может быть оценено с помощью индекса неточности как величина изменения распределения элементов тела свидетельств.

Существуют также различные подходы к определению меры конфликта свидетельств (или соответствующих функций доверия). Например, хорошо известен метрический подход к определению меры конфликта как расстояния между двумя базовыми вероятностными назначениями [56,61]. В нашем исследовании мера конфликта вводилась аксиоматически как функционал,

определенный на декартовом произведении множеств мер доверия и обладающий свойством антимонотонности относительно степени пересечения множеств.

Вводимые меры конфликта и мера изменения незнания исследовались на специальных типах тел свидетельств. Для таких тел, в частности, можно найти условия, гарантирующие уменьшение незнания после применения тех или иных правил комбинирования.

#### 4.3.1 Некоторые сведения из теории Демпстера–Шейфера

##### 4.3.1.1 Основные определения и обозначения

Основными понятиями теории Демпстера–Шейфера (теории свидетельств) являются понятия функций доверия и правдоподобия. Пусть  $X$  – конечное универсальное множество и  $2^X$  – множество всех подмножеств из  $X$ . Рассмотрим меру доверия (или функцию доверия, belief function) [79]  $g : 2^X \rightarrow [0,1]$ . В теории свидетельств [78] значение  $g(A)$ ,  $A \in 2^X$ , интерпретируется как степень доверия к тому, что истинная альтернатива из  $X$  принадлежит множеству  $A$  [79]. Функция доверия  $g$  определяется с помощью функции множеств  $m_g(A)$ , которая называется базовым вероятностным назначением (бвн). Эта функция должна удовлетворять следующим условиям [78]:

$$m_g : 2^X \rightarrow [0,1], m_g(\emptyset) = 0, \sum_{A \subseteq X} m_g(A) = 1. \quad (4.11)$$

Тогда  $g(A) = \sum_{B: B \subseteq A} m_g(B)$ . Обозначим множество всех функций доверия на  $2^X$  через  $Bel(X)$ .

Вместе с функцией доверия  $g$  в теории свидетельств рассматривается также и двойственная ей функция  $\bar{g}$ , которая называется функцией правдоподобия и вычисляется как  $\bar{g}(A) = 1 - g(\bar{A})$ ,  $A \in 2^X$ .

Обратно, базовое вероятностное назначение  $m_g$  может быть вычислено по функции доверия  $g$  с помощью, так называемого преобразования Мёбиуса:  $m_g(B) = \sum_{A:A \subseteq B} (-1)^{|B \setminus A|} g(A)$ .

Функции доверия и правдоподобия могут рассматриваться как нижняя и верхняя оценки вероятности события. Действительно, для любой меры доверия  $g$  может быть найдена такая вероятность  $p$ , что  $g(A) \leq p(A) \leq \bar{g}(A)$  для всех  $A \in 2^X$ . Тогда пара  $(g(A), \bar{g}(A))$  характеризует неопределенность вероятности события  $A$ .

Функция доверия имеет следующую статистическую интерпретацию. Пусть  $N$  экспертов высказали свои мнения (свидетельства) о значениях некоторой переменной  $x \in X$ . Причем  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , экспертов из  $N$  предположили, что  $x \in A_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , где  $A_i \in 2^X$ . Имеем  $\sum_{i=1}^k c_i = N$ . Пусть  $m(A_i) = c_i/N$  – частота события  $\{x \in A_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Подмножество  $A \in 2^X$  называется фокальным элементом, если  $m(A) > 0$ . Пусть  $\mathcal{A}$  – множество всех фокальных элементов. Тогда функция множеств  $m(A)$ , если  $A \in \mathcal{A}$  и  $m(A) = 0$  в противном случае удовлетворяет условию (4.11). Пара  $F = (\mathcal{A}, m)$  называется телом свидетельств. Будем обозначать через  $\mathcal{A}(g)$  и  $F(g)$  множества всех фокальных элементов и тело свидетельств соответственно, связанных с функцией доверия  $g$ .

Замечание 4.2. Без усложнения дальнейшего изложения можно рассматривать также свидетельства, имеющие конечное множество фокальных элементов, определенных на бесконечном базовом множестве  $X$  (например,  $X = \mathbb{R}$  – числовая прямая).

#### 4.3.1.2 Правила комбинирования свидетельств

Предположим, что есть два тела свидетельств  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$ , связанных с функциями доверия  $g_1, g_2 \in Bel(X)$ . Например, это могут быть свидетельства, полученные от двух источников информации. Тогда может быть поставлена задача комбинирования этих двух свидетельств в одно свидетельство. В рамках теории Демпстера–Шейфера рассматриваются различные правила комбинирования. В общем случае правило комбинирования – это некоторый оператор  $R: Bel(X) \times Bel(X) \rightarrow Bel(X)$ . Детальный и критичный обзор правил комбинирования можно найти в отчете [77]. Ниже рассмотрим только несколько основных правил комбинирования.

a) Правило Демпстера. Это правило было введено в работе [33] и обобщено в [78] для комбинирования произвольных независимых свидетельств. Оно определяется следующим образом

$$m_D(A) = \frac{1}{1 - K} \sum_{A_1 \cap A_2 = A} m_{g_1}(A_1)m_{g_2}(A_2), \quad A \neq \emptyset, \quad m_D(\emptyset) = 0,$$

$$K = K(g_1, g_2) = \sum_{A_1 \cap A_2 = \emptyset} m_{g_1}(A_1)m_{g_2}(A_2). \quad (4.12)$$

Величина  $K(g_1, g_2)$  характеризует количество конфликта в двух источниках информации, которые задаются с помощью тел свидетельств  $F(g_1)$  и  $F(g_2)$ . Если  $K(g_1, g_2) = 1$ , то это означает, что источники информации абсолютно конфликтны и правило Демпстера не может быть применено. Это правило было подвергнуто многочисленной критике [34, 37, 80, 86, 88, 91], в результате которой были предложены новые правила комбинирования.

b) Правило дисконтирования. Это правило было введено Шафером [78]. Основная идея состояла в использовании некоторого коэффициента  $\alpha \in [0, 1]$  для дисконтирования базовых вероятностей:  $m^\alpha(A) = (1 - \alpha)m(A)$ ,  $A \neq X$ ,  $m^\alpha(X) = \alpha + (1 - \alpha)m(X)$ . Этот коэффициент характеризует степень надежности информации: если  $\alpha = 0$ , то источник информации считается абсолютно

надежным. Если же  $\alpha = 1$ , то источник информации абсолютно ненадежен. После дисконтирования базовых вероятностных назначений применяется правило Демпстера (4.12). Если  $\alpha \in (0,1)$ , то правило дисконтирования (4.12) может применяться для любых тел событий (в этом случае значение  $K \neq 0$ ).

с) Правило комбинирования Ягера. Это правило было введено в работе [89] и определяется следующим образом

$$q(A) = \sum_{A_1 \cap A_2 = A} m_{g_1}(A_1)m_{g_2}(A_2), \quad A \in 2^X, \quad (4.13)$$

$$m_Y(A) = q(A), \quad A \neq \emptyset, X, \quad m_Y(\emptyset) = q(\emptyset) = K, \quad m_Y(X) = m_Y(\emptyset) + q(X),$$

где значение  $K = K(g_1, g_2)$  определяется так же, как и в (4.12). Значение  $q(X) = m_{g_1}(X)m_{g_2}(X)$  характеризует количество незнания в двух телах свидетельств  $F(g_1)$  и  $F(g_2)$ . Поэтому правило Ягера использует информацию о конфликте (значение  $q(\emptyset) = K$ ) и незнании (значение  $q(X)$ ) только при вычислении базовых вероятностных назначений универсального множества  $X$ . Этот подчеркивает «осторожность» этого правила.

д) Модифицированное правило комбинирования Инагаки [49]. Это правило определяется с помощью функции  $q(A)$ , которая использовалась Ягером [88] в (4.13) и неотрицательного параметра  $k$ :

$$m_I(A) = q(A)(1 + kq(\emptyset)), \quad A \neq X, \quad m_I(X) = q(X)(1 + kq(\emptyset)) + q(\emptyset)(1 + kq(\emptyset) - k),$$

где  $0 \leq k \leq 1/(1 - q(\emptyset) - q(X))$ . Если  $k = 0$ , то мы получим правило Ягера. Если  $k = 1/(1 - q(\emptyset))$ , то получим правило Демпстера. Поэтому правило Инагаки использует информацию о конфликте и незнании при вычислении базовых вероятностных назначений всех множеств с коэффициентом  $(1 + kq(\emptyset))$ , который регулирует соотношение между конфликтом и незнанием.

е) Правило комбинирования Цанга. Это правило было введено в работе [92] и задается следующим образом

$$m_Z(A) = \sum_{A_1 \cap A_2 = A} r(A_1, A_2) m_{g_1}(A_1) m_{g_2}(A_2), \quad A \in 2^X,$$

где  $r(A_1, A_2)$  – мера пересечения множеств  $A_1$  и  $A_2$ . Например,  $r(A_1, A_2) = c|A_1 \cap A_2| / \min\{|A_1|, |A_2|\}$  – подобность Симпсона [7] или  $r(A_1, A_2) = c|A_1 \cap A_2| / |A_1 \cup A_2|$  – подобность Жаккарда [7], где  $c > 0$  – нормирующий множитель.

f) Дизъюнктивное правило консенсуса Дюбуа–Прада [36]:

$$m_{DP}(A) = \sum_{A_1 \cup A_2 = A} m_{g_1}(A_1) m_{g_2}(A_2), \quad A \in 2^X.$$

Существуют и другие правила комбинирования. Приведенные примеры правил комбинирования показывают, что при комбинировании свидетельств важно учитывать информацию о конфликте и незнании этих свидетельств. Ниже будут определены функционалы, с помощью которых может быть оценено количество конфликта и незнания в конкретной ситуации комбинирования свидетельств.

#### 4.3.2 Изменение незнания

Эффективность применения правил комбинирования может быть оценено количеством уменьшения незнания после применения того или иного правила комбинирования. Для вычисления количества незнания будем использовать понятие индекса неточности. В общем случае индекс неточности  $f$  определяется на множестве  $Bel(X)$  и характеризует степень отклонения (меру неопределенности) функции доверия  $g$  от вероятностной меры. Ниже будет показано, что значение меры неопределенности можно рассматривать как показатель информационного незнания, содержащейся в мере  $g$ . То или иное правило комбинирования есть смысл применять только в том случае, если после его применения уровень незнания уменьшится. Степень уменьшения незнания может быть оценена с помощью сравнения значения  $f(g)$  с  $f(g_1)$ .

и  $f(g_2)$ , где  $g$  – функция доверия после комбинирования свидетельств  $F(g_1)$  и  $F(g_2)$ .

#### 4.3.2.1 Индекс неточности

Измерение неопределенности играет важную роль в различных «неопределеностных» теориях: теории вероятностей, теории возможностей, теории свидетельств, теории информации, теории нечетких множеств и т.д. Существует несколько подходов к определению меры неопределенности в теории свидетельств. Ниже будем придерживаться подхода, который был введен в работах [3,26].

Предположим, что нам только известно, что истинная альтернатива принадлежит непустому множеству  $B \subseteq X$ . Эта ситуация может быть описана с помощью неаддитивной меры (так называемой примитивной меры доверия)

$$\eta_{\langle B \rangle}(A) = \begin{cases} 1, & B \subseteq A \\ 0, & B \not\subseteq A \end{cases}, \quad A \subseteq X, B \neq \emptyset,$$

которая дает нижнюю вероятность события  $A$ . Степень неопределенности такой меры описывается с помощью известной меры Хартли  $H(\eta_{\langle B \rangle}) = \log_2 |B|$ , которая характеризует степень неточности информации о принадлежности «истинной» альтернативы множеству  $B \subseteq X$ .

Обобщением этой ситуации является следующая конструкция. Пусть  $g \in Bel(X)$ . Рассмотрим пару  $(g, \bar{g})$ ,  $g(A) \leq \bar{g}(A)$  для всех  $A \in 2^X$ ,  $g(\emptyset) = \bar{g}(\emptyset) = 0$ . Предположим, что существует такая вероятностная мера  $P$  на  $2^X$ , что  $g(A) \leq P(A) \leq \bar{g}(A)$  для всех  $A \in 2^X$ . Другими словами, функции множеств  $g, \bar{g}$  дают нам нижнюю и верхнюю границы вероятности и для любого события  $A \in 2^X$  мы имеем только интервал  $[g(A), \bar{g}(A)]$  возможных значений «истинной» вероятности  $P(A)$ .

Существует обобщение меры Хартли. Пусть  $g$  – функция доверия, которая может быть представлена в виде  $g = \sum_{B \in 2^X} m(B) \eta_{\langle B \rangle}$ , где  $m(\emptyset) = 0$ ,

$m(B) \geq 0$  для всех  $B \in 2^X$  и  $\sum_{B \in 2^X} m(B) = 1$ . Тогда обобщенная мера Хартли определяется как [35,47]

$$GH(g) = \sum_{B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}} m(B) \log_2 |B|. \quad (4.14)$$

Замечание 4.3. Обобщенную меру Хартли можно рассматривать и в том случае, когда функция доверия  $g$  задана на конечном множестве фокальных элементов бесконечного множества  $X$ . Если  $X$  – множество конечной меры некоторого пространства с мерой  $(E, \mathcal{F}, \mu)$  и  $A \subseteq X$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , то в качестве  $|A|$  можно использовать  $|A| = 1 + \mu(A)$ .

Определение 4.1 [3]. Функционал  $f : Bel(X) \rightarrow [0,1]$  называется индексом неточности, если он удовлетворяет следующим условиям: 1)  $f(g) = 0$ , если  $g$  – вероятностная мера; 2)  $f(g_1) \geq f(g_2)$  для всех таких  $g_1, g_2 \in Bel(X)$ , что  $g_1 \leq g_2$  (т.е.  $g_1(A) \leq g_2(A)$  для всех  $A \in 2^X$ ); 3)  $f(\eta_{\langle X \rangle}) = 1$ .

Индекс неточности  $f$  на  $Bel(X)$  называется линейным, если для любой линейной комбинации  $\sum_{j=1}^k \alpha_j g_j \in Bel(X)$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $g_j \in Bel(X)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , имеем  $f\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j g_j\right) = \sum_{j=1}^k \alpha_j f(g_j)$ .

Замечание 4.4. Будем писать  $g_1 < g_2$  для  $g_1, g_2 \in Bel(X)$ , если  $g_1 \leq g_2$  и  $g_1 \neq g_2$ . Заметим, что функция доверия  $g$  может быть представлена как линейная комбинация примитивных функций доверия  $\eta_{\langle B \rangle}$ :

$$g = \sum_{B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}} m_g(B) \eta_{\langle B \rangle}. \quad (4.15)$$

Множество  $\{\eta_{\langle B \rangle}\}$ ,  $B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ , является базисом в множестве  $Bel(X)$  в том смысле, что любая функция доверия  $g \in Bel(X)$  представляется единственным образом как выпуклая комбинация примитивных мер  $\{\eta_{\langle B \rangle}\}$ ,  $B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ . С другой стороны, любой линейный функционал  $f$  на  $Bel(X)$

определяется единственным образом своими значениями на указанном базисе в  $Bel(X)$ . Это позволяет определить  $f$  с помощью функции множеств  $\mu_f : 2^X \rightarrow \mathbb{R}$  в соответствии со следующим правилом  $\mu_f(B) = f(\eta_{\langle B \rangle})$ ,  $B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ . Нетрудно видеть, что из антимонотонности функционала  $f$  (условие 2) Определения 4.1) и неравенства  $\eta_{\langle B' \rangle} \geq \eta_{\langle B'' \rangle}$ , если  $B' \subseteq B''$ , следует монотонность функции множеств  $\mu_f(B)$ . Положим по определению что  $\mu_f(\emptyset) = 0$  для любого индекса неточности  $f$ . В работе [26] были найдены различные представления индекса неточности. В этом исследовании использовалось простейшее представление, которое может быть непосредственно получено из Определения 4.1 и формулы (4.15).

Утверждение 4.1. Функционал  $f : Bel(X) \rightarrow [0,1]$  является линейным индексом неточности на  $Bel(X)$  тогда и только тогда, когда

$$f(g) = \sum_{B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}} m_g(B) \mu_f(B), \quad (4.16)$$

где функция множеств  $\mu_f$  удовлетворяет условиям: 1)  $\mu_f(\{x\}) = 0$  для любых  $x \in X$ ; 2)  $\mu_f(X) = f(\eta_{\langle X \rangle}) = 1$ ; 3)  $\sum_{B: A \subseteq B} (-1)^{|B \setminus A|} \mu_f(B) \leq 0$  для всех  $A \neq \emptyset, X$ .

Обобщенная нормализованная мера Хартли  $GH_0 = GH / \log_2 |X|$  (см. (4)) является примером линейного индекса неточности. Формулы (4.14) и (4.16) показывают, что линейный индекс неточности  $f$  определяет некоторое распределение на теле свидетельств. Это распределение имеет плотность  $\mu_f$ . Большие значения плотности соответствуют фокальным элементам, имеющим большую мощность (см. условие 3) в Утверждении 4.1). Наличие больших по мощности и весу свидетельств характеризует большую степень незнания. Поэтому значение линейного индекса неточности  $f(g)$  оценивает степень такого незнания.

Замечание 4.5. Нетрудно показать, что множество всех линейных индексов неточности является выпуклым.

#### 4.3.2.2 Индекс уменьшения незнания

Предположим, что мы имеем два тела свидетельств  $F(g_1) = (\mathcal{A}^{(1)}, m^{(1)})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}^{(2)}, m^{(2)})$ , которые определены на множестве  $X$  и отвечают двум функциям доверия  $g_1$  и  $g_2$  соответственно. Пусть  $f : Bel(X) \rightarrow [0,1]$  некоторый линейный индекс неточности, с помощью которого оценивается степень незнания, содержащейся в информации, задаваемой функцией  $g$ . Предположим, что мы используем некоторое правило комбинирования  $R$  для агрегирования свидетельств  $F(g_1)$  и  $F(g_2)$ . В результате мы получим новую функцию доверия  $g = R(g_1, g_2)$ . Тогда может быть поставлен вопрос о величине уменьшения незнания после применения правила комбинирования  $R$ . Величина такого уменьшения может быть оценена с помощью сравнения  $f(g)$  с  $f(g_1)$  и  $f(g_2)$ . Например, может быть введен следующий индекс уменьшения незнания

$$I_R(g_i | g_j) = f(g_i) - f(R(g_i, g_j)), \quad i, j \in \{1, 2\},$$

$$I_R(g_1, g_2) = \min\{I_R(g_1 | g_2), I_R(g_2 | g_1)\}.$$

Уменьшение незнания соответствует случаю положительности индекса  $I_R(g_1, g_2)$ .

Рассмотрим изменение незнания при комбинировании тел событий определенных видов. Важным типом пар тел свидетельств при комбинировании является пара следующего вида, которую назовем парой согласованных тел свидетельств.

Предположим, что множества фокальных элементов  $\mathcal{A}(g_1)$  и  $\mathcal{A}(g_2)$ , связанные с функциями доверия  $g_1, g_2 \in Bel(X)$ , удовлетворяют условиям:

- 1)  $A' \cap A'' = \emptyset, B' \cap B'' = \emptyset$  для всех  $A', A'' \in \mathcal{A}(g_1), B', B'' \in \mathcal{A}(g_2)$ ;
- 2) для любого множества  $A \in \mathcal{A}(g_1)$  найдется такое единственное множество  $B \in \mathcal{A}(g_2)$ , что  $A \cap B \neq \emptyset$ ;
- 3) для любого множества  $B \in \mathcal{A}(g_2)$  найдется такое единственное множество  $A \in \mathcal{A}(g_1)$ , что  $A \cap B \neq \emptyset$ .

Согласованные свидетельства появляются, например, в тех случаях, когда два эксперта дают информацию в «заранее очерченных рамках» (например, оптимистичный и пессимистичный сценарии развития какой-либо ситуации).

Таким образом, для пары согласованных тел свидетельств существует взаимно однозначное соответствие  $\varphi$  между элементами множеств  $\mathcal{A}(g_1)$  и  $\mathcal{A}(g_2)$ . Если кроме условий 1)–3), множества фокальных элементов удовлетворяют также условию

- 4)  $A \subseteq \varphi(A)$  для всех  $A \in \mathcal{A}(g_1)$ , то такую ситуацию будем называть уточняющим телом свидетельств (тело свидетельств  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  уточняет тело свидетельств  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$ ).

Поставим вопрос об уменьшении незнания после применения правила комбинирования к паре согласованных тел свидетельств. Оказывается, что ответ на этот вопрос зависит от того, какое правило комбинирования используется. Сформулируем результат об уменьшении незнания после применения правила комбинирования Демпстера к паре согласованных тел свидетельств.

Утверждение 4.2. Пусть  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$  – два тела свидетельств, удовлетворяющие условиям 1)–3). Тогда уменьшения незнания  $I_D(g_1, g_2)$  будет положительным для правила Демпстера, если выполняется следующее условие:

$$\sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} m_{g_1}(A)m_{g_2}(\varphi(A)) >$$

$$\max_{A \in \mathcal{A}(g_1)} \frac{\mu_f(A \cap \varphi(A))}{\mu_f(A)\mu_f(\varphi(A))} \max \left\{ m_{g_1}(A)\mu_f(A), m_{g_2}(\varphi(A))\mu_f(\varphi(A)) \right\}. \quad (4.17)$$

Условие (4.17) несколько упрощается в случае комбинирования уточняющих тел свидетельств с помощью правила Демпстера.

Следствие 4.1. Пусть два тела свидетельств  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$  удовлетворяют условиям 1)–4). Тогда индекс уменьшения незнания  $I_D(g_1, g_2)$  будет положительным для правила Демпстера, если справедливо следующее условие:

$$\sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} m_{g_1}(A)m_{g_2}(\varphi(A)) > \max_{A \in \mathcal{A}(g_1)} \max \left\{ m_{g_1}(A) \frac{\mu_f(A)}{\mu_f(\varphi(A))}, m_{g_2}(\varphi(A)) \right\}. \quad (4.18)$$

Замечание 4.6. Выражение слева в (4.17) (или (4.18)) представляет собой аналог «скалярного произведения» двух тел векторов-свидетельств (или корреляцию между двумя телами свидетельств). Поэтому это выражение имеет тем большее значение, чем «более коллинеарны» (или согласованы) вектора-свидетельства. Таким образом, неравенство (4.17) (или (4.18)) означает, что большая корреляция свидетельств является достаточным условием для уменьшения незнания после применения правила комбинирования Демпстера. Кроме того, для тел согласованных (и уточняющих) свидетельств величина конфликта  $K(g_1, g_2)$  будет вычисляться по формуле

$$K(g_1, g_2) = 1 - \sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} m_{g_1}(A)m_{g_2}(\varphi(A)).$$

Поэтому условиям (4.17) или (4.18) можно интерпретировать так: для уменьшения незнания после применения правила комбинирования Демпстера достаточно, чтобы конфликтность свидетельств  $K(g_1, g_2)$  была не очень большой. В тоже время, корреляция между векторами-свидетельствами должна быть достаточно большой. Даже при комбинировании одинаковых тел свидетельств условие (4.17) (и (4.18)) не выполняется – комбинирование с помощью правила Демпстера одинаковых свидетельств не уменьшает ко-

личество незнания. Более того, это условие не выполняются, если согласованные фокальные элементы тел свидетельств – одинаковы, а базовые вероятностные назначения – различны. Условие (4.17) в этом случае примет вид:

$\sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} m_{g_1}(A)m_{g_2}(A) > \max_{A \in \mathcal{A}(g_1)} \max \{m_{g_1}(A), m_{g_2}(A)\}$ . Другими словами, для уменьшения количества незнания согласованные фокальные элементы комбинируемых свидетельств должны быть различны.

Пример 4.14. Эксперты двух агентств делают прогноз о стоимости акций некоторой компании, предполагая два сценария экономического развития. В первом агентстве 6 экспертов высказались за стоимость акций в промежутке [5,7) у.е., предполагая стагнацию экономики, а 4 эксперта – [9,10) в предложении экономического роста. Во втором агентстве в первом случае 5 экспертов дали прогноз [5,8), а 3 эксперта – [8,10). Оценим конфликт и уменьшение незнания при комбинировании с помощью правила Демпстера этих свидетельств.

Решение. В данном случае имеем два уточняющих тела свидетельств  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$ , где  $\mathcal{A}(g_1) = \{A_1, A_2\}$ ,  $\mathcal{A}(g_2) = \{B_1, B_2\}$ , причем  $A_1 = [5,6)$ ,  $A_2 = [9,11)$ ,  $B_1 = [5,7)$ ,  $B_2 = [8,11)$ ,  $m_{g_1}(A_1) = \frac{6}{10}$ ,  $m_{g_1}(A_2) = \frac{4}{10}$ ,  $m_{g_2}(B_1) = \frac{5}{8}$ ,  $m_{g_2}(B_2) = \frac{3}{8}$ . Пусть  $X = [5,11)$  и для  $A = [a,b] \subseteq X$  положим  $|A| = 1 + b - a$  (см. Замечание 4.3). Величина конфликта тел свидетельств  $F(g_1)$  и  $F(g_2)$  будет равна  $K = K(g_1, g_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{19}{40}$ . После применения правила Демпстера получим комбинированное свидетельство  $F(g) = (\mathcal{A}(g), m_g)$  с  $\mathcal{A}(g) = \mathcal{A}(g_1) \cup \mathcal{A}(g_2)$  и  $m_g(A_1) = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{8}}{1 - K} = \frac{5}{7}$ ,  $m_g(A_2) = \frac{2}{7}$ . Найдем значения индексов неточности  $f(g)$  и  $f(g_i)$ ,  $i = 1, 2$ , с помощью обобщенной меры Хартли. Имеем

$$f(g_1) = \frac{6}{10} \ln 2 + \frac{4}{10} \ln 3, \quad f(g_2) = \frac{5}{8} \ln 3 + \frac{3}{8} \ln 4, \quad f(g) = \frac{5}{7} \ln 3 + \frac{2}{7} \ln 2.$$

Тогда  $f(g_1) - f(g) = -\frac{4}{35} \ln 2 + \frac{4}{35} \ln 3 > 0$ ,  $f(g_2) - f(g) = -\frac{5}{56} \ln 3 + \frac{26}{56} \ln 2 > 0$ .

Таким образом, индекс уменьшения незнания будет равен  $I_D(g_1, g_2) = \min\{f(g_i) - f(g)\} = \frac{4}{35} \ln \frac{3}{2}$ . Другими словами, количество незнания после комбинирования свидетельств по правилу Демпстера уменьшится на величину  $\frac{4}{35} \ln \frac{3}{2}$ , т.е. примерно на 4,6%.

Рассмотрим теперь вопрос об изменении индекса незнания при использовании правила комбинирования Ягера.

Утверждение 4.3. Пусть  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$  – два тела свидетельств, удовлетворяющие условиям 1)–3). Тогда индекс уменьшения незнания  $I_Y(g_1, g_2)$  будет положительным для правила Ягера тогда и только тогда, когда

$$\sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} m_{g_1}(A)m_{g_2}(\varphi(A))\left(1 - \mu_f(A \cap \varphi(A))\right) > \max \left\{ \sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} m_{g_1}(A)\left(1 - \mu_f(A)\right), \sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} m_{g_2}(\varphi(A))\left(1 - \mu_f(\varphi(A))\right) \right\}.$$

Однако индекс незнания не может быть уменьшен с помощью правила Ягера при комбинировании уточняющих тел свидетельств.

Следствие 4.2. Пусть два тела свидетельств  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$  удовлетворяют условиям 1)–4). Тогда индекс уменьшения незнания  $I_Y(g_1 | g_2) = f(g_1) - f(Y(g_1, g_2))$  будет неположительным для правила Ягера.

#### 4.3.3 Мера конфликта

Пусть  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$  – два тела свидетельств на  $X$ , связанные с функциями доверия  $g_1$  и  $g_2$  соответственно. Величина  $K(g_1, g_2)$ , вычисляемая по формуле (4.12) и численно равная сумме произведений базовых вероятностных назначений непересекающихся фокальных элементов двух тел свидетельств, характеризует количество конфликта в

двух источниках информации, которые задаются с помощью тел свидетельств  $F(g_1)$  и  $F(g_2)$ . Если  $K(g_1, g_2) = 1$ , то это означает, что в двух источниках информации нет свидетельств, содержащих общие элементы. В этом случае можно считать, что источники информации абсолютно конфликтны. Правило Демпстера в такой ситуации неприменимо. Величину  $K(g_1, g_2)$  будем называть канонической мерой конфликта, связанного с функциями доверия  $g_1$  и  $g_2$ . Однако конфликтность двух источников информации будет большой и в том случае, если эти источники представлены свидетельствами, у которых есть общие элементы, но их количество мало по сравнению с мощностью сравниваемых фокальных элементов. Поэтому аксиоматически введем понятие меры конфликта тел свидетельств  $F(g_1)$  и  $F(g_2)$ , отражающих указанное наблюдение. В общем случае такая мера будет зависеть от степени пересечения двух множеств.

Пусть  $r : 2^X \times 2^X \rightarrow [0,1]$  – некоторый коэффициент пересечения множеств, удовлетворяющий условиям:

- 1)  $r(A, B) = r(B, A)$ ;
- 2)  $r(A, B) = 0$ , если  $A \cap B = \emptyset$ ;
- 3)  $r(A, A) = 1$ ,  $A \neq \emptyset$ .

Примером коэффициента пересечения множеств является так называемая подобность перекрытия Симпсона [7]  $r(A, B) = |A \cap B| / \min\{|A|, |B|\}$ , если  $A \neq \emptyset$  и  $B \neq \emptyset$ .

Определение 4.2. Функционал  $c_r : Bel(X) \times Bel(X) \rightarrow [0,1]$  называется мерой конфликта относительно коэффициента пересечения множеств  $r$ , если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $c_r(g_1, g_2) = c_r(g_2, g_1)$  для всех  $g_1, g_2 \in Bel(X)$ ;
- 2)  $c_r(g', g) \geq c_r(g'', g)$ , если  $F(g') = F \cup (A', m)$ ,  $F(g'') = F \cup (A'', m)$  и  $r(A', B) \leq r(A'', B)$  для всех  $B \in \mathcal{A}(g)$ ;

3)  $c_r(g_1, g_2) = 1$ , если  $A \cap B = \emptyset$  для всех  $A \in \mathcal{A}(g_1)$ ,  $B \in \mathcal{A}(g_2)$ .

Первая аксиома это условие симметричности меры относительно двух источников свидетельств. Вторая аксиома – условие антимонотонности меры конфликта относительно степени пересечения двух свидетельств: чем меньше степень пересечения, тем больше конфликт. Третья аксиома – условие нормировки: мера конфликта равна единице в случае наиболее конфликтной ситуации, когда два тела свидетельств не имеют пересекающихся фокальных элементов. Алгебраически наиболее простой мерой конфликта двух тел свидетельств (или соответствующих функций доверия) является мера, линейная по каждому аргументу. Введем соответствующее понятие.

Мера конфликта  $c_r$  на  $Bel(X) \times Bel(X)$  называется билинейной, если  $c_r(\alpha g_1 + \beta g_2, g) = \alpha c_r(g_1, g) + \beta c_r(g_2, g)$  для всех  $\alpha, \beta \in [0,1]$ ,  $\alpha + \beta = 1$ ,  $g, g_1, g_2 \in Bel(X)$ .

Утверждение 4.4. Функционал  $c_r$  – билинейная мера конфликта на  $Bel(X) \times Bel(X)$  тогда и только тогда, когда

$$c_r(g_1, g_2) = \sum_{A \in \mathcal{A}(g_1), B \in \mathcal{A}(g_2)} \gamma(A, B) m_{g_1}(A) m_{g_2}(B) = K(g_1, g_2) + \sum_{A \cap B \neq \emptyset} \gamma(A, B) m_{g_1}(A) m_{g_2}(B), \quad (4.19)$$

где  $\gamma(A, B) \in [0,1]$  удовлетворяют условиям:

- a)  $\gamma(A, B) = \gamma(B, A)$ ;
- б)  $\gamma(A', B) \geq \gamma(A'', B)$ , если  $r(A', B) \leq r(A'', B)$ ;
- в)  $\gamma(A, B) = 1$ , если  $A \cap B = \emptyset$ .

Из формулы (4.19) следует, что каноническая мера конфликта  $K(g_1, g_2)$  является наименьшей из всех билинейных мер конфликта:  $c_r(g_1, g_2) \geq K(g_1, g_2)$ .

Например, коэффициенты  $\gamma(A, B) = c_r(\eta_{\langle A \rangle}, \eta_{\langle B \rangle}) = \psi(r(A, B))$ ,  $A, B \neq \emptyset$ ,

будут удовлетворять условиям а) – в) Утверждения 4.4, если  $\psi$  – невозрастающая функция,  $\psi(1) = 0$ ,  $\psi(0) = 1$  и  $r(A, B) = |A \cap B| / \min\{|A|, |B|\}$ . В частности, если

$$r(A, B) = \begin{cases} 1, & A \cap B \neq \emptyset, \\ 0, & A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

– примитивная мера пересечения, то  $c_r(g_1, g_2) = K(g_1, g_2)$ .

Мера конфликта может быть использована для предварительного оценивания количества конфликта двух свидетельств.

Пример 4.15. Пусть  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$  являются двумя согласованными телами свидетельств (см. подпункт 4.3.2.2). Тогда

$$c_r(g_1, g_2) = 1 - \sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} (1 - \gamma(A, \varphi(A))) m_{g_1}(A) m_{g_2}(\varphi(A)).$$

В частности, если  $\gamma(A, B) = 1 - r(A, B) = 1 - |A \cap B| / \min\{|A|, |B|\}$ , то

$$c_r(g_1, g_2) = 1 - \sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} \frac{|A \cap \varphi(A)|}{\min\{|A|, |\varphi(A)|\}} m_{g_1}(A) m_{g_2}(\varphi(A)).$$

Если же мы имеем два уточняющих тела свидетельств, то последнее выражение упрощается следующим образом

$$c_r(g_1, g_2) = K = 1 - \sum_{A \in \mathcal{A}(g_1)} m_{g_1}(A) m_{g_2}(\varphi(A)).$$

#### 4.3.4 Зависимость между конфликтом и незнанием

Исследуем зависимость между мерой конфликта и индексом уменьшения незнания в случае комбинирования разных видов свидетельств и применения различных правил комбинирования. Возможно как аналитическое исследование указанной зависимости, так и вероятностное в предположении,

что комбинированные свидетельства определенного вида выбираются в соответствии с некоторым вероятностным законом. В последнем случае оценки вероятностных распределений и характеристик можно получить методом статистических испытаний.

#### 4.3.4.1 Статистическое исследование

Проведем исследование зависимости между мерой конфликта и индексом уменьшения незнания в случае комбинирования по правилу Демпстера двух тел свидетельств  $F(g_1) = (\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2) = (\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$ , причем  $|\mathcal{A}(g_1)| = |\mathcal{A}(g_2)| = 2$ . Рассмотрим три вида комбинируемых тел свидетельств: 1) общий вид; 2) согласованные свидетельства; 3) уточняющие свидетельства. В качестве меры конфликта будем использовать величину  $K = K(g_1, g_2)$  – каноническую меру конфликта, вычисляемую по формуле (4.12). Для статистического исследования осуществим равномерную генерацию фокальных элементов свидетельств определенного вида и базовых вероятностных назначений. Приведем некоторые результаты статистического исследования.

##### 1. Общий случай тел свидетельств.

В общем случае количество сильно конфликтных свидетельств больше числа слабо конфликтных свидетельств (см. рисунок 4.40).

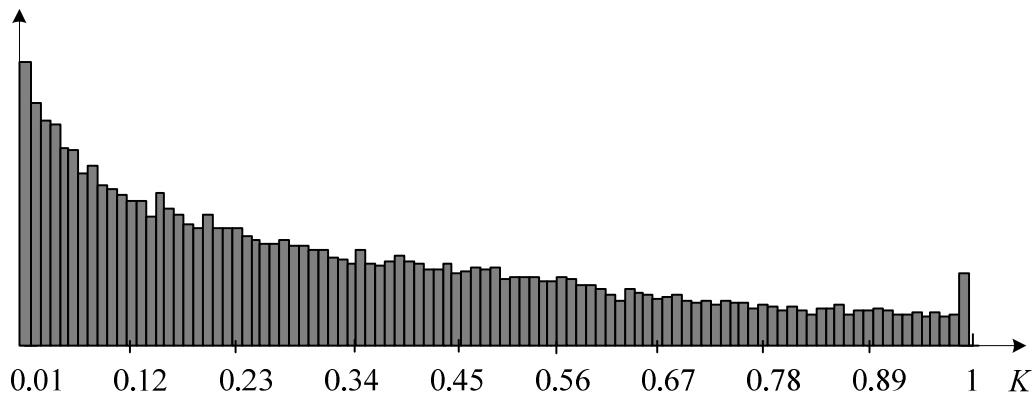


Рисунок 4.40 – Гистограмма меры конфликта двух свидетельств в общем случае

Распределение точек  $(K, I_D)$  при комбинировании двух свидетельств в общем случае показано на рисунке 4.41. Нетрудно видеть, что с увеличением значения меры конфликта среднее значение индекса уменьшения незнания уменьшается, оставаясь положительным. При этом величина разброса слабо возрастает.

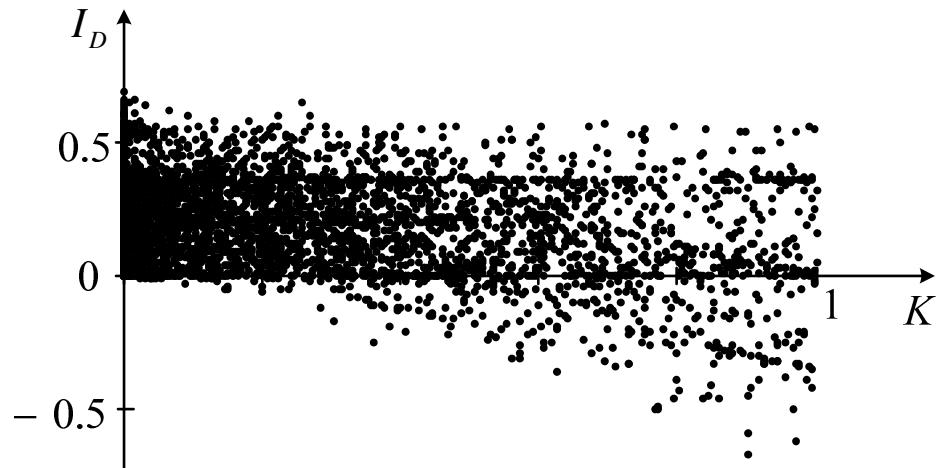


Рисунок 4.41 – Распределение точек  $(K, I_D)$  при комбинировании двух свидетельств в общем случае

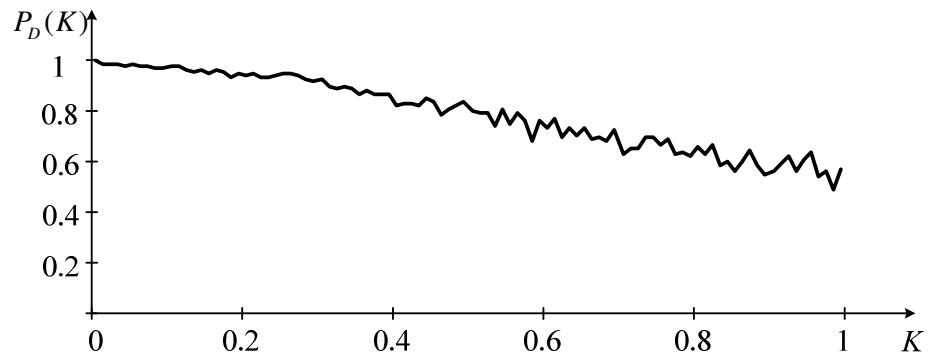


Рисунок 4.42 – Зависимость оценки условной вероятности  $P_D(K) = P\{I_D > 0 | K\}$  в случае комбинирования двух свидетельств в общем случае

Из рисунка 4.42 видно, что в общем случае комбинирования свидетельств вероятность неотрицательности индекса уменьшения незнания остается большей 0,5 для всех значений меры конфликта.

## 2. Уточняющие свидетельства.

Совсем другой характер распределения меры конфликта и зависимости между мерой конфликта и индексом уменьшения незнания будет при комбинировании уточняющих свидетельств. На рисунке 4.43 приведена гистограмма распределения меры конфликта  $K$  в этом случае. Гистограмма показывает, что чаще всего встречаются уточняющие свидетельства со средней конфликтностью.

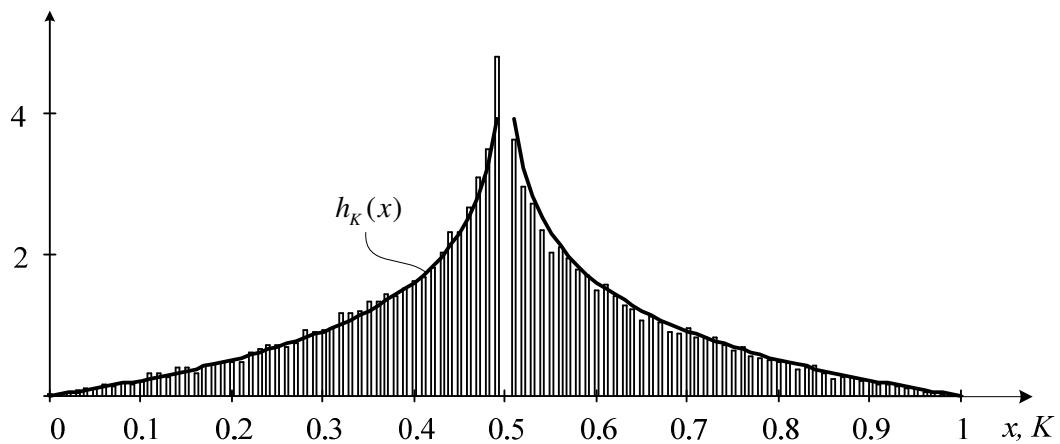


Рисунок 4.43 – Гистограмма меры конфликта двух уточняющих свидетельств

Из рисунка 4.44 видно, что в случае комбинирования уточняющих свидетельств с увеличением значения меры конфликта среднее значение индекса уменьшения незнания уменьшается и будет преимущественно отрицательным. При этом величина разброса резко возрастает.

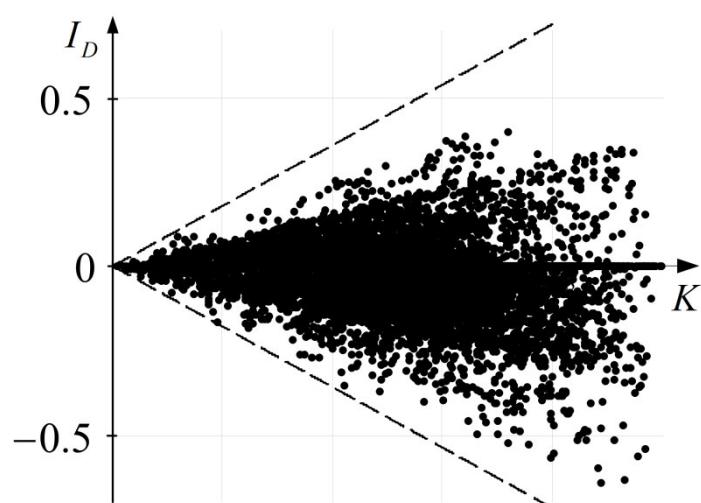


Рисунок 4.44 – Распределение точек  $(K, I_D)$  при комбинировании двух уточняющих свидетельств,  $|X| = 6$

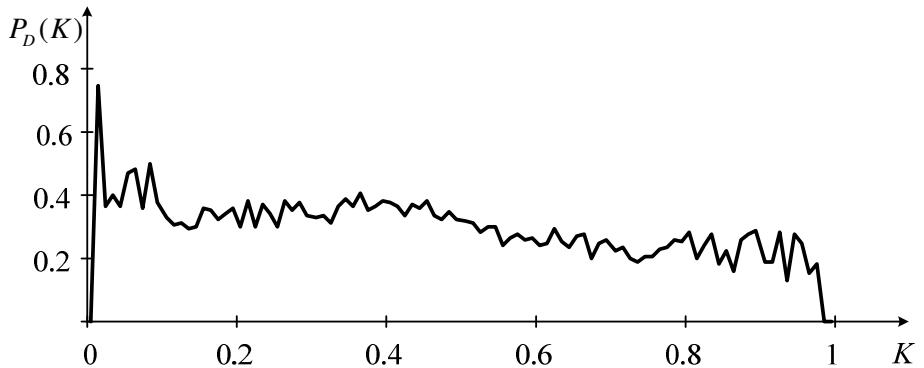


Рисунок 4.45 – Зависимость оценки условной вероятности  $P_D(K)=P\{I_D>0|K\}$  в случае комбинирования двух уточняющих

Из рисунка 4.45 видно, что в случае комбинирования уточняющих свидетельств вероятность неотрицательности индекса уменьшения незнания будет меньше 0,5 для большинства значений меры конфликта.

#### 4.3.4.2 Аналитическое исследование

Найдем сначала теоретические верхнюю и нижнюю оценки зависимости между мерой конфликта и индексом уменьшения незнания.

Рассмотрим индекс уменьшения незнания  $I_R(g_1, g_2)$  в случае комбинирования свидетельств по правилу  $R$  при условии, что мера конфликта  $c(g_1, g_2)=K$ ,  $g_1, g_2 \in Bel(X)$ ,  $|X|=n$ . Тогда величины

$$\bar{I}_R^{(n)}(K)=\sup\{I_R(g_1, g_2):c(g_1, g_2)=K\}, \underline{I}_R^{(n)}(K)=\inf\{I_R(g_1, g_2):c(g_1, g_2)=K\}$$

характеризуют верхнюю и нижнюю оценки уменьшения индекса незнания в зависимости от значения меры конфликта. Для величин  $\bar{I}_D^{(n)}(K)$  и  $\underline{I}_D^{(n)}(K)$  в случае комбинирования уточняющих свидетельств справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.5. Пусть  $F(g_1)=(\mathcal{A}(g_1), m_{g_1})$  и  $F(g_2)=(\mathcal{A}(g_2), m_{g_2})$  – два уточняющих тела свидетельств на  $X$ , связанные с функциями доверия  $g_1, g_2 \in Bel(X)$ ,  $|X|=n$ , соответственно, причем  $|\mathcal{A}(g_1)|=|\mathcal{A}(g_2)|=2$ . В случае комбинирования этих свидетельств по правилу Демпстера, вычислении ин-

декса уменьшения незнания с помощью обобщенной меры Хартли, а меры конфликта по формуле (4.12), справедливы оценки  $\bar{I}_D^{(n)}(K) \leq K^{\frac{\ln(n-1)}{\ln n}}$  и  $I_D^{(n)}(K) \geq -K^{\frac{\ln(n-1)}{\ln n}}$  для всех  $K \in (0,1)$ .

Замечание 4.7. Вычислительные эксперименты показывают, что неравенство для верхней оценки в Утверждении 4.5 является завышенным. В частности, можно показать, что для верхней оценки изменения индекса незнания для «полуконфликтной» ( $K = 0.5$ ) ситуации уточняющих свидетельств верно  $\bar{I}_D^{(n)}(0.5) \leq \frac{1}{\ln n} \ln\left(\frac{\sqrt{1+4n}-1}{2}\right)$ . По всей видимости, и в общем случае (из которого получается последняя доказанная оценка при  $K = 0.5$ )  $\bar{I}_D^{(n)}(K) \leq Ky$ , где  $y$  – положительный корень уравнения  $n^{Ky} + n^y = n$ .

На рисунке 4.36 графики верхней и нижней оценок функций  $\bar{I}_D^{(6)}(K)$  и  $I_D^{(6)}(K)$ , приведенные в Утверждении 4.5, отмечены пунктиром.

Найдем теперь теоретическое распределение меры конфликта в случае уточняющих свидетельств при условии, что базовые вероятностные назначения этих свидетельств распределены по равномерному закону.

Утверждение 4.6. Пусть два уточняющих тела свидетельств имеют мощность два, а их базовые вероятностные назначения распределены по равномерному закону. Тогда, случайная величина – каноническая мера конфликта  $K$ , вычисляемая по формуле (4.12), имеет плотность распределения, равную  $h_K(x) = -\ln|2x-1|$ ,  $x \in [0,1/2] \cup (1/2,1]$ .

На рисунке 4.43 график функции  $h_K(x)$  отмечен сплошной линией.

### 4.3.5 Некоторые выводы

В теории Демпстера–Шейфера существует проблема выбора правил комбинирования свидетельств. Решение этой проблемы связано с анализом количества незнания и конфликта, содержащейся в информации, представленной свидетельствами. В данном исследовании были введены индекс

уменьшения незнания и мера конфликта для вычисления количества незнания и конфликта свидетельств. Эти индекс и мера исследовались в случае комбинирования двух тел свидетельств, удовлетворяющих определенным условиям и для различных правил комбинирования. Показано, что большая корреляция между телами свидетельств является достаточным условием уменьшения незнания после применения правила комбинирования. Если мы имеем несколько тел свидетельств (например, имеется несколько источников информации), мы можем использовать введенные индекс и меру для оптимального выбора тел свидетельств для комбинирования. Кроме того, эти инструменты можно использовать и для обоснованного выбора правил комбинирования.

Результаты этого подраздела отражены в работах [12,13,52,54]:

1. Лепский А.Е. Соотношение между конфликтом и уменьшением незнания при комбинировании свидетельств// Нечеткие системы и мягкие вычисления, 8(1), 2013, с.25–42.
2. Lepskiy A. About Relation between the Measure of Conflict and Decreasing of Ignorance in Theory of Evidence// Proceedings of the 8th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT–13), Amsterdam – Beijing – Paris: Atlantis Press, 2013, pp.355–362.
3. Лепский А.Е. Об оценивании конфликта и уменьшения незнания в теории Демпстера–Шейфера// Сб. науч. трудов VII международной конференции «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте», Коломна, 20–22 мая, 2013. – М.: Физматлит, Т.1, 2013, с.436–448.
4. Lepskiy A. Estimation of Conflict and Decreasing of Ignorance in Dempster–Shafer Theory// Procedia Computer Science, 17, 2013, pp.1113–1120.

#### 4.4 Исследование устойчивости нахождения параметров симметрии зашумленных изображений

В этом подразделе приведены результаты исследования по анализу устойчивости нахождения параметров симметрии зашумленных изображений. Анализ симметрии объектов на изображении широко применяется при решении различных задач обработки и анализа изображений. Например, анализ симметрии может быть использован в процедурах распознавания объектов на изображении, анализе текстур [30], в алгоритмах сжатия изображений [31], при реконструкции изображения объекта по его видимой части [81] и т.д. В общем случае под геометрической симметрией в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  понимают подгруппу  $G$  евклидовой группы изометрий, сохраняющую некоторое множество  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  (которое в этом случае называют автоморфным относительно этой подгруппы, а сама подгруппа определяет тип симметрии). В природе существует несколько типов симметрии: осевая симметрия, поворотная симметрия, трансляционная симметрия, симметрия масштабирования, а также некоторые их парные комбинации [82]. В теории обработки и анализа изображений функцию изображений  $f$  называют симметричной в области  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) относительно преобразований из  $G$ , если  $I$  – автоморфная относительно  $G$  область и  $f(\mathbf{x}) = f(g\mathbf{x})$  для всех  $\mathbf{x} \in I$  и  $g \in G$ .

Традиционно выделяют два основных класса задач анализа симметрии изображений:

- обнаружения симметричных изображений объектов и определение меры симметрии (или расстояния симметрии – symmetry distance) этих объектов [50,90];
- определение осей симметрии или параметров симметрии [6,60].

Под мерой (или расстоянием) симметрии обычно понимают величину, характеризующую минимальную степень изменения формы изображения для преобразования его к симметричному виду [50,90]. Например, для точечного изображения мерой симметрии может быть минимальная сумма расстояний

между точками изображения и соответствующими точками симметричного изображения. Большой обзор по задачам симметрии изображений, алгоритмам обнаружения симметрий, параметров симметрии и меры симметричности приведен в работе [56]. Кроме того, в задачах анализа симметрии можно выделить две подзадачи: анализ локальной симметрии и глобальной симметрии. В первом случае речь идет об определении меры симметричности и параметров симметрии изображения в некоторой окрестности фиксированной точки. Во втором случае необходимо определить степень симметричности и параметры симметрии изображения в целом или выделенного объекта на изображении. Вторая задача является более сложной, поскольку связана с предварительным решением задачи сегментации изображений. В этом подразделе отчета основным объектом исследования являются глобальные симметрии. Существует множество алгоритмов обнаружения глобальной симметрии на изображениях (см. соответствующие ссылки в [56]). Как правило, каждый из этих алгоритмов можно отнести к одному из четырех основных подходов. Первый, так называемый прямой подход, основан на вычислении расстояния  $\|f_I - (f(F))_I\|$  (или аналогичной величины) между функцией изображение  $f_I$  объекта  $I$  и функцией изображения симметричного преобразования  $F$  объекта  $I$ . Для упрощения вычисления этого расстояния в качестве объекта  $I$  рассматривают точечное множество, состоящее, например, из угловых точек внешнего контура изображения объекта. Если такое точечное множество состоит из  $n$  точек, то вычислительная сложность прямого метода равна  $O(n \log n)$ . Однако такой способ обнаружения симметрий будет очень чувствителен к зашумлению точек. Другой подход к обнаружению симметрий состоит в использовании схемы голосования. Например, отражательная симметрия определяется двумя параметрами оси симметрии. Рассматривая всевозможные (или случайные) пары таких параметров (и соответствующую ось симметрии), определяют количество симметричных относительно этой оси точек-голосов. Прямая с наибольшим количеством «голосов»

объявляется осью симметрии. Эта процедура аналогична широко применяемому в анализе изображений преобразованию Hay [68]. Третий подход связан с применением некоторых базисных функций: функция изображения раскладывается по базисным функциям, после чего анализируется спектр разложения, который содержит информацию о типе симметрии. В качестве базисных используют, например, двумерные функции Уолша (Walsh functions) [89]. Применение преобразования Фурье в полярных координатах (так называемое преобразование Фурье–Меллина) для распознавания симметрий рассматривалось в работе [10]. Наконец, четвертая группа методов обнаружения симметрий связана с вычислением и анализом моментов функции изображения [60].

Значительно меньше в литератуределено внимания анализу влияния зашумления изображения на меру несимметричности и определению параметров симметрии. Ниже приведены результаты исследования влияния стационарного некоррелированного зашумления на нахождения оси симметрии. На первый взгляд представляется, что стационарное некоррелированное зашумление не должно влиять на нахождение оси симметрии. Однако как будет показано ниже (и подтверждено вычислительными экспериментами), для определенных мер несимметричности и при некотором соотношении между интенсивностью зашумления и средним значением функции изображения в заданной области типа отношения сигнал-шум наблюдается неустойчивость нахождения оси симметрии.

#### 4.4.1 Осесимметричное изображение и меры несимметричности

Пусть  $\Omega$  – некоторая ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$  – функция изображения (или изображение) на  $\Omega$ ,  $I \subseteq \Omega$  – множество, на котором локализован интересующий нас объект на изображении. Вообще говоря, как само множество  $I$ , так и его граница могут иметь конечное число компонент связности. В общем случае будем считать, что

$0 \leq f(\mathbf{x}) < \infty$ . Относительно  $\Omega$  и  $I$  будем предполагать, что это измеримые множества, а функция  $f(\mathbf{x})$  интегрируема в  $\Omega$ . Через  $L^2(\Omega)$  будем обозначать нормированное пространство суммируемых с квадратом функций с нормой  $\|f\| = \sqrt{\int_{\Omega} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$ . Пусть  $\chi_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in I, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus I \end{cases}$  – характеристическая функция множества  $I$ . Если  $g \in L^2(\Omega)$ , то пусть  $g_I(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\chi_I(\mathbf{x})$  – «сужение» функции  $g$  на множество  $I$ .

Ниже будем рассматривать только понятие осесимметричного изображения. Поэтому введем в рассмотрение преобразование симметрии  $F_L = F_{\alpha,p}$  относительно прямой  $L = L_{\alpha,p} : x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ,  $p \geq 0$ ,  $0 < \alpha \leq \pi$ , как отображения, которое каждой точке  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  ставит в соответствие точку  $F_{\alpha,p}\mathbf{x}$ , симметричную к точке  $\mathbf{x}$  относительно прямой  $L = L_{\alpha,p}$ . Заметим, что  $F_{\alpha,p}\mathbf{x} = \mathbf{x} + 2(p - (\mathbf{n}_{\alpha}, \mathbf{x}))\mathbf{n}_{\alpha}$ , где  $\mathbf{n}_{\alpha} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Пусть  $\Lambda_I$  – множество всех тех прямых  $L$  на плоскости, что  $L \cap I \neq \emptyset$ . Далее будем предполагать, что область  $\Omega$  и множество  $I$  таковы, что  $F_L(I) \subseteq \Omega$  для любой прямой  $L \in \Lambda_I$ , где  $F_L(I) = \{F_L(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in I\}$  – образ носителя изображения при осевом отображении.

В общем случае мера отражательной несимметричности  $S_{I,L} : L^2(\Omega) \rightarrow [0,1]$  объекта  $I \subseteq \Omega$  относительно оси  $L$  должна удовлетворять ряду условий, таких как:

- 1)  $S_{I,L}(f) = 0$ , если функция  $f \in L^2(\Omega)$  симметрична в области  $I$  относительно оси  $L$ , т.е. если: i)  $F_L(I) = I$  (автоморфность области  $I$  относительно преобразования  $F_L$ ); ii)  $\int_I (f(\mathbf{x}) - f(F_L(\mathbf{x})))^2 d\mathbf{x} = 0$ ;
- 2)  $S_{I,L}(f) = 1$ , если функция  $f \in L^2(\Omega)$  является абсолютно несимметричной в области  $I$  относительно оси  $L$ , т.е.  $\int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} > 0$  и  $\int_I f(\mathbf{x}) f(F_L(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = 0$ ;

3)  $S_{I,L}(f) \geq S_{I,L}(g)$ , если  $|f(\mathbf{x}) - f(F_L(\mathbf{x}))| \geq |g(\mathbf{x}) - g(F_L(\mathbf{x}))|$  для всех  $\mathbf{x} \in I$ ,

где  $f, g \in L^2(\Omega)$  (изображение  $f$  более контрастно относительно оси  $L$ , чем изображение  $g$ );

4)  $S_{I,L}(kf) = S_{I,L}(f)$  для всех  $k > 0$  и  $f \in L^2(\Omega)$ ;

5)  $S_{I,L}(f + a) = S_{I,L}(f)$  для всех  $a > 0$  и  $f \in L^2(\Omega)$ , если  $f + a \in L^2(\Omega)$ .

Условия 1)–2) это условия нормировки меры несимметричности, условие 3) – условие монотонности меры несимметричности относительно симметричной контрастности изображения, условие 4) это условие инвариантности меры несимметричности к монотонным преобразованиям функции изображения (например, к освещенности объекта), а условие 5) характеризует инвариантность меры несимметричности к выбору абсолютной шкалы измерения функции яркости.

Заметим, что в условии 1) дается также определение глобальной симметричности изображения  $f$  в области  $I$ , а в условии 2) – абсолютной несимметричности изображения. Конечно, кроме указанных возможны и другие определения симметричности и абсолютной несимметричности.

Примерами мер несимметричности, которые удовлетворяют некоторым из перечисленных свойств, являются:

$$a) S_{I,L}(f) = \frac{1}{\sqrt{\|f_I\|^2 + \|(f(F_L))_I\|^2}} \|f_I - (f(F_L))_I\|, \text{ если } \|f_I\|^2 + \|(f(F_L))_I\|^2 > 0 \text{ и}$$

$S_{I,L}(f) = 0$  в противном случае; эта мера удовлетворяет условиям 1), 2), 4);

$$b) S_{I,L}(f) = \frac{1}{f_{\max} |I| \sqrt{2}} \|f_I - (f(F_L))_I\|, \text{ где } |I| \text{ – мера (площадь) измеримого}$$

множества  $I$ ; эта мера удовлетворяет условиям 1), 3), 5), если функция  $f \in L^2(\Omega)$  такова, что  $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq f_{\max}$  для всех  $\mathbf{x} \in I \cup F(I)$ .

Заметим, что если область изображения  $I$  автоморфна относительно преобразования симметрии  $F_L$  (т.е.  $F_L(I) = I$ ), то

$$\begin{aligned} \left\| f_I - (f(F_L))_I \right\|^2 &= \int_I f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_I f^2(F_L \mathbf{x}) d\mathbf{x} - 2 \int_I f(\mathbf{x}) f(F_L \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &= 2 \int_I f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - 2 \int_I f(\mathbf{x}) f(F_L \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

В этом случае удобно рассматривать меру несимметричности  $S_{I,L}(f) = \frac{1}{\|f_I\|\sqrt{2}} \left\| f_I - (f(F_L))_I \right\| = \sqrt{1 - \int_I f^0(\mathbf{x}) f^0(F_L \mathbf{x}) d\mathbf{x}}$ , где  $f^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|f\|} f(\mathbf{x})$  – нормированная функция изображения. Нетрудно видеть, что такая мера несимметричности связана с корреляцией между нормированной функцией изображения и нормированной функцией образа изображения после преобразования симметрии. Это обстоятельство широко используется при локальном обнаружении симметрии. В этом случае всегда можно выбрать такую окрестность точки, которая будет автоморфной относительно преобразования симметрии  $F_L$ .

Кроме того, если область изображения  $I$  автоморфна относительно преобразования симметрии  $F_L$ , то изображение  $f^s = \frac{1}{2} \{ f_I + (f(F_L))_I \}$  будет симметричным, поскольку  $f_I^s = (f^s(F_L))_I$ . Это изображение называют симметричной частью изображения  $f$ . Функцию  $f^{as} = \frac{1}{2} \{ f_I - (f(F_L))_I \}$  в этом случае называют антисимметричной частью изображения  $f$ . Тогда  $f = f^s + f^{as}$  и  $\int_I f^s(\mathbf{x}) f^{as}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$  (т.е. функции  $f^s$  и  $f^{as}$  ортогональны). Поэтому  $\|f\|^2 = \|f^s\|^2 + \|f^{as}\|^2$  и  $\int_I f(\mathbf{x}) f(F_L \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \|f^s\|^2 - \|f^{as}\|^2$ . В ряде работ [51, 94] для анализа симметрии использовались меры

$$\frac{\|f^s\|^2 - \|f^{as}\|^2}{\|f^s\|^2 + \|f^{as}\|^2} \text{ и } \frac{\|f^s\|^2}{\|f^s\|^2 + \|f^{as}\|^2},$$

которые по смыслу будут мерами симметричности, в отличие от рассмотренных выше мер несимметричности.

Приведенные примеры показывают, что меры несимметричности зависят от функциональной нормы разности между функцией изображения и функцией изображения после применения преобразования симметрии. Ниже нас будет интересовать мера глобальной несимметричности выделенного объекта  $I$  на изображении. Эту меру можно вычислять по-разному в зависимости от способа «вырезания» объекта  $I$ . Поясним это обстоятельство.

Рассмотрим три меры отражательной несимметричности

$$S_{I,L}^{(1)}(f) = \frac{1}{|I|} \left\| (f - f(F_L))_I \right\|^2, \quad S_{I,L}^{(2)}(f) = \frac{1}{|I|} \left\| f_I - f_I(F_L) \right\|^2,$$

$$S_{I,L}^{(3)}(f) = \frac{1}{|I|} \left\| (f - f_I(F_L))_I \right\|^2.$$

Заметим, что мера  $S_{I,L}^{(1)}(f)$  удовлетворяет условиям 1), 3), 5), а меры  $S_{I,L}^{(2)}(f)$  и  $S_{I,L}^{(3)}(f)$ , вообще говоря, только условию 1). При вычислении первой меры оценивается результат «вырезания» разности между функцией изображения и ее преобразованием симметрии. Во втором случае рассматривается разность между «вырезанным» изображением  $f_I$  и его преобразованием симметрии. Третий случай – смешанный. Меру  $S_{I,L}^{(1)}(f)$  в литературе называют непрерывным преобразованием отражательной симметрии изображения [9].

Теперь можно ввести в рассмотрение соответственно три функционала осевой несимметричности функции изображения  $f$  (или просто – функционала осевой несимметричности изображения) в области  $I$

$$\Phi_I^{(k)}(f) = \inf_{L \in \Lambda_I} S_{I,L}^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.20)$$

Заметим, что если изображение  $f$  является симметричным в области  $I$ , то  $\Phi_I^{(k)}(f) = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Обратное, вообще говоря, неверно. Но если потребовать выполнения дополнительного условия, что  $f(\mathbf{x}) > 0$  для всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ , то, в силу того, что

$$f_I(\mathbf{x}) - f_I(F_L \mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) - f(F_L \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in I \cap F_L(I), \\ f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in I \setminus F_L(I), \\ -f(F_L \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in F_L(I) \setminus I, \\ 0, & \mathbf{x} \notin I \cup F_L(I) \end{cases}$$

и

$$f_I(\mathbf{x}) - (f_I(F_L))_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) - f(F_L \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in I \cap F_L(I), \\ f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in I \setminus F_L(I), \\ 0, & \mathbf{x} \notin I \end{cases}$$

из условия  $\Phi_I^{(k)}(f) = 0$ ,  $k = 2, 3$  будет следовать выполнение условий i) и ii) симметричности изображения. Таким образом, нахождение функционала  $\Phi_I^{(2)}(f)$  или  $\Phi_I^{(3)}(f)$  позволяет определить симметричность изображения без проверки области изображения на автоморфность. Однако при зашумлении, как будет показано ниже, эти функционалы ведут себя по-разному.

#### 4.4.2 Функционалы несимметричности стационарно зашумленного изображения

Будем рассматривать зашумленное изображение  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \xi(\mathbf{x})$ , где  $\xi(\mathbf{x})$  – случайная функция на  $\Omega$ , удовлетворяющая условиям:

- 1)  $E[\xi(\mathbf{x})] = 0$  для любого  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;
- 2)  $\sigma^2[\xi(\mathbf{x})] = E[\xi^2(\mathbf{x})] = \sigma^2$  для любого  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;
- 3)  $Cov(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E[\xi(\mathbf{x}_1)\xi(\mathbf{x}_2)] = 0$  для любых  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ .

Пусть  $\tilde{f}_I(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{x})\chi_I(\mathbf{x}) = f_I(\mathbf{x}) + \xi_I(\mathbf{x})$  – зашумленное изображение выделенного объекта (области)  $I$ , где  $\xi_I(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})\chi_I(\mathbf{x})$ . Заметим, что реализации зашумленного изображения могут уже не удовлетворять условию неотрицательности. В соответствии с (4.20) введем в рассмотрение три функцио-

нала несимметричности изображения объекта  $I$  с зашумленной функцией изображения  $\tilde{f}_I$

$$\Phi_I^{(1)}(\tilde{f}) = \frac{1}{|I|} \inf_{L \in \Lambda_I} \int_{\Omega} E \left[ \left( \tilde{f}(\mathbf{x}) - \tilde{f}(F_L \mathbf{x}) \right)_I^2 \right] d\mathbf{x},$$

$$\Phi_I^{(2)}(\tilde{f}) = \frac{1}{|I|} \inf_{L \in \Lambda_I} \int_{\Omega} E \left[ \left( \tilde{f}_I(\mathbf{x}) - \tilde{f}_I(F_L \mathbf{x}) \right)^2 \right] d\mathbf{x},$$

$$\Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) = \frac{1}{|I|} \inf_{L \in \Lambda_I} \int_{\Omega} E \left[ \left( \tilde{f}(\mathbf{x}) - \tilde{f}_I(F_L \mathbf{x}) \right)_I^2 \right] d\mathbf{x}.$$

Пусть  $L_{\Phi^{(k)}}$  – прямая, для которой достигается инфимум в выражении для  $\Phi_I^{(k)}(\tilde{f})$ ,  $k=1,2,3$ . Рассмотрим свойства функционалов несимметричности зашумленного изображения объекта  $I$ . Во-первых, эти функционалы можно упростить следующим образом.

Утверждение 4.7. Для функционалов несимметричности зашумленного изображения  $\tilde{f}_I$  объекта справедливы равенства

$$\Phi_I^{(k)}(\tilde{f}) = 2\sigma^2 + \Phi_I^{(k)}(f), \quad k=1,2,$$

$$\Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) = \sigma^2 + \frac{1}{|I|} \inf_{L \in \Lambda_I} \left\{ \left\| (f - f_I(F_L))_I \right\|^2 + \sigma^2 |I \cap F_L(I)| \right\}. \quad (4.21)$$

Из (4.21) следует, что функционалы  $\Phi_I^{(1)}(\tilde{f})$  и  $\Phi_I^{(2)}(\tilde{f})$  можно использовать для определения симметричности зашумленного изображения. Например, если  $\Phi_I^{(2)}(\tilde{f}) \approx 2\sigma^2$ , то изображение близко к симметричному. При использовании же функционала  $\Phi_I^{(1)}(\tilde{f})$  дополнительно нужно проверить область  $I$  на автоморфность относительно того преобразования симметрии  $F_L$ , которое было найдено при нахождении  $\Phi_I^{(1)}(\tilde{f})$ .

Для бинарного изображения объекта  $f_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} h, & \text{если } \mathbf{x} \in I, \\ \varepsilon, & \text{если } \mathbf{x} \notin I, \end{cases}$   $h > \varepsilon > 0$  равенства в (4.21) можно упростить.

Следствие 4.3. Для зашумленного бинарного изображения справедливы равенства:

$$1) \Phi_I^{(1)}(\tilde{f}) = 2\sigma^2 + \frac{(h-\varepsilon)^2}{|I|} \inf_{L \in \Lambda_I} |I \Delta F_L(I)| = 2\sigma^2, L_{\Phi^{(1)}}: F_{L_{\Phi^{(1)}}}(I) = I;$$

$$2) \Phi_I^{(2)}(\tilde{f}) = 2\sigma^2 + \frac{h^2}{|I|} \inf_{L \in \Lambda_I} |I \Delta F_L(I)| = 2\sigma^2, L_{\Phi^{(2)}}: F_{L_{\Phi^{(2)}}}(I) = I;$$

$$3) \Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) = \sigma^2 + \frac{h^2}{|I|} \inf_{L \in \Lambda_I} \left\{ |I \setminus F_L(I)| + \frac{\sigma^2}{h^2} |I \cap F_L(I)| \right\};$$

если  $\sigma < h$ , то  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) = 2\sigma^2$  и  $L_{\Phi^{(3)}}: F_{L_{\Phi^{(3)}}}(I) = I$ ;

если  $\sigma > h$ , то  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) = \sigma^2 + h^2$  и  $L_{\Phi^{(3)}}: I \cap F_{L_{\Phi^{(3)}}}(I) = \emptyset$

( $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  – операция симметрической разности двух множеств).

Нетрудно видеть, что если  $\Phi_I^{(1)}(\tilde{f}) \approx 2\sigma^2$ , то либо изображение  $f$  приближенно симметрично в области  $I$ , либо  $h \approx \varepsilon$  (т.е. изображение мало отличается от фона).

Таким образом, если  $\sigma > h$ , то ось симметрии бинарного изображения с помощью функционала  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f})$  будет находиться неправильно. Ниже этот вывод будет обобщен для произвольного полутонового изображения.

Следствие 4.4. Для функционала несимметричности  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f})$  зашумленного изображения верна оценка  $\sigma^2 + \Phi_I^{(3)}(f) \leq \Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) \leq 2\sigma^2 + \Phi_I^{(3)}(f)$ . В частности, если  $f$  – симметричное изображение в области  $I$ , то  $\sigma^2 \leq \Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) \leq 2\sigma^2$ .

#### 4.4.3 Об устойчивости оси симметрии к стационарному зашумлению изображения

Пусть изображение  $f$  является симметричным в области  $I$ , т.е. удовлетворяет условиям i) и ii). Тогда существует такая прямая  $L_0$ , что область  $I$  автоморфна относительно преобразования  $F_{L_0}$  и  $\left\| f_I - \left( f(F_{L_0}) \right)_I \right\| = 0$ . Подвергнем изображение  $f$  зашумлению и поставим вопрос о величине «отклонения» прямой симметрии зашумленного изображения от прямой симметрии незашумленного изображения. Некоторым упрощением этого вопроса будет следующая формулировка: пусть изображение  $f$  является симметричным в области  $I$  относительно прямой  $L_0$ . Каким условиям должно удовлетворять изображение  $f$  и уровень зашумления  $\sigma^2$ , чтобы после зашумления прямая симметрии, доставляющая минимум функционалу  $\Phi_I^{(k)}(\tilde{f})$ ,  $k=1,2,3$ , не изменилась? Из Утверждения 4.7 следует, что при использовании функционалов  $\Phi_I^{(1)}(\tilde{f})$  и  $\Phi_I^{(2)}(\tilde{f})$  ось симметрии не изменится. Исследуем эту задачу в случае использования функционала  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f})$ .

Вообще говоря, изображение может иметь множество (и даже бесконечное множество) осей симметрии. Поэтому, чтобы акцентировать внимание на изменении какой-то одной оси симметрии, будем говорить, что ось симметрии  $L_0$  симметричного изображения  $f$  после зашумления существенно не изменилась после применения функционала  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f})$ , если  $L_0 = L_\Phi$  и  $\left\| f_I - \left( f(F_{L_0}) \right)_I \right\| = 0$  (или, что тоже самое для симметричного отображения,  $\left\| f_I - \left( f_I(F_{L_0}) \right)_I \right\| = 0$ ). В противном случае будем говорить, что ось симметрии существенно изменилась. Другими словами, в последнем случае прямая оси симметрии изображения «перескакивает» в такую позицию, где оси симметрии нет.

Для зашумленного изображения  $\tilde{f}$  при «удалении» прямой  $L$  от  $L_0$  первое слагаемое под знаком инфимума в (4.21) возрастает, а второе слагаемое при этом убывает ( $\sup_L |I \cap F_L(I)| = |I \cap F_{L_0}(I)| = |I|$ ).

Из формулы (4.21) для функционала несимметричности зашумленного изображения  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f})$  непосредственно вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4.8. Если после зашумления симметричного в области  $I$  изображения  $f$  ось симметрии существенно не изменилась, то  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) = 2\sigma^2$ .

Найдем условие существенной неизменности оси симметрии зашумленного изображения. Пусть  $M_S[\varphi] = \frac{1}{|S|} \int_S \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  – среднеинтегральное значение функции  $\varphi$  в области  $S$ . Верно следующее предложение.

Утверждение 4.9. Пусть для функции изображения  $f$ , области  $I$  и уровня зашумления  $\sigma^2$  выполняется условие

$$\sigma^2 \leq M_{I \setminus F_L(I)}[f^2] \quad (4.22)$$

для всех  $L \in \Lambda_I$ . Тогда  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) \geq 2\sigma^2$ .

Из последнего предложения и Следствия 4.4 немедленно вытекает справедливость утверждения.

Следствие 4.5. Если  $f$  – симметричное изображение в области  $I$  и выполняется условие (4.22), то  $\Phi_I^{(3)}(\tilde{f}) = 2\sigma^2$ .

Другими словами, при «большом» отношении сигнал-шум, определяемым условием (4.22), значение функционала несимметричности  $\Phi_I^{(3)}$  симметричного изображения остается постоянным. Покажем, что это гарантирует неизменность оси симметрии.

Утверждение 4.10. Пусть  $f$  – симметричное изображение в области  $I$ ,  $L_0$  – ось симметрии и справедливо условие (4.22), причем при  $L \neq L_0$  нера-

венство в (4.22) – строгое. Тогда после зашумления изображения  $f$  ось симметрии существенно не изменится.

Достаточное условие устойчивости оси симметрии при зашумлении, сформулированные в последнем предложении, можно частично обратить.

Утверждение 4.11. Пусть  $f$  – симметричное изображение в области  $I$ . Если для этого изображения и зашумления верна оценка

$$\sigma^2 > M_{I \setminus F_L(I)} [f^2]$$

для всех  $L \in \Lambda_I$ , то после зашумления ось симметрии существенно изменится.

Из Утверждений 4.10 и 4.11 вытекает справедливость следующего критерия существенной неизменности оси симметрии для бинарного изображения.

Следствие 4.6. Пусть  $f$  – бинарное изображение, симметричное в области  $I$  и  $f(\mathbf{x}) = h > 0$  для всех  $\mathbf{x} \in I$ . Тогда ось симметрии существенно не изменится в том и только том случае, если  $\sigma \leq h$ .

#### 4.4.4 Некоторые выводы

В этом подразделе отчета в рамках решения задачи обнаружения глобальной симметрии областей на изображениях аксиоматически вводятся и исследуются различные меры и функционалы несимметричности полутоно-вых изображений в заданной области. В частности, показано, что функционал несимметричности  $\Phi_I^{(1)}$ , основанный на широко используемом непрерывном преобразовании отражательной симметрии (удовлетворяющая большинству свойств-аксиом), является менее эффективной с вычислительной точки зрения, чем другие меры. Вводятся и исследуются также соответствующие функционалы несимметричности для зашумленных изображений. Найдены явные выражения, позволяющие использовать эти функционалы для нахождения осей симметрии зашумленных изображений. Показано, в ча-

стности, что функционал несимметричности  $\Phi_I^{(3)}$  не обладает устойчивостью к уровню зашумления изображений: при большом отношении типа шум-сигнал ось симметрии, найденная с помощью функционала  $\Phi_I^{(3)}$ , может существенно отклониться. С другой стороны, найдены достаточные и необходимые условия, при которых оси симметрии, вычисленные с помощью функционала  $\Phi_I^{(3)}$ , остаются неизменными. В ходе вычислительных экспериментов был подтвержден «эффект неустойчивости» нахождения осей симметрии при достаточно малом отношении типа «сигнал-шум». Рассмотренные условия необходимо учитывать при численном нахождении параметров симметричности объектов на зашумленных изображениях. В плане дальнейших исследований представляет интерес анализ влияния зашумления на нахождение параметров симметрии в случае, когда область объекта изображения и фон изображения имеют разные характеристики зашумления. Кроме того, пока остается открытым вопрос нахождения достаточных условий неизменности осей симметрии в случае нестационарного зашумления. Другая постановка задачи анализа симметрии зашумленных изображений состоит в оценивании вероятности изменения параметров симметрии.

Результаты исследований данного подраздела отражены в работе [53]:  
Lepskiy A. Determination of Symmetry Parameters of Objects in Noisy Images//  
Pattern Recognition and Image Analysis, 23(3), 2013, pp.408–414.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выполнении проекта получены следующие основные результаты, могут быть сделаны следующие выводы и рекомендации:

- в рамках теории важности критериев найдены три аналитических решающих правила в матричном виде – одно для случая, когда шкала критериев является порядковой, и два для случая, когда шкала критериев является шкалой первой порядковой метрики с замедляющимся или ускоряющимся ростом предпочтений вдоль шкалы;
- разработан общий подход к построению двойственных решающих правил в рамках теории важности критериев и приведено оптимизационное решающее правило для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида и аналитическое решающее правило для случая критериев с порядковой шкалой; разработаны аналитические решающие правила для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида;
- предложена модификация индекса Нитцана–Келли для оценки коалиционной манипулируемости правил коллективного выбора; впервые произведен расчет индексов коалиционной манипулируемости для ряда правил и для различных ограничений на размер коалиции; найден предел максимальной разности индексов манипулируемости в моделях IC и IANC, IAC и IANC при бесконечном увеличении числа избирателей или числа альтернатив;
- показано, что правило порогового агрегирования является в то же время правилом подсчета очков; найдены значения вектора весов, при которых простое правило подсчета очков дает тот же результат, что и правило порогового агрегирования;
- методом анализа паттернов показателей социально-экономического развития решена задача определения регионов РФ со схожей структурой развития, выявлены устойчивые динамические группы регионов, характеризуемые схожей реакцией на изменения внешней среды и одинаковой стратегией развития;

- предложен и исследован новый подход в оболочечном анализе данных в случае неоднородной выборки, основанный на предположении, что неоднородность возникает из-за разницы в приоритетах оцениваемых альтернатив; найдены условия эффективности этого подхода;
- в рамках исследования поведенческой модели биржи была проведена серия экспериментов, которая показала, что существует критический уровень опыта (или удачливости) агентов, такой что агенты, имеющие показатель успешности распознавания движения цен, превышающий этот критический уровень, почти наверняка «выживут» на рынке; если агент не использует возможности маржинальной торговли и заключает сделки только на собственный капитал, то такой критический уровень располагается чуть выше  $\frac{1}{2}$ ; если же трейдер торгует с использованием заемных средств, то критическое значение будет намного выше и для успешной долговременной торговли на рынке потребуется высокая вероятность принятия верных решений;
- в рамках анализа эффективности функционирования финансового сектора экономики было проведено моделирование оптимального хеджирующего соотношения с учетом междневного и внутридневного рисков торговых позиций; показано, что средняя междневная доходность значимо больше средней внутридневной, а дисперсия междневной доходности значимо меньше дисперсии внутридневной;
- на основе разработанной ранее теоретико-игровой модели стратегического взаимодействия банков проанализирован выбор стратегии банком в условиях регулирования системно значимых банков и в зависимости от выбранных параметров регулирования; подтвержден вывод о том, что регулирование может негативно сказаться на уровне кредитования в экономике, и определены основные факторы, влияющие на величину издержек введения регулирования;
- в рамках применения методов теории коллективного выбора для построения ранжирований в различных прикладных задачах, с помощью ординаль-

ных методов агрегирования известных библиометрических показателей были построены пять новых (агрегированных) рейтингов научных журналов по экономике, менеджменту и политологии; корреляционный анализ этих ранжирований показал, что они являются более эффективными с точки зрения их согласованности между собой, чем отдельные библиометрические показатели, а также обладают различной степенью устойчивости;

- исследованы простые и суперпозиционные (двухступенчатые) процедуры коллективного выбора на предмет выполнения для них условий рациональности, монотонности и пороговой некомпенсируемости;
- в рамках разработки организационных моделей и механизмов исследована задача нахождения оптимального объема производства электроэнергии генератором, конкурентоспособность возобновляемых источников энергии, а также конкурентоспособность систем хранения электроэнергии;
- исследована обобщенная проблема банкротства, которая ближе к реальной экономической практике, чем классическая постановка; показано существование ядра в ассоциированной с проблемой игре и построено одноточечное решение (пренуклеолус), гарантирующее отсутствие дальнейших банкротств;
- предложен и исследован новый способ анализа формирования картельных соглашений как некооперативной игры, в которой стратегиями игроков являются коалиции, к которым эти игроки (фирмы) желают примкнуть; предложен и проанализирован набор аксиом относительно функции, которая определяет зависимость итоговой коалиционной структуры от стратегий игроков;
- в рамках исследования обобщенных паросочетаний доказано, что в случае, когда предпочтения заданы интервальными порядками, существует устойчивое паросочетание;
- показана связь между устойчивыми обобщенными паросочетаниями и системами проходных баллов, используемыми при распределении

абитуриентов по вузам и других прикладных задачах; показано существование устойчивого паросочетания в случае применения политики «одинакового результата» для абитуриентов, набравших одинаковое число баллов;

- построена аксиоматика для одного из обобщенных индексов влияния, зависящих от предпочтения участников; показана взаимосвязь этих индексов с классическими индексами; доказаны теоремы о среднем для обобщенных индексов влияния;
- в рамках исследования моделей этнополитической напряженности проанализированы основные индексы этнической гетерогенности; дан обзор основных способов нахождения важнейшего параметра этих индексов – расстояния между этническими группами; рассмотрено применение индексов этнической гетерогенности в различных задачах социально-экономического и политического анализа;
- в рамках исследования влияния фракций и групп в Верховной Раде Украины за период 1990–2012 гг. было показано, что влияние фракций и групп, оцененное с помощью индекса Банцафа, не всегда зависит от доли их мест в парламенте; оценки распределения влияния, проведенные с помощью  $\alpha$ -индекса, учитывающего предпочтения, и индекса Банцафа часто значительно отличаются; показано, что фракции и группы, занимающие центристское положение, увеличивают свое влияние, в то время как радикальные фракции и группы уменьшают его;
- в рамках исследования по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов развита общая методология агрегирования (суммаризации) данных; проведена серия экспериментов по сравнению методов оценки близости между строкой и текстом для решения задач автоматизации аннотирования статей; показана эффективность разработанной ранее меры близости на основе аннотированного суффиксного дерева по

сравнению с двумя наиболее популярными методами, рассматриваемыми в международной научной литературе;

- введено и исследовано понятие волатильности в кластер-анализе данных; разработан новый алгоритм кластеризации на основе вычисления волатильности; проанализированы результаты работы этого алгоритма на модельных и реальных данных; проведено его сравнение с другими алгоритмами;
- в ходе исследования изменений качественных характеристик свидетельств при их комбинировании в рамках теории Демпстера–Шейфера, определен и исследован индекс уменьшения незнания при комбинировании свидетельств; найдены достаточные условия уменьшения этого индекса для некоторых правил комбинирования и определенных типах свидетельств; аксиоматически введена мера конфликта между свидетельствами; найден общий вид билинейной меры конфликта; статистически и аналитически исследована взаимосвязь между мерой конфликта и индексом уменьшения незнания для разных типов свидетельств;
- в рамках исследования устойчивости нахождения параметров симметрии зашумленных изображений аксиоматически введены меры и функционалы глобальной несимметричности незашумленных и зашумленных изображений; показано, что некоторые из функционалов несимметричности не обладает устойчивостью к уровню зашумления изображений; найдены достаточные и необходимые условия, при которых оси симметрии, вычисленные с помощью функционалов несимметричности, остаются неизменными.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

### Раздел 1

1. Абанкина И., Алескеров Ф., Белоусова В., Зиньковский К., Петрущенко В. Оценка результативности университетов с помощью Оболочечного Анализа Данных// Вопросы образования, 2, 2013, с.15–47.
2. Айзerman М.А., Алескеров Ф.Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы)// Автоматика и телемеханика, 9, 1983, с.127–151.
3. Айзerman М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. – М.: Наука, 1990.
4. Алексашин П.Г., Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Попова Е.С., Солодков В.М. Динамический анализ бизнес-моделей российских банков в период 2006–2009 гг. Препринт WP7/2012/03; НИУ ВШЭ, М., 2012, 64 с.
5. Алескеров Ф.Т, Белоусова В.Ю., Егорова Л.Г., Миркин Б.Г. Анализ паттернов в статике и динамике, часть 1: обзор литературы и уточнение понятия// Бизнес-информатика, 3(25), 2013, с.3–18.
6. Алескеров Ф. Т., Беляева Н. Ю. Количественный анализ развитости гражданского общества в регионах России: параметры, методика, pilotные исследования// Полития: Анализ. Хроника. Прогноз, 1, 2008, с.160–168.
7. Алескеров Ф.Т., Беляева Н.Ю., Бычкова Е.Б., Закамская Е.В., Юзбашев Д.А. Сравнительный анализ развитости гражданского общества в трех регионах России// В кн.: Человеческий фактор в управлении (под ред. Н.А. Абрамовой, К.С. Гинсберга, Д.А. Новикова). М. КомКнига, 2005, с.83–109.
8. Алескеров Ф.Т., Курбанов Э. О степени манипулируемости правил коллективного выбора// Автоматика и телемеханика, 10, 1998, с.134–146.
9. Алескеров Ф., Петрущенко В. DEA by sequential exclusion of alternatives// HSE Working Paper WP7, 2013, 02.

10. Алескеров Ф.Т., Писляков В.В., Субочев А.Н. Построение рейтингов журналов по экономике с помощью методов теории коллективного выбора// препринт WP7/2013/03, М.: НИУ ВШЭ, 2013.
11. Алескеров Ф.Т., Писляков В.В., Субочев А.Н., Чистяков А.Г. Построение рейтингов журналов по менеджменту с помощью методов теории коллективного выбора// препринт WP7/2011/04, М.: НИУ ВШЭ, 2011.
12. Алескеров Ф.Т., Юзбашев Д.В., Якуба В.И. Пороговое агрегирование трехградационных ранжировок// Автоматика и телемеханика, 1, 2007, с.147–152.
13. Алескеров Ф.Т., Якуба В.И. Об одном методе агрегирования ранжировок специального вида// II-я Междунар. конфер. по проблемам управления. Тез.докл. М.:ИПУ РАН, 2003, с.116.
14. Алескеров Ф.Т., Якуба В.И. Метод порогового агрегирования трехградационных ранжировок// Докл. РАН, 413(2), 2007, с.181–183.
15. Берзон Н., Володин С. Оценка финансовых активов по критерию «риск-доходность» с учетом длительности инвестирования// Экономический Журнал ВШЭ, 14(3), 2010, с.311–325.
16. Бродский Б.Е., Пеникас Г.И., Сафарян И.А. Обнаружение структурных сдвигов в моделях копул// Прикладная эконометрика, 16(4), 2009, с.3–15.
17. Веселова Ю.А. Сложность порядковых правил коллективного выбора// XIV Международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества: труды конференции / Отв. ред.: Е. Г. Ясин. – М.: Издательский дом НИУ ВШЭ, 2014. (в печати).
18. Гафт М.Г., Подиновский В.В. О построении решающих правил в задачах принятия решений// Автоматика и телемеханика, 6, 1981, с.128–138.  
*Английский перевод: Gaft M.G., Podinovskii V.V. Construction of decision rules in decision-making problems// Automation and Remote Control, 42, 1981, pp.806–814.*

19. Гончаров А.А., Чистяков В.В. Рейтингования без компенсаций и их применение// Проблемы управления. 2, 2012, с.45–52.
20. Калягин, В.А., Чистяков В.В. Аксиоматическая модель некомпенсаторного агрегирования// Препринт ГУВШЭ WP7/2009/01, Серия WP7.
21. Комиссарова К.А., Пеникас Г.И. Моделирование последствий регулирования российских национальных системно значимых банков// Управление финансовыми рисками, 4, 2013, с.256–273.
22. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений: Учебник. Изд. третье, перераб. и доп. М.: Университетская книга, Логос, 2006.
23. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008.
24. Мамонов М.Е.. Влияние кризиса на прибыльность российского банковского сектора// Банковское дело, 12, 2011, с.15–26.
25. Моисеев С.Р., Снегова Е.А. Системная значимость участников денежного рынка// Банковское дело, 3, 2012, с.24–29.
26. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991, 464с.
27. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Билинейная оптимизация в анализе многокритериальных задач методами теории важности критериев при неточной информации о предпочтениях// Журнал вычислительной математики и математической физики, 5, 2011, с.802–813.
28. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Аналитические решающие правила, использующие упорядоченность по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики// Автоматика и телемеханика, 5, 2012, сс.84–96.
29. Нелюбин А.П., Подиновский В.В. Аналитические решающие правила для упорядоченных по важности критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида// Автоматика и телемеханика. 2014 (в печати).

30. Пеникас Г.И. Модели «копула» в задачах хеджирования ценового риска// Прикладная эконометрика, 22(2), 2011, с.3–21.
31. Пеникас Г.И., Сироткин И.Н. Моделирование оптимального хеджирующего соотношения с учетом междневного и внутридневного рисков торговых позиций// В кн.: Первые чтения памяти профессора Б.Л. Овсиевича «Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии». СПб.: Нестор-История, 2013, с.191–193.
32. Петрущенко В. Учет неоднородности в моделях оболочечного анализа данных// Проблемы управления, 5, 2013, с.2–11.
33. Писляков В.В. Методы оценки научного знания по показателям цитирования// Социологический журнал, 1, 2007, с.128–140.
34. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с однородными равнозначными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2, 1975, с.330–344.
35. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями// Автоматика и телемеханика, 11, 1976, с.118–127.
36. Подиновский В.В. Коэффициенты важности критериев в задачах принятия решений. Порядковые, или ординальные, коэффициенты важности// Автоматика и телемеханика, 10, 1978, с.130–141.
37. Подиновский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений// Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. М.: Наука, 1979. – с.117–145.
38. Подиновский В.В. Количественная важность критериев// Автоматика и телемеханика, 5, 2000, с.110–123.
39. Подиновский В.В. Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределен-

- ных факторов в целевой функции// Автоматика и телемеханика, 11, 2004, с.141–159.
40. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: Учебное пособие. М.: Физматлит, 2007.
41. Подиновский В.В., Подиновская О.В. Новые многокритериальные решающие правила в теории важности критериев// Доклады Академии Наук, 451(1), 2013, с.21–23.
42. Подиновский В.В., Потапов М.А. Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений: теория, методы, софт и приложения// Открытое образование, 2, 2012, с.55–61.
43. Ушаков И.А. Задача о выборе предпочтительного объекта// Известия Академии Наук СССР. Сер.: Техническая кибернетика, 4, 1971, с.3–7.
44. Юдаева К.В, Иванова Н.С, Козлова К.К., Каменских М.В. Динамика кредитования в падающей экономике: кредитное сжатие или падение спроса на кредиты? 2009,  
[http://sberbank.ru/common/img/uploaded/files/pdf/press\\_center/Review\\_8.pdf](http://sberbank.ru/common/img/uploaded/files/pdf/press_center/Review_8.pdf)
45. Abankina I.V., Aleskerov F.T., Belousova V.Y., Bonch-Osmolovskaya A.A., Petruschenko V.V., Ogorodniyuchuk D., Yakuba V.I., Zin'kovsky K.V. University efficiency evaluation with using its reputational component// Lecture Notes in Management Science, 4, 2012, pp.244–253.
46. Abbott M., Doucouliagos C. The efficiency of Australian universities: a data envelopment analysis// Economics of Education Review, 22, 2003, pp.89–97.
47. Aizerman M., Aleskerov F. Theory of Choice. – North-Holland: Elsevier, 1995, 314p.
48. Aleskerov F., Alper C.E. Inflation, Money, and Output Growths: Some Observations// Bogazici University Research Paper, #SBE 96–06, 1996.

49. Aleskerov F., Alper C.E. A clustering approach to some monetary facts: a long-run analysis of cross-country data// *The Japanese Economic Review*, 51(4), 2000, pp.555–567.
50. Aleskerov F.T, Chistyakov V.V. Aggregating m-graded preferences: axiomatics and algorithms. In: Talk at the 9th international meeting of the society for social choice and welfare, Montreal, Concordia University, Canada, June 19–22, 2008.
51. Aleskerov F.T., Chistyakov V.V., Kalyagin V.A. Social threshold aggregations // *Social Choice and Welfare*, 35, 2010, pp.627–646.
52. Aleskerov F., Egorova L. Is it so bad that we cannot recognize black swans?// *Economics Letters*, 117(3), 2012, pp.563–565.
53. Aleskerov F., Ersel H., Gundes C., Minibas A., Yolalan R. Environmental Grouping of Bank Branches and their Performances// *Yapi Kredi Discussion Paper Series*, No: 97–03, 1997, Istanbul, Turkey.
54. Aleskerov F., Ersel H., Gundes C., Yolalan R. A Multicriterial Method for Personnel Allocation among Bank Branches// *Yapi Kredi Discussion Paper Series*, No:98–01, 1998, Istanbul, Turkey.
55. Aleskerov F., Ersel H., Yolalan R. Multicriterial Ranking Approach for Evaluating Bank Branch Performance// *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 3(2), 2004, pp.321–335.
56. Aleskerov F., Gokhberg L., Egorova L., Myachin A., Sagieva G. Pattern Analysis in the Study of Science, Education and Innovative Activity in Russian Regions// *Procedia Computer Science*, 17, 2013, pp.687–694.
57. Aleskerov F, Karabekyan D, Sanver M. R., Yakuba V. On the degree of manipulability of multi-valued social choice rules// *Homo Oeconomicus*, 28(1/2), 2011, pp.205–216.
58. Aleskerov F., Kurbanov E. A Degree of Manipulability of Known Social Choice Procedures// *Current Trends in Economics: Theory and Applications /*

- Eds. Alkan A., Aliprantis Ch., Yannelis N. N.Y.: Springer-Verlag, 1999, pp.13–27.
59. Aleskerov F., Mitichkin E., Shvydun S., Yakuba V. Super-threshold Procedures and Their Application to the Search Problem// Procedia Computer Science, 17, 2013, pp.1121–1124.
  60. Aleskerov F., Subochev A. Matrix-vector representation of various solution concepts// Working paper WP7/2009/03, Moscow: NRU – Higher School of Economics, 2009.
  61. Aleskerov F., Subochev A. Modeling optimal social choice: matrix-vector representation of various solution concepts based on majority rule// Journal of Global Optimization, 56(2), 2013, pp.737–756.
  62. Andersen T.G., Bollerslev T., Cai J. Intraday and interday volatility in the Japanese stock market// Journal of International Financial Markets, Institutions & Money, 10, 2000, pp.107–130.
  63. Athanassopoulos A.D., Shale E. Assessing the Comparative Efficiency of Higher Education Institutions in the UK by the Means of Data Envelopment Analysis// Education Economics, 5, 1997, pp.117–134.
  64. Avkiran N.K. Investigating technical and scale efficiencies of Australian Universities through data envelopment analysis// Socio-Economic Planning Sciences, 35, 2001, pp.57–80.
  65. Bali G., Peng L. Is There a Risk – Return Trade-off? Evidence from High – Frequency Data// Journal of Applied Econometrics, 21(8), 2006, pp.1169–1198.
  66. Banker R.D., Charnes A., Cooper W. Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis// Management Science, 30, 1984, pp.1078–1092.
  67. Banker R.D., Morey R.C. Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs// Operations Research, 34, 1986, pp.513–521.

68. Banker R.D., Morey R.C. The Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis// *Management Science*, 32, 1986, pp.1613–1627.
69. BCBS. Assessment of the impact of higher loss absorbency for global systematically important banks// 2011. URL:  
<http://www.bis.org/publ/bcbs202.htm>
70. BCBS. Global systematically important banks: Assessment methodology and the additional loss absorbency requirement// 2011, Final document:  
<http://www.bis.org/publ/bcbs207.htm>
71. Beasley J.E. Determining teaching and research efficiencies// *Journal of the Operational Research Society*, 46, 1995, pp.441–52.
72. Belton V, Gear T. On the meaning of relative importance// *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 6, 1997, pp.335–338.
73. Bessent A.M., Bessent E.W. Comparing the Comparative Efficiency of Schools through Data Envelopment Analysis// *Educational Administration Quarterly*, 16, 1980, pp.57–75.
74. Biondo A.E., Pluchino A., Rapisarda A., Helbing D. Are Random Trading Strategies More Successful than Technical Ones??// *PLoS ONE* 8(7): e68344, 2013.
75. Braun T., Glänzel W., Schubert A. A Hirsch-type index for journals// *Scientometrics*, 69(1), 2006, pp.169–173.
76. Brown P., Thompson N., Walsh D. Characteristics of the Order Flow through an Electronic Open Limit Order Book// *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 9, 1999, pp.335–357.
77. Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Measuring the Efficiency of Decision Making Units// *European Journal of Operational Research*, 2, 1978, pp.429–444.
78. Charnes A., Cooper W., Rhodes E. Evaluating Program and Managerial Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through// *Management Science*, 27, 1981, pp.668–697.

79. Chebotarev Yu., Shamis E. Preference fusion when the number of alternatives exceeds two: indirect scoring procedures// Journal of the Franklin Institute, 336, 1999, pp.205–226.
80. Cherchye L., Vanden Abeele P. On research efficiency a micro-analysis of Dutch university research in Economics and Business Management// Research Policy, 34, 2005, pp.495–516.
81. Chiarella C., Dieci R., Gardini L. Asset Price and Wealth Dynamics in a Financial Market with Heterogeneous Agents// Journal of Economic Dynamics & Control, 30, 2006, pp.1755–1786.
82. Chiarella C., Iori G., Perello J. The Impact of Heterogeneous Trading Rules on the Limit Order Book and Order Flows// Journal of Economic Dynamics & Control, 33, 2009, pp.525–537.
83. Chiu D.-Y., Chang F.-Y., Chen P.-J. Using Intelligent Multi-Agents to Simulate Investor Behaviors in a Stock Market// Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 23(3), 2007, pp.343–364.
84. Chow G. Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions// Econometrica, 28(), 1960, pp.591–605.
85. Cinar Y. Research and Teaching Efficiencies of Turkish Universities with Heterogeneity Considerations: Application of «Multi-Activity DEA» and «DEA by Sequential Exclusion of Alternatives' Models»// HSE WP7/04, 2013.
86. Coelli T.J., Rao D.S.P., O'Donnell C.J., Battese G.E. An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. 2nd edition, N.Y.: Springer, 2005.
87. Cont R., Bouchaud J.-P. Herd Behavior and Aggregate Fluctuations in Financial Markets// Macroeconomic Dynamics, 4, 2000, pp.170–196.
88. Copeland A.H. A reasonable social welfare function (mimeo)// University of Michigan, Ann Arbor (Seminar on Application of Mathematics to the Social Sciences), 1951.

89. Corcos A., Eckmann J.-P., Malaspina A., Malevegne Y., Sornette D. Imitation and contrarian behavior: hyperbolic bubbles, crashes and chaos// Quantitative Finance, 2(4), 2002, pp.264–281.
90. Daniels H.E. Round-robin tournament scores// Biometrika, 56, 1969, pp.295–299.
91. Darley, V., Outkin, A. A NASDAQ market simulation: insights on a major market from the science of complex adaptive systems. – Singapore: World Scientific Publishing, 2007.
92. Dieci R., Foroni I., Gardini L., He X. Market mood, adaptive beliefs and asset price dynamics// Chaos, Solutions and Fractals, 29, 2006, pp.520–534.
93. Egecioglu O. Uniform Generation of Anonymous and Neutral Preference Profiles for Social Choice Rules// Technical Report TR2005–25, 2005. Department of Computer Science, UCSB.
94. Egghe L. Mathematical relations between impact factors and average number of citations// Information Processing and Management, 24, 1988, pp.567–576.
95. Egorova L. Behavioral Models of Stock Exchange// статья подготовлена для публикации.
96. Engle R.F., Granger C.W.J. Cointegration and Error Correction Representation, Estimation, and Testing// Econometrica, 55(2), 1987, pp.251–276.
97. Farrell M.J. The Measurement of Productive Efficiency// Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 3, 1957, pp.253–290.
98. Farsi M., Filippini M. A benchmarking analysis of electricity distribution utilities in Switzerland// CEPE working paper, 43, 2005.
99. Favardin P, Lepelley D. Some further results on the manipulability of social choice rules// Social Choice and Welfare, 26(3), 2006, pp.485–509.
100. Ferrier G.D., Lovell C.A.K. Measuring Cost Efficiency in Banking: Econometric and Linear Programming Evidence// Journal of Econometrics, 46, 1990, pp.229–245.

101. Fiess N.M., MacDonald R. Towards the fundamentals of technical analysis: analyzing the information content of High, Low and Close prices// Economic Modelling, 19, 2002, pp.353–374.
102. Fishburn P.C. Decision and value theory. New York: Wiley, 1964.
103. Flegg A., Allen D., Field K., Thurlow T. Measuring the Efficiency and Productivity of British Universities: An Application of DEA and the Malmquist Approach// unpublished, 2004.
104. Fried H.O., Schmidt S.S, Yaisawamg S. Incorporating the Operating Environment into a Nonparametric Measure of Technical Efficiency// Journal of Productivity Analysis, 12, 1999, pp.249–267.
105. Garfield E., Sher I. H. New factors in the evaluation of scientific literature through citation indexing// American Documentation, 14(3), 1963, pp.195–201.
106. Ghosh A. Cointegration and error correction models. Intertemporal causality between index and futures prices// The Journal of Futures Markets, 13(2), 1993, pp.193–198.
107. Gibbard A. Manipulation of voting schemes// Econometrica, 41, 1973, pp.587–601.
108. Glänzel W., Moed H.F. Journal impact measures in bibliometric research// Scientometrics, 53(2), 2002, pp.171–193.
109. Gonzalez-Pereira B., Guerrero-Bote V., Moya-Anegon F. A new approach to the metric of journals scientific prestige: The SJR indicator// Journal of Informetrics, 4(3), 2010, pp.379–391.
110. Goodman L.A., Kruskal W.H. Measures of Association for Cross Classifications// Journal of the American Statistical Association, 49(268), 1954, pp.732–764.
111. Goto M., Tsutsui M. A Multi-division Efficiency Evaluation of U.S. Electric Power Companies Using a Weighted Slacks-based Measure// Socio-Economic Planning Sciences, 43, 2009, pp.201–208.

112. Hai-Chin Yu et al. Intraday Returns and Weekday Effects in the Dow Jones and Nasdaq Stock indexes// International Research Journal of Finance and Economics, 68, 2011, pp.14–34.
113. Harras G., Sornette D. How to grow a bubble: A model of myopic adapting agents// Journal of Economic Behavior & Organization, 80(1), 2011, pp.137–152.
114. Hirsch J.E. An index to quantify an individual's scientific research output// Proceedings of the National Academy of Sciences, 102(46), 2005, pp.16569–16572.
115. Hirschberg J.G., Lye J.N. Clustering in a Data Envelopment Analysis Using Bootstrapped Efficiency Scores// Department of Economics – Working Papers Series 800 The University of Melbourne, 2001.
116. Jacsó P. Differences in the rank position of journals by Eigenfactor metrics and the five-year impact factor in the Journal Citation Reports and the Eigenfactor Project web site// Online Information Review, 34(3), 2010, pp.496–508.
117. Johnes J. Data envelopment analysis and its application to the measurement of efficiency in higher education// Economics of Education Review, 25, 2006, pp.273–288.
118. Johnes J., Yu L. Measuring the research performance of Chinese higher education institutions using data envelopment analysis// China Economic Review, 19, 2008, pp.679–696.
119. Kahneman D. Thinking, fast and slow. – N.Y. 2011.
120. Kardas G., Challenger M., Yildrim S., Yamuc A. Design and implementation of a multiagent stock trading system// Software-Practice and Experience, 42, 2012, pp.1247–1273.
121. Katharakis G., Katharaki M. A comparative assessment of Greek universities' efficiency using quantitative analysis// International Journal of Educational Research, 49, 2010, pp.115–128.

122. Kelly J. Minimal Manipulability and Local Strategy-Proofness// Social Choice and Welfare, 5, 1988, pp.81–85.
123. Kelly J. Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't// Social Choice and Welfare, 10, 1993, pp.161–175.
124. Kempkes G., Pohl C. The efficiency of German universities – some evidence from nonparametric and parametric methods// Applied Economics, 42, 2010, pp.2063–2079.
125. Kendall M. A New Measure of Rank Correlation// Biometrika, 30, 1938, pp.81–89.
126. Kendall M. Rank correlation methods. – 4<sup>th</sup> edition. L.: Griffin, 1970. Русский перевод: Кендэл М. Ранговые корреляции. М.: Статистика, 1975.
127. Kendall G., Su Y. A Multi-agent Based Simulated Stock Market – Testing on Different Types of Stocks// CEC: 2003 Congress on Evolutionary Computation, Proceedings, 1–4, 2003, pp.2298–2305.
128. Kirkwood C.W., Sarin R. Ranking with partial information: a method and an application// Operations Research, 33, 1985, pp.38–48.
129. Kodia Z., Said L.B. Multi-agent Simulation of Investor Cognitive Behavior in Stock Market// 7th International Conference on PAAMS'09, AISC 55, 2009. pp.90–99.
130. Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tverski A. Foundation of measurement. – V.1. New York: Academic Press, 1971.
131. Laslier J.F. Tournament Solutions and Majority Voting. – Berlin: Springer, 1997.
132. Lee C.I., Mathur I. The Influence of informational arrival on market micro-structure: evidence from three related markets// Financial Review, 34(1), 1999, pp.1–26.
133. Lemos C.A.A., Lima M.P., Ebecken N.F.F. DEA Implementation and Clustering Analysis using the K-means algorithm// Data Mining VI – Data Mining, Text Mining and Their Business Applications, 1, 2005, pp.321–329.

134. Lepelley D, Valognes F. Voting Rules, Manipulability and Social Homogeneity// *Public Choice*, 116(1/2), 2003, pp.165–184.
135. Lien D. Cointegration and the optimal hedge ratio: the general case// *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 44(5), 2004, pp.654–658.
136. Makridakis S., Taleb N. Living in a world of low levels of predictability// *International Journal of Forecasting*, 25, 2009, pp.840–844.
137. Marroquin M., Pena M., Castro C., Castro J., Cabrera-Rios M. Use of data envelopment analysis and clustering in multiple criteria optimization// *Intelligent Data Analysis*, 12, 2008, pp.89–101.
138. Matassini L., Franci F. On financial markets trading// *Physica A*, 289, 2001, pp.526–542.
139. Meimand M., Cavana R.Y., Laking R. Using DEA and survival analysis for measuring performance of branches in New Zealand's Accident Compensation Corporation// *Journal of the Operational Research Society*, 53, 2002, pp.303–313.
140. Meyer R. Benchmarking Economies of Vertical Integration in U.S. Electricity Supply: An Application of DEA// *Competition and Regulation in Network Industries*, 12, 2011, p.299.
141. Miller N. A new solution set for tournaments and majority voting: Further graph-theoretical approaches to the theory of voting// *American Journal of Political Science*, 24, 1980, pp.68–96.
142. Moed H.F. Measuring contextual citation impact of scientific journals// *Journal of Informetrics*, 4(3), 2010, pp.265–277.
143. Murillo-Zamorano L. R. Economic efficiency and frontier techniques// *Journal of Economic Surveys*, 18, 2004, pp.33–77.
144. Myers R., Hanson S. Optimal dynamic hedging in unbiased futures markets// *American Journal of Agricultural Economics*, 78(1), 1996, pp.13–20.
145. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. – Princeton: Princeton University Press, 1944.

146. Nitzan S. The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation// *Public Choice*, 47, 1985, pp.349–370.
147. Pastore S., Ponta L., Cincotti S. Heterogeneous information-based artificial stock market// *New Journal of Physics*, 12, 2010.
148. Penikas H., Titova Y. Modeling policy response to global systemically important banks regulation// *WP BRP 02/FE/2012*.
149. Podinovski V.V. Multicriteria optimization problems involving importance-ordered criteria// *Modern Mathematical Methods of Optimization / Elster K.-H. (ed.)*. Berlin: Akademie Verlag, 1993, pp.254–267.
150. Podinovski V.V. Problems with importance-ordered criteria// *User-Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis and Support / J. Wessels and A. P. Wierzbicki (Eds.)*. Lecture Notes in Economics and Math. Systems, Berlin: Springer, 397, 1993, pp.150–155.
151. Podinovski V.V. The quantitative importance of criteria for MCDA// *J. of Multi-Criteria Decision Analysis*, 11, 2002, pp.1–15.
152. Podinovski V.V., Podinovskaya O.V., Nelyubin A.P. Matrix ordinal decision rules in the criteria importance theory// Proc. of VII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2013), Moscow: MAKS Press, 1, 2013, pp.107–110.
153. Proskurin S., Penikas H. How Well Do Analysts Predict Stock Prices? Evidence from Russia// Working papers by NRU Higher School of Economics, Series FE "Financial Economics", 2013.
154. Pritchard G, Wilson M. Exact results on manipulability of positional voting rules// *Social Choice and Welfare*, 29, 2007, pp.487–513.
155. Raberto M., Cincotti S., Focardi S.M., Marchesi M. Agent-based simulation of a financial market// *Physica A*, 299, 2001, pp.319–327.
156. Rousseau R. Citation distribution of pure mathematics journals// *Informetrics 87/88 / Ed. L. Egghe, R. Rousseau*. Amsterdam: Elsevier, 1988, pp.249–262.

157. Rousseau R. Journal evaluation: Technical and practical issues// Library Trends, 50(3), 2002, pp.418–439.
158. Salerno C. Using Data Envelopment Analysis to Improve Estimates of Higher Education Institution's Per-student Education Costs// Education Economics, 14, 2006, pp.281–295.
159. Samoilenco S., Osei-Bryson K.M. Determining sources of relative inefficiency in heterogeneous samples: Methodology using Cluster Analysis, DEA and Neural Networks// European Journal of Operational Research, 206, 2010, pp.479–487.
160. Satterthwaite M. Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions// Journal of Economic Theory, 10, 1975, pp.187–217.
161. Schreyogg J.C., von Reitzenstein C. Strategic groups and performance differences among academic medical centers// Health Care Management Review, 33, 2008, pp.225–233.
162. Sewell M. Characterization of Financial Time Series// UCL Department of Computer Science, Research Note, RN/11/01, 2011.
163. Sharma M.J., Yu S.J. Performance based stratification and clustering for benchmarking of container terminals// Expert Systems with Applications, 36, 2009, pp.5016–5022.
164. Sharpe W., Alexander G., Bailey J. Investments (6th edition). – Prentice Hall, 1998, 962 p.
165. Shin H.W., Sohn S.Y. Multi-attribute scoring method for mobile telecommunication subscribers// Expert Systems with Applications, 26, 2004, pp.363–368.
166. Slinko A. How the size of a coalition affects its chances to influence an election// Social Choice and Welfare, 26(1), 2006, pp.143–153.

167. Stulz M., Karolyi A. Why Do Markets Move Together? An Investigation of U.S. Japan stock Return Comovements// The Journal of Finance, 51(3), 1996, pp.951–986.
168. Subochev A. Dominant, Weakly Stable, Uncovered Sets: Properties and Extensions// Working paper WP7/2008/03, Moscow: NRU – Higher School of Economics, 2008.
169. Taleb N.N. The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable. – Penguin, 2008, 394 p.
170. Tedeschi G., Iori G., Gallegati M. Herding Effects in Order Driven Markets: The Rise and Fall of Gurus// Journal of Economic Behavior & Organization, 81, 2012, pp.82–96.
171. Tsai P.F., Mar Molinero C. A Variable Returns to Scale Data Envelopment Analysis Model for the Joint Determination of Efficiencies with An Example of the UK Health Service// European Journal of Operational Research, 141, 2002, pp.21–38.
172. Vaninsky A. Environmental Efficiency of Electric Power Industry of the United States: A Data Envelopment Analysis Approach// World Academy of Science, Engineering and Technology, 40, 2008, pp.584–590.
173. Venezia I., Nashikkar A., Shapira Z. Firm Specific and Macro Herding by Professional and Amateur Investors and Their Effects on Market Volatility // Journal of Banking &Finance, 35, 2011, pp.1599–1609.
174. Veselova Y. The difference between manipulability indexes in IC and IANC models // EC “Economics”, Higher School of Economics, preprint, 2012.
175. Veselova Y. The manipulability index in the IANC model, Clusters, orders, trees: methods and applications // Ed: Aleskerov F., Goldengorin B., Pardalos P. Springer, 2014. (в печати).
176. Warning S. Performance Differences in German Higher Education: Empirical Analysis of Strategic Groups// Review of Industrial Organization, 24, 2004, pp.393–408.

177. Young, H.P. An axiomatization of Borda's rule// Journal of Economic Theory, 9, 1974, pp.43–52.
178. Yu M. Measuring the efficiency and return to scale status of multi-mode bus transit – evidence from Taiwan's bus system// Applied Economics Letters, 15, 2008, pp.647–653.

## Раздел 2

1. Захаров А.В., Шварц Д.А. Аксиоматика некооперативного подхода к коалиционным играм// Автоматика и Телемеханика, 2014 (в печати).
2. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.
3. Abdulkadiroglu A., Sonmez T. School choice: A mechanism design approach// The American Economic Review, 93, 2003, pp.729–747.
4. Aleskerov F., Bouyssou D., Monjardet B. Utility Maximization, Choice and Preference. – Springer Verlag, Berlin, 2007.
5. Anderson E.J., Hu X. Forward contracts and market power in an electricity market// International Journal of Industrial Organization, 26(3), 2008, pp.679–694.
6. Aumann R.J., Mashler M. Game Theoretic Analysis of a bankruptcy Problem from the Talmud// Journal of Economic Theory, 36(2), 1985, pp.195–213.
7. Azevedo E.M., Leshno J. A supply and demand framework for two-sided matching markets// Tech. Rep.: Harvard University Working Paper, 2012. URL: <http://fmwww.bc.edu/ec-j/SemF2011/azevedo.pdf>.
8. Belenky A. Minimax problems with linear constraints// Automation and Remote Control, 42(6), 1987, pp.1409–1419.
9. Belenky A. An approach to quantitatively analyzing the expediency of incorporating new sources of energy in an electric grid// Conference “Network

Models in Economics and Finance”, National Technical University of Athens, June 13–15, 2013, Abstracts, 2013.

10. Belenky A. Analyzing the expediency of incorporating renewable sources of energy and electricity storages into a part of an electric grid// Applied Energy (To appear in December 2014).
11. Biro P., Kiselgof S.G. College admissions with stable score – limits// Working papers by Hungarian Academy of Sciences. Series MT-DP «Discussion Papers of Hungarian Academy of Sciences», 6, 2013.
12. Brunekreeft G., Neuhoff K., Newbery D. Electricity transmission: An overview of the current debate// Utilities Policy, 13(2), 2005, pp.73–93.
13. Burbidge J., DePater J., Myers G., Sengupta A. A Coalition-Formation Approach to Equilibrium Federations and Trading Blocks// American Economic Review, 87, 1997, pp.940–956.
14. Casas-Méndez B., Fragnelli V., García-Jurado I. Weighted bankruptcy rules and the museum pass problem// European Journal of Operational Research, 215(1), 2011, pp.161–168.
15. Chan P., Hui C.-W., Li W., Sakamoto H., Hirata K., Li P. Long-term electricity contract optimization with demand uncertainties// Energy, 31(13), 2006, pp.2469–2485.
16. Chandler P., Tulkens H. On the Core of an Economy with Multilateral Environmental Externalities// International Journal of Game Theory, 26, 1997, pp.379–401.
17. Chandler P., Tulkens H. Cooperation, Stability and Self-Enforcement in International Environmental Agreements: A Conceptual Discussion// Unpublished Manuscript, 2006.
18. Chang C., Hu C-C. Reduced game and converse consistency// Games and Economic Behavior, 59(2), 2007, pp.260–278.
19. Davis M., Maschler M. The kernel of cooperative game// Naval Research Logistics Quarterly, 12(3), 1965, p.223–259.

20. Diamantoudi E., Xue L. Farsighted Stability in Hedonic Games// Social Choice and Welfare, 21, 2003, pp.39–61.
21. Dutta B., Mutuswami S. Stable Networks// Journal of Economic Theory, 76, 1997, pp.322–344.
22. Erdil A., Ergin H. What's the matter with tie-breaking? improving efficiency in school choice// American Economic Review, 98(3), 2008, pp.669–689.
23. Fishburn P.C. Interval Orders and Interval Graphs: A Study of Partially Ordered Sets. – New York: Wiley, 1985.
24. Funaki Y., Yamato T. The Core of Economy with a Common Pool Resource// International Journal of Game Theory, 78, 1999, pp.157–171.
25. Funaki Y., Yamato T. Sequentially Stable Coalition Structures// Unpublished Paper, 2006.
26. Gale D., Shapley L. College admissions and the stability of marriage// American Mathematical Monthly, 69, 1962, pp.9–16.
27. Hatfield W., Milgrom P. Matching with Contracts// American Economic Review, 95, 2005, pp.913–935.
28. He X. A novel business model for aggregating the values of electricity storage// Energy Policy, 39(3), 2011, pp.1575–1585.
29. Hokari T. Consistency implies equal treatment in TU-games// Games and Economic Behavior, 51(1), 2005, pp.63–82.
30. Hu C.-C., Tsay M.-H., Yeh, C.-H. Axiomatic and strategic justifications for the constrained equal benefits rule in the airport problem// Games and Economic Behavior, 75(1), 2012, pp.185–197.
31. Jackson M. A Survey of Network Formation Models: Stability and Efficiency. – In G. DeMange and M. Wooders (eds.) Group formation in Economics: Networks, Clubs, and Coalitions. Cambrisge University Press, 2005.
32. Karpov A., Yurkov S. Generalized bankruptcy problem// Working papers by NRU Higher School of Economics, series FE "Financial Economics", 8, 2012.

33. Karthikeyan S.P., Raglend I.J., Kothari D.P. A review on market power in de-regulated electricity market// International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 48, 2013, pp.139–147.
34. Koutsopoulos I., Tassiulas L. Optimal control policies for power demand scheduling in the smart grid// IEEE Journal on Selected Areas in Communications, July 2012, vol. 30 (6).
35. Larsson S., Fantazzini D., Davidsson S., Kullander S., Höök M. Reviewing electricity production cost assessments// Renewable and Sustainable Energy Reviews, 30, 2014, pp.170–183.
36. Leadbetter J., Swan L. Battery storage system for residential electricity peak demand shaving// Energy and Buildings, 55, 2012, pp.685–692.
37. Lucas-Estañ M.C., Gozalvez J., Sanchez-Soriano J. Bankruptcy-based radio resource management for multimedia mobile networks// European Transactions on Telecommunications, 23(2), 2012, pp.186–201.
38. Maskin E., Tirole J. Public-Private Partnerships and Government Spending Limits// International Journal of Industrial Organization, 26(2), 2008, pp.412–420.
39. Myerson R. Game theory: Analysis of Conflicts. – Harvard University Press, Cambridge, MA, 1991.
40. Nakamura K. The vetoers in a simple game with ordinal preferences// International Journal of Game Theory, 8(1), 1979, pp.55–50.
41. O'Neill B. A Problem of Rights Arbitration from the Talmud// Mathematical Social Sciences, 2(4), 1982, pp.345–371.
42. Van den Nouweland A. Models of Network Formation in Cooperative Games. – In G. DeMange and M. Wooders (eds.) Group formation in Economics: Networks, Clubs, and Coalitions. Cambridge University Press, 2005.
43. Orshan G. The prenucleolus and the reduced-game property: equal treatment replaces anonymity// International Journal of Game Theory, 22(3), 1993, pp.241–248.

44. Ralph D. Stochastic equilibrium in investment models: capacity expansion in the power sector// International Conference of Continuous Optimization ICCOPT-2103, July 27–August 1, 2013, Abstracts, p.48.
45. Ray D., Vohra R. Equilibrium Binding Agreements// *Journal of Economic Theory*, 73, 1997, pp.30–78.
46. Roth A.E., Sotomayor M.O. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. – Cambridge University Press, 1992.
47. Sarıca K., Kumbaroğlu G., Or I. Modeling and analysis of a decentralized electricity market: An integrated simulation/optimization approach// *Energy*, 44(1), 2012, pp.830–852.
48. Shapley L.S. Cores of convex games// *International Journal of Game Theory*, 1(1), 1971, pp.11–26.
49. Sobolev A. The characterization of optimality principles in cooperative games by functional equations// *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 6, 1975, pp.150–165.
50. Thomson W. Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey// *Mathematical Social Sciences*, 45(3), 2003, pp.249–297.
51. Tirole J., Fudenberg D. *Game Theory*. – The MIT Press, 1991.
52. Topkins D. *Supermodularity and Complimentarity*. – Princeton University Press, 1998.
53. Vives X. *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools*. – MIT Press. 1999.
54. van der Weijde A.H., Hobbs B.F. The economics of planning electricity transmission to accommodate renewables: Using two-stage optimization to evaluate flexibility and the cost of disregarding uncertainty// *Energy Economics*, 34(6), 2012, pp.2089–2101.
55. Yang L., Fraga E.S., Papageorgiou L.G. Mathematical programming formulations for non-smooth and non-convex electricity dispatch problems// *Electric Power Systems Research*, 95, 2013, pp.302–308.

56. Yergin D. The Prize. – Simon& Schuster of Australia Pty Ltd. 1991.
57. Zou X., Ren Y. Auction Mechanism Design in Wholesale Electricity Market Considering Impacts of Long-term Contract// Systems Engineering – Theory & Practice, 27(8), 2007, pp.118–126.

### Раздел 3

1. Авксентьев В.А. Этнические конфликты: история и типология// Социологические исследования, 12, 1996, с.43–50.
2. Авксентьев В.А., Гриценко Г.Д., Дмитриев А.В. Динамика регионального конфликтного процесса на юге России (экспертная оценка)// Социологические исследования, 9, 2007, с.70–77.
3. Алескеров Ф.Т. Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций// ДАН, 414, 2007, с.594–597.
4. Алескеров Ф. Т., Благовещенский Н., Сатаров Г., Соколова А. В., Якуба В. И. Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте (1905–1917 и 1993–2005 гг.). – М.: Физматлит, 2007.
5. Алескеров Ф.Т., Бородин А.Д., Каспэ С.И., Маршаков В.А., Салмин А.М. Поляризованность электоральных предпочтений в России. Опыт выборов в Государственную думу Российской Федерации в 1993–2003 гг.// Препринт WP7/2005/02, 2005. – М.: НИУ ВШЭ.
6. Алескеров Ф.Т., Голубенко М.А. Об оценке симметричности политических взглядов и поляризованности общества// Препринт WP7/2003/04, 2003. – М.: НИУ ВШЭ.
7. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. – 2-е издание, М.: Физматлит, 2012.
8. Аналітична доповідь центру Разумкова. Парламент в Україні: тенденції та проблеми становлення// Національна безпека і оборона, 2(38), 2003, с.2–25.

9. Асоціація народних депутатів України. Верховна Рада України дванадцятого скликання 1990–1994 роки// Київ: Кий, 1998 [Электронный ресурс]:  
<http://static.rada.gov.ua/zakon/new/NEWSAIT/DEPUTAT1/spisok1.htm>
10. Базів В.А. Парламент української держави: проблеми партійної структуризації. – Львів: Світ, 1999.
11. Бромлей Ю.В. Этносоциальные процессы: теория, история, современность. – М.: Наука, 1987.
12. Верстюк В. Українська революція: доба Центральної Ради// Український історичний журнал, Київ: «Наукова думка», 2, 1995, с.65–78; 5, с.79–88; 6, с.66–78.
13. Гузенкова Т.С. Партии и лидеры в ВРУ (1998–2000). – М.: Российский ин-т стратегических исследований, 2001.
14. Дробижева Л.М. (отв. ред.) Социальное неравенство этнических групп: представления и реальность. – М.: Academia, 2002.
15. Дробижева Л.М. Этничность в современном обществе: новые подходы, старые мифы, социальные практики// Вестник Института социологии, 1, 2010, с.82–91.
16. Животовский Л.А., Хуснутдинова Э.К. Генетическая история человечества// В мире науки, 7, 2003, с.82–91.
17. Зазнаев О.И. (ред.) Политическая идентичность и политика идентичности: очерки. – Казань: Отечество, 2011.
18. Зайчук В., Ясенчук Ю., Пивовар А. та ін. Верховна рада України: Інформаційний довідник. – Київ: Парламентське вид-во, 2006.
19. Замніус В., Ковриженко Д., Котляр Д. та ін. Орієнтири виборця 2002. Довідник. – Київ: Міленіум, 2002.
20. Камалова Р.У. Этническая гетерогенность: основные понятия и проблемы измерения// Полития: Анализ. Хроника. Прогноз, 4, 2013, с.127–149.

21. Кириченко И. Ксенофобия: испытание чужим// Зеркало недели, 2005. 01–07.10. URL: <http://www.demoscope.ru/weekly/2005/0215/gazeta09.php>.
22. Климов Г.А. О глоттохронологическом методе датировки распада языка// Вопросы языкознания, 2, 1959, с.119–121.
23. Магун В.С. (отв. ред.) Гражданские, этнические и религиозные идентичности в современной России. – М.: Издательство Института социологии РАН, 2006.
24. Малахов В.С. Неудобства с идентичностью// Вопросы философии, 1998, 2.
25. Марченко В. Проблема «Міжфракційних міграцій»// Часопис Парламент, 1, 2001. [Электронный ресурс]: [http://parlament.org.ua/index.php?action=magazine&id=9&ar\\_id=119&iar\\_id=89&as=2](http://parlament.org.ua/index.php?action=magazine&id=9&ar_id=119&iar_id=89&as=2)
26. Материалы базы данных Центральной Избирательной комиссии Украины. [Электронный ресурс]: [www.cvk.gov.ua](http://www.cvk.gov.ua)
27. [Материалы базы данных ВРУ] Материалы базы данных Верховной Рады Украины. [Электронный ресурс]: [www.rada.gov.ua](http://www.rada.gov.ua)
28. Олейник В.В., Лебедюк В.Н. Распределение влияния между фракциями и группами в Верховной Раде Украины (1990–2012 гг.)// WP7/2013/08. – М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2013, 76с.
29. Паин Э.А. Этнические конфликты в постсоветской России// Вестник Института Кеннана в России, 22, 2012, с.35–47.
30. Паин Э.А. Этнополитический маятник. Динамика и механизмы этнополитических процессов в постсоветской России. – М.: Издательство института социологии РАН, 2004.
31. Паин Э.А., Суслова М.Н. Способна ли демократия противостоять ксенофобии?// Россия в глобальной политике, 5, 2012.

32. Погорельский К.Б. Методы оценки влияния участников в задаче принятия коллективных решений: обзор основных направлений// Проблемы управления, 5, 2011, с.2–13.
33. Про вибори народних депутатів України: Закон України від 18 листопада 1993 р. №3623–ХІІ// Відомості Верховної Ради України, 48, 1993, с.455.
34. Про депутатські групи (фракції) у Верховній Раді України: постанова Верховної Ради України від 13 травня 1994р. № 11/94 – ВР// Відомості Верховної Ради України, 21, 1994, с.134; 22, с.153.
35. [Про вибори народних 2004] Про вибори народних депутатів України: Закон України від 25 березня 2004 р. №1665–IV// Відомості Верховної Ради України, 27, 2004, с.28.
36. Про створення Антикризової коаліції у Верховній Раді України п'ятого скликання: повідомлення Верховної Ради України від 7 липня 2006 р. [Электронный ресурс]: [www.rada.gov.ua](http://www.rada.gov.ua)
37. Росенко М. Трансформація механізму формування Верховної Ради України та його вплив на структурування парламенту у період (1990 – 2007 рр.)// Актуальні проблеми державного управління, 2(40), 2011.
38. Сергеев В.М. Социальная дистанция и национальные установки// Телескоп: журнал социологических и маркетинговых исследований,2, 2008.
39. Тишков В.А, Пивнева Е.А. Этнологические и антропологические исследования в академической науке// Новая и новейшая история, 3, 2010, с.3–21.
40. Тишков В.А. Реквием по этносу: исследования по социально-культурной антропологии. – М.: Наука, 2003.
41. Фадеева Л.А. Современная российская идентичность: ценность, конструкция, руководство к действию?// Мельвиль А.Ю. (ред.) Пространство и время в мировой политике и международных отношениях: материалы 4 Конвента РАМ. – М.: МГИМО–Университет, 2007.

42. Хабенская Е.О. Этническая идентичность: подходы к проблеме// *Развитие личности*, 6, 2006.
  43. Хойер Г. Лексикостатистика (критический разбор)// Новое в лингвистике, 1, 1960, с.88–107.
  44. Шварц Д.А. О вычислении индексов влияния, учитывающих предпочтения участников// Автоматика и Телемеханика, 3, 2009, с.152–159.
  45. Шварц Д.А. Аксиоматика для индексов влияния, учитывающих предпочтения участников// Автоматика и Телемеханика, 1, 2010, с.144–158.
  46. Якуба В.И. Анализ распределения участников при различных правилах принятия решений в Совете Министров расширенного Европейского союза// WP7/2003/03, М.: ГУ ВШЭ, 2003.
  47. Ярош М., Пивовар А., Погорєлова А. Верховна Рада України: інформаційний довідник. Вип. 2. – Київ: Парламентське вид-во, 2002.
- 
48. Acemoglu D., Egorov G., Sonin K. Coalition Formation in Non-Democracies// *Review of Economic Studies*, 75, 2008, pp.987–1009.
  49. Akdede S. Do more ethnically and religiously diverse countries have lower democratization// *Economics Letters*, 106(2), 2010, pp.101–104.
  50. Alesina A., La Ferrara E. Participation in Heterogeneous Communities// *The Quarterly Journal of Economics*, 115(3), 2000, pp.847–904.
  51. Alesina A., Michalopoulos S., Papaioannou E. Ethnic Inequality// National Bureau of Economic Research Working Papers, 18512, 2012.
  52. Alesina A., Zhuravskaya E. Segregation and the Quality of Government in a Cross Section of Countries// *American Economic Review*, 101(5), 2011, pp.1872–1911.
  53. Alesina A., Baquir R., Easterly W. Public Goods and Ethnic Divisions// *The Quarterly Journal of Economics*, 114(4), 1999, pp.1243–1284.
  54. Alesina A. et al. Fractionalization// *Journal of Economic Growth*, 8, 2003.

55. Aleskerov F. Power indices taking into account agents' preferences// Mathematics and Democracy, Berlin, Springer, 2006, pp.1–18.
56. Aleskerov F., Holler M., Kamalova R. Power Distribution in the Weimar Reichstag in 1919 – 1933// WP7/2010/08. – М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2010, 54p.
57. Ashraf Q., Galor O. Genetic Diversity and the Origins of Cultural Fragmentation// American Economic Review, 103(2), 2013.
58. Banzhaf J. F. Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis// Rutgers Law Review, 19, 1965, pp.317–343.
59. Brockett C.D. Measuring Political Violence and Land Inequality in Central America// American political science Review, 86(1), 1992, pp.169–76.
60. Brubaker R., Laitin. D. Ethnic and Nationalist Violence// Annual Review of Sociology, 24, 1998, pp.423–452.
61. Campos N., Saleh A., Kuzeyev V.S. Dynamic Ethnic Fractionalization and Economic Growth in the Transition Economies from 1989 to 2007// IZA Discussion Papers, 4597, 2009.
62. Cederman L.-E., Girardin L. Beyond Fractionalization: Mapping Ethnicity onto Nationalist Insurgencies// American Political Science Review, 101(1), 2007, pp.173–185.
63. Cederman L.-E., Wimmer M., Min A. Why Do Ethnic Groups Rebel? New Data and Analysis// World Politics, 62(1), 2010, pp.87–119.
64. Chandra K. What is Ethnic Identity and Does It Matter?// Annual Review of Political Science, 9, 2006, pp.397–424.
65. Collier P. Implications of Ethnic Diversity// Economic Policy, 16(32), 2001, pp.127–166.
66. Collier P., Hoeffler A. On Economic Causes of Civil War// Oxford Economic Papers, 50(4), 1998, pp.127–166.

67. Collier P., Hoeffler A. Greed and Grievance in Civil War// Oxford Economic Papers, 56(4), 2004, pp.563–595.
68. Costello R., Thomson R. The distribution of power among EU institutions: who wins under codecision and why?// Journal of European Public Policy, 20, 2013, pp.1025–1039.
69. Desmet K., Ortúñoz-Ortín I., Wacziarg R. The Political Economy of Linguistic Cleavages// Journal of Development Economics, 97, 2012, pp.322–338.
70. Desmet K., Ortúñoz-Ortín I., Weber S. Peripheral Diversity and Redistribution// CEPR Discussion Papers, 5112, 2005.
71. Desmet K., Ortúñoz-Ortín I., Weber S. Linguistic Diversity and Redistribution// Journal of the European Economic Association, 7, 2009, pp.1291–1318.
72. Driessen M. D. Ethnic Fractionalization Dataset Review// APSA Comparative Politics Newsletter, 2008.
73. Duclos J. Y., Esteban J., Ray D. Polarization: Concepts, Measurement, Estimation// Econometrica, 72(6), 2004, pp.1730–1750.
74. Dyen I., Kruskal B. J., Black P. An Indo-European Classification: A Lexicostatistical Experiment// Transactions of the American Philosophical Society, 82(5), 1992.
75. Easterly W., Levine R. Africa's growth tragedy: policies and ethnic divisions// Quarterly Journal of Economics, 112(4), 1997, pp.1203–1250.
76. Eifert B., Miguel E., Posner D.N. Political Competition and Ethnic Identification in Africa// American Journal of Political Science, 54(2), 2010, pp.494–510.
77. Eligius H. et al. Coalition Formation: The Role of Procedure and Policy Flexibility// Group Decision & Negotiation, 22, 2013, pp.407–427.
78. Esteban J., Mayoral L., Ray D. Ethnicity and Conflict: An Empirical Study// American Economic Review, 102(4), 2012, pp.1310–1342.

79. Esteban J., Ray D. On the Measurement of Polarization// *Econometrica*, 62(4), 1994, pp.819–851.
80. Esteban J., Ray D. Linking Conflict to Inequality and Polarization// *American Economic Review*, 101(4), 2011, pp.1345–1374.
81. Ethnic Power Relations (EPR) dataset. URL:  
<http://dvn.iq.harvard.edu/dvn/dv/epr>.
82. Fearon J.D. Ethnic and Cultural Diversity by Country// *Journal of Economic Growth*, 8(2), 2003, pp.195–222.
83. Fearon J.D. Ethnic Mobilization and Ethnic Violence// Ritchie D. A., Weingast B. R. (eds.) *Oxford Handbook of Political Economy*. – Oxford, 2006.
84. Fearon J.D., Laitin D.D. Violence and the Social Construction of Ethnic Identity// *International Organization*, 54(4), 2000, pp.845–877.
85. Fearon J.D., Laitin D.D. Ethnicity, Insurgency, and Civil War// *American Political Science Review*, 97(1), 2003, pp.75–90.
86. Felsenthal. D.S., Machover M. *The Measurement of Voting Power: Theory and Practice, Problems and Paradoxes*. Cheltenham: Edward Elgar, 1998, 322p.
87. Fum R.M., Hodler R. Natural resources and income inequality: The role of ethnic divisions// *Economics Letters*, 107(3), 2010.
88. Geo-referencing Ethnic Power Relations (GeoEPR-ETH) Version 2.0 URL:  
<http://www.icr.ethz.ch/data/growup/geoepr-eth>.
89. Ginsburgh V., Weber S. *How Many Languages Do We Need?*// *The Economics of Linguistic Diversity*, Princeton, 2011.
90. Ginsburgh V., Weber S. Culture, Languages and Economics// V. Ginsburgh, Throsby D. (eds.) *The Handbook of the Economics of Art and Culture*, 2. – Amsterdam, 2012.

91. Greenberg J.H. The Measurement of Linguistic Diversity// *Language*, 32(1), 1956.
92. Horowitz D.L. Ethnic Groups in Conflict. – Berkeley, 1985.
93. Kirsch W., Langner J. Power indices and minimal winning coalitions// *Social Choice & Welfare*, 34, 2010, pp.33–46.
94. La Porta R., Lopez-deSilanes F., Shleifer A., Vishny R. The Quality of Government// *Journal of Law, Economics and Organization*, 15(1), 1999, pp.222–279.
95. Laruelle A., Valenciano F. Shapley–Shubik and Banzhaf Indices Revisited// *Mathematics of operation research*, 26(1), 2000, pp.89–104.
96. Leech D. Computing Power Indices for Large Voting Games// *Management Science*, 49(6), 2003, pp.831–837.
97. Leech D. Power indices in large voting bodies// *Public Choice*, 155, 2013, pp.61–79.
98. Ethnologue: Languages of the World. – Dallas. URL: <http://www.ethnologue.com/>.
99. Lind T. Fractionalization and Inter-Group Differences// *Kyklos*, 60(1), 2007, pp.123–139.
100. Lindner I., Machover M. L.S. Penrose's limit theorem: Proof of some special cases// *Mathematical Social Sciences*, 47, 2004, pp.37–49.
101. Mauro P. Corruption and growth// *Quarterly Journal of Economics*, 110, 1995, pp.681–712.
102. Midlarski M.I. Rulers and the Ruled: Patterned Inequality and the Onset of Mass Political Violence// *American Political Science Review*, 82(2), 1988, pp.491–509
103. Minorities at Risk Project. URL: <http://www.cidcm.umd.edu/mar/>.
104. Montalvo J., Reynal-Querol M. Religious polarization and economic development// *Economics Letters*, 80(2), 2003, pp.201–210.

105. Montalvo J., Reynal-Querol M. Ethnic polarization, potential conflict and Civil Wars// American Economic Review, 95, 2005, pp.796–816.
106. Muller E.N., Seligson M.A., Fu H., Midlarski M.I. Land Inequality and Political Violence// American Political Science Review, 83(2), 1989, pp.577–596.
107. Nei N., Takezaki M. The Root of the Phylogenetic Tree of Human Populations// Molecular Biology and Evolution, 13(1), 1996, pp.170–177.
108. Okediji O. The dynamics of ethnic fragmentation a proposal for an expanded measurement index// The American Journal of Economics and Sociology, 64(2), 2005, pp.637–662.
109. Penrose L.S. Elementary statistics of majority voting// Journal of the Royal Statistics Society, 109, 1946, pp.53–57.
110. Posner D. Measuring Ethnic Fractionalization in Africa// American Journal of Political Science, 48(4), 2004, pp.849–863.
111. Reynal-Querol M. Ethnicity, Political Systems and Civil War// Journal of Conflict Resolution, 46(1), 2002, pp.29–54.
112. Robinson J. Social Identity, Inequality and Conflict// Economics of Governance. 2(2), 2001, pp.85–99.
113. Roeder P. Ethnolinguistic Fractionalization (ELF) Indices, 1961 and 1985// 2001, URL: <http://weber.ucsd.edu/~proeder/elf.htm>.
114. Roozendaal P., Hosli M., Heetman C. Coalition formation on major policy dimensions: The Council of the European Union 1998 to 2004// Public Choice, 153, 2012, pp.447–467.
115. Scarritt J.R., Mozaffar S. The Specification of Ethnic cleavages and Ethnopolitical Groups for the Analysis of Democratic Competition in Contemporary Africa// Nationalism and Ethnic Politics, 5(1), 1999, pp.82–117.
116. A Value for n-person Games/ In: Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, 28, 1953, pp.307–317.

117. Shapley L.S., Shubik M. A method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System// American Political Science Review, 48(3), 1954, pp.787–792.
118. Taylor A.D., Zwicker W.S. Simple Games. – Princeton University Press, 1999.
119. Weber M. Economy and Society// Roth G., Wittich C. (eds.) Economy and Society: An Outline of Interpretive Sociology. – Berkeley, 1968.
120. Weber R.J. Probabilistic values for games// A. E. Roth, Ed. The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley, 1988, Cambridge University Press, pp.101–119.
121. Weidmann N.B., Rød J.K., Cederman L.-E. Representing Ethnic Groups in Space: A New Dataset// Journal of Peace Research, 47(4), 2010, pp.491–499.
122. Wimmer A., Schiller N.G. Methodological nationalism and beyond. Nation state building, migration and the social sciences// Global Networks, 2(4), 2002, pp.301–334.
123. Wolfson M.C. When inequalities diverge American// American Economic Review, 84(2), 1994, pp.353–358.
124. Worldwide Governance Indicators (WGI) project URL:  
<http://info.worldbank.org/governance/wgi/index.asp>.
125. Wucherpfennig J. et al. Politically Relevant Ethnic Groups across Space and Time: Introducing the GeoEPR Dataset// Conflict Management and Peace Science, 28(5), 2011, pp.415–430.

#### Раздел 4

1. Алескеров Ф.Т. Благовещенский Н.Ю., Сатаров Г.А., Соколова А.В., Якуба В.И. Влияние и структурная устойчивость в Российском парламенте (1905–1917 и 1993–2005 гг.). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 312 с.

2. Браверман Э.М., Мучник И.Б. Структурные методы обработки эмпирических данных. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
3. Броневич А.Г., Лепский А.Е. Аксиоматический подход к определению индексов неточности нечеткой меры// В сб. трудов II междунар. научно-практ. семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте». – М: Физматлит, 2003, с.127–130.
4. Визгунов А.Н., Гольденгорин Б.И., Замараев В.А., Калягин В.А., Колданов А.П., Колданов П.А., Пардалос П.М. Применение рыночных графов к анализу фондового рынка России// Журнал Новой экономической ассоциации, 3(15), 2012, с.66–81.
5. Горбань А.С. Методы обнаружения отражательной симметрии полуточновых изображений// Интел-е сист. принятия решений и приклад. аспекты инф. техн-й, 1, 2006, с.57–61.
6. Деза Е.И., Деза М.-М. Энциклопедический словарь расстояний. – М.: Наука, 2008.
7. Дубов М.С., Черняк Е.Л. Анnotated суффиксные деревья: особенность реализации// Сб. докладов конференции АИСТ 2013, с.49–58.
8. Каркищенко А.Н., Мнухин В.Б. Распознавание симметрий изображения в частотной области// Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Черногория, г. Будва, 2012 г.: Сборник докладов. М.: Торус Пресс, 2012, с.426–429.
9. Каркищенко А.Н., Горбань А.С. К определению мер сходства полуточновых изображений// спец. выпуск журнала «Известия ЮФУ. Технические науки», 4(81), 2008, с.98–103.
10. Кочетуров А.А., Бацын М.В., Пардалос П.М., Гольденгорин Б. И. Анализ финансовых рынков средствами модели о  $p$ -медианах. Доклад// Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур, НИУ ВШЭ. – <http://fs.nashaucheba.ru/docs/46/index-6217357.html#689383>. – 2013.

11. Лепский А.Е. Соотношение между конфликтом и уменьшением незнания при комбинировании свидетельств// Нечеткие системы и мягкие вычисления, 8(1), 2013, с.25–42.
  12. Лепский А.Е. Об оценивании конфликта и уменьшения незнания в теории Демпстера–Шейфера// Сб. науч. трудов VII международной конференции «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте», Коломна, 20–22 мая, 2013. – М.: Физматлит, Т.1, 2013, с.436–448.
  13. Лукашевич Н.В. Тезаурусы в задачах информационного ACM Computing Classification System 2012// [Электронный ресурс]:  
<http://www.acm.org/about /class/2012> (дата обращения 10.12.2013).
  14. Миркин Б.Г., Черняк Е.Л., Чугунова О.Н. Метод аннотированного суффиксного дерева для оценки степени вхождения строк в текстовые документы// Бизнес-информатика, 3(21), 2012, с.31–41.
  15. Пардалос П.М. (руководитель проекта) Модели, основанные на теории графов, для анализа поведения фондовых рынков, представленных большими графами// Отчёт о научно-исследовательской работе, НФ НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, 2011.
  16. Сегалович И.В. Как работают поисковые системы// Мир Internet, 10, 2002.
  17. Солтон Дж. Динамические библиотечно-поисковые системы. – Пер. с. англ. М.: Мир, 1979. 557 с.
  18. Черняк Е.Л., Миркин Б.Г. Использование ресурсов Интернета для построения таксономии// Сб. докладов конференции АИСТ 2013, с.36–49.
- 
19. ACM Computing Classification System 2012 // [Электронный ресурс]:  
<http://www.acm.org/about /class/2012> (дата обращения 10.12.2013).
  20. Association for Computing Machinery// [Электронный ресурс]:  
<http://www.acm.org/> (дата обращения 10.12.2013).

21. Bird S., Klein E., Loper E. Natural Language Processing with Python. – Sebastopol: O'Reilly Media Inc, 2009.
22. Blagoveschenskiy N.Y., Rubchinsky A.A. Cluster Analysis of Socio-Economical Data// Сб. трудов XIV Апрельской международной научной конференции «Модернизация экономики и общества», М.:Изд. Дом ВШЭ, 2014 (в печати).
23. Blei D. Probabilistic topic models// Communications of the ACM, 55(4), 2012, pp.77–84.
24. Blei D.M., Ng D.M., Jordan M.I. Latent Dirichlet allocation// The Journal of Machine Learning Research, 3, 2003, pp.993–1022.
25. Bronevich A., Lepskiy A. Measuring uncertainty with imprecision indices// Proc. of the Fifth International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications (ISIPTA'07), Prague, Czech Republic, 2007, pp.47–56.
26. Cantador I., Bellogin A., Vallet D. Content-based recommendation in social tagging systems// Proceedings of the fourth ACM conference on Recommender systems (Barcelona, Spain, September 26 – 30), 2010, pp.237–240.
27. Ceci M., Malerba D. Classifying web documents in a hierarchy of categories: a comprehensive study// Journal of Intelligent Information Systems, 28(1), 2007, pp.37–78.
28. Chetverikov D., Fundamental Structural Properties of Textures// PhD thesis, MTA, SZTAKI, Budapest, 2002.
29. Chernyak E., Mirkin B. Computationally refining of a russian-language taxonomy using Wikipedia// Сб. докладов международной конференции по компьютерной лингвистике «Диалог», 2013, с.177–186.
30. Cicconi P., Leonardi R., Kunt M. Symmetry-based image coding// Proc. SPIE 1818, Visual Communications and Image Processing '92, Boston, 1992, pp.1312–1323.

31. Deerwester S., Dumais S. T., Furnas G. W., Landauer T. K., Harshman R. Indexing by Latent Semantic Analysis// Journal of American society for Information Science, 41(6), 1990, pp.391–407.
32. Dempster A.P. Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping// The Annals of Statistics, 28, 1967, pp.325–339.
33. Deqiang H., Chongzhao H., Yi Y. A modified evidence combination approach based on ambiguity measure// Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion, 2008, pp.1–6.
34. Dubois D., Prade H. A note on measures of specificity for fuzzy sets// International Journal of General Systems, 10, 1985, pp.279–283.
35. Dubois D., Prade H. Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures// Computational Intelligence, 4, 1988, pp.244–264.
36. Dubois D., Prade H. On the combination of evidence in various mathematical frameworks// Reliability Data Collection and Analysis. J. Flamm and T. Luisi, Brussels, ECSC, EEC, EAFC, 1992, pp.213–241.
37. Duh K., Kirchhoff K. Learning to rank with partially-labeled data// Proceedings of the 31st Annual International ACM SIGIR Conference (Singapore, July 20–24), 2008, pp.251–258.
38. Filippone M., Camastra F., Masulli F. Rovetta S. A Survey of Kernel and Spectral Methods for Clustering// Pattern Recognition, 41(1), 2008, pp.176–190.
39. Galitsky B., Ilvovsky D., Kuznetsov S., Strok F. Matching sets of parse trees for answering multi-sentence questions// Proceedings of the Recent Advances in Natural Language Processing (Hissar, Bulgaria, September 12 – 14), 2013, pp.285–294.
40. Girvan M., Newman M.E.J. *Community structure in social and biological networks*// Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 99, 2002, pp.7821–7826.
41. Gordon A.D. Classification. – Chapman & Hall/CRC, 1999.

42. Grimmer J., Stewart B. M. Text as Data: The Promise and Pitfalls of Automatic Content Analysis Methods for Political Texts// *Political Analysis*, 21(3), 2013, pp. 267–297.
43. Gupta A., Kumaraguru P. Credibility Ranking of Tweets during High Impact Events// Proceedings of the first Workshop on Privacy and Security in Online Social Media (Lyon, France, April 17), 2012, pp.2–8.
44. Gusfield D. Algorithms on strings, trees and sequences: computer science and computational biology. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
45. Higashi M., Klir G.J. Measures of uncertainty and information based on possibility distributions// *Int. J. General Systems*, 9, 1983, pp.43–58.
46. Huang W.Q., Zhuang X.T., Yao S. A network analysis of the Chinese stock market// *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(14), 2009, pp.2956–2964.
47. Inagaki T. Interdependence between Safety-Control Policy and Multiple-Sensor Schemes Via Dempster–Shafer Theory// *IEEE Transactions on Reliability* 40(2), 1991, pp.182–188.
48. Kazhdan M., Chazelle B., Dobkin D., Finkelstein A., Funkhouser T. A reflective symmetry descriptor// Proc. 7th Europ. Conf. on Comp. Vis., 2002, pp.642–656.
49. Kiryati N., Gofman Y. Detecting Symmetry in Grey Level Images: The Global Optimization Approach// *International Journal of Computer Vision*, 29(1), 1998, pp.29–45.
50. Lepskiy A. About Relation between the Measure of Conflict and Decreasing of Ignorance in Theory of Evidence// Proceedings of the 8th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT–13), Amsterdam – Beijing – Paris: Atlantis Press, 2013, pp.355–362.
51. Lepskiy A. Estimation of Conflict and Decreasing of Ignorance in Dempster–Shafer Theory// *Procedia Computer Science*, 17, 2013, pp.1113–1120.

52. Lepskiy A. Determination of Symmetry Parameters of Objects in Noisy Images// Pattern Recognition and Image Analysis, 23(3), 2013, pp.408–414.
53. Liu Y., Hel-Or H., Kaplan C.S., Van Gool L. Computational Symmetry in Computer Vision and Computer Graphics// Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision, 5(1–2), 2009, pp.1–195.
54. Liu Z., Dezert J., Pan Q. A new measure of dissimilarity between two basic belief assignments// hal-00488045, version 1 – 1 Jun 2010.
55. Luxburg U. A Tutorial on Spectral Clustering// Statistics and Computing, 17(4), 2007, pp.395–416.
56. Maetschke S., Madhamshettiwar P., Davis M., Ragan M. Supervised, semi-supervised and unsupervised inference of gene regulatory networks// Briefings in Bioinformatics, 5, 2013, pp.150–167.
57. Manning C. D., Raghavan P., Schütze H. An Introduction to Information Retrieval, – Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
58. Marola G. On the detection of the axes of symmetry of symmetric and almost symmetric planar images// IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 11(1), 1989, pp.104–108.
59. Martin A., Jousselme A.-L., Osswald C. Conflict measure for the discounting operation on belief functions// Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Information Fusion, 2008, pp.1–8.
60. Mirkin B. Mathematical Classification and Clustering. – Kluwer Academic Publishers, 1996.
61. Mirkin B. Clustering for Data Mining: A Data Recovery Approach. – Chapman & Hall/CRC, 2005.
62. Mirkin B. Core Concepts in Data Analysis: Summarization, Correlation, Visualization. – Springer, 2010.
63. Mirkin B. Methods for Interpretation of Data in Medical Informatics// Advances in Intelligent Analysis of Medical Data and Decision Support Systems, Studies in Computational Intelligence, 473, 2013, pp.15–22.

64. Mirkin B. G. Individual approximate clusters: methods, properties, applications// Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing. Issue 8170: Lecture Notes in Artificial Intelligence. Heidelberg: Springer, 2013. pp.26–37.
65. Mirkin B.G., Shestakoff A. Least squares consensus clustering: criteria, methods, experiments// Lecture Notes in Computer Science, 7814 Springer, 2013, pp.764–768.
66. Ogawa H. Symmetry analysis of line drawings using the Hough transform// Pattern Recognition Letters, 12, 1991, pp.9–12.
67. Pampapathi R., Mirkin B., Levene M. A suffix tree approach to anti-spam email filtering// Machine Learning, 65(1), 2006, pp.309–338.
68. Porter M.F. An algorithm for suffix stripping// Program: electronic library and information systems, 14(3), 1980, pp.130–137.
69. Robertson S., Zaragoza H. The Probabilistic Relevance Framework: BM25 and Beyond// Journal Foundations and Trends in Information Retrieval, 3(4), pp.333–389.
70. Rubchinsky A. Divisive-Agglomerative Classification Algorithm Based on the Minimax Modification of Frequency Approach// Working paper WP7/2010/07, M.:NRU HSE, 48 p.
71. Rubchinsky A.A. Volatility in Clustering// Вестник УДН. Серия Математика. Информатика. Физика, 2014 (в печати).
72. Salton G., Buckley C. Term-weighting approaches in automatic text retrieval// Information Processing and Management, 25(5), 1998, pp.513–523.
73. Santos A.P., Rodrigues F. Multi-Label Hierarchical Text Classification Using the ACM Taxonomy// Proceedings of 14th Portuguese Conference on Artificial Intelligence, (Aveiro, Portugal, October 12–15), 2010, pp.553–564.
74. Sebastiani F. Machine learning in automated text categorization// Journal of ACM Computing Surveys, 34(1, 2002, pp.1–42.

75. Sentz K., Ferson S. Combination of evidence in Dempster–Shafer theory// Report SAND 2002–0835, Sandia National Laboratories, 2002.
76. Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. – Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1976.
77. Smets P. Belief functions and transferable belief model// <http://ippserv.rug.ac.be>.
78. Sun Q., Ye X.Q., Gu W.K. A new combination rules of evidence theory// Acta Electronica Sinica, 28(8), 2000, pp.117–119.
79. Terzopoulos D., Witkin A., Kass M. Symmetry-seeking models and 3D object reconstruction// International Journal of Computer Vision, 1(3), 1987, pp.211–221.
80. Tyler C.W. Human Symmetry Perception and Its Computational Analysis. – Psychology Press, 2002.
81. Valizadegan H., Jin R., Zhang R., Mao J. Learning to Rank by Optimizing NDCG Measure// Advances in Neural Information Processing Systems, 22, 2010, pp.1883–1891.
82. Wang Q., Xu J., Li H., Craswell N. Regularized latent semantic indexing: A new approach to large-scale topic modeling// ACM Transactions on Information Systems, 31(1), 2013, pp.147–156.
83. Xia F., Liu T., Wang J., Zhang W., Li H. Listwise approach to learning to rank – theory and algorithm// Proceedings of the 25th International Conference on Machine Learning (Helsinki, Finland, July 5–9), 2008, pp.1192–1199.
84. Xin G., Xiao Y., You H. An Improved Dempster–Shafer Algorithm for Resolving the Conflicting Evidences// International Journal of Information Technology, 11(12), 2005, pp.68–75.
85. Xu R., Morgan A., Das A. K., Garber A. Investigation of unsupervised pattern learning techniques for bootstrap construction of a medical treatment lexicon//

- Proceedings of the Workshop on Current Trends in Biomedical Natural Language Processing (Stroudsburg, PA, USA), 2009, pp.63–70.
86. Yager R. On the Dempster–Shafer Framework and New Combination Rules// *Information Sciences*, 41, 1987, pp.93–137.
  87. Yodogawa E. Symmetropy, an entropy-like measure of visual symmetry// *Perception and Psychophysics*, 32(3), 1982, pp.230–240.
  88. Zabrodsky H., Peleg S., Avnir D. Symmetry as a continuous feature// *IEEE PAMI*, 17, 1995, pp.1154–1166.
  89. Zadeh L.A. Review of Books: A Mathematical Theory of Evidence// *The AI Magazine*, 5(3), 1984, pp.81–83.
  90. Zhang L. Representation, independence, and combination of evidence in the Dempster–Shafer theory// *Advances in the Dempster–Shafer Theory of Evidence*. R.R. Yager, J. Kacprzyk and M. Fedrizzi. New York:John Wiley & Sons, Inc., 1994, pp.51–69.
  91. Zielke T., Brauckmann M., Vonseelen W. Intensity and Edge-Based Symmetry Detection with an Application to Car-Following// *CVGIP: Image Understanding*, 58(2), 1993, pp.177–190.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Таблицы и рисунки к подразделу 1.4

**Таблица А.1 – Параметры для 6 индексов**

		<i>leverage = 0</i>					
		S&P 500	CAC 40	DAX	FTSE	Nikkei 225	Hang Seng
1	Значение $p$ такое, что необанкротившиеся агенты с большим значением $p$ на конец эксперимента имеют благосостояние, превышающее начальное	0.51	0.51	0.50	0.51	0.52	0.48
2	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ с вероятностью более 99% будут иметь благосостояние, превышающее начальное	0.56	0.55	0.56	0.56	0.57	0.54
3	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ с вероятностью более 99,9% будут иметь благосостояние, превышающее начальное	0.60	0.57	0.60	0.58	0.59	0.58
4	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ станут банкротами с вероятностью менее 1%	0.52	0.54	0.56	0.52	0.54	0.52
5	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ станут банкротами с вероятностью менее 0,1%	0.54	0.57	0.60	0.56	0.58	0.58
		<i>leverage = 2</i>					
1	Значение $p$ такое что, что необанкротившиеся агенты с большим значением $p$ на конец эксперимента имеют благосостояние, превышающее начальное	0.48	0.47	0.47	0.48	0.48	0.47
2	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ с вероятностью более 99% будут иметь благосостояние, превышающее начальное	0.57	0.57	0.58	0.56	0.58	0.58

Продолжение таблицы А.1

3	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ с вероятностью более 99,9% будут иметь благосостояние, превышающее начальное	0.63	0.64	0.61	0.63	>0.65	0.65
4	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ станут банкротами с вероятностью менее 1%	0.57	0.61	0.60	0.59	0.58	0.58
5	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ станут банкротами с вероятностью менее 0,1%	0.61	0.64	0.61	0.63	>0.65	0.65
	<i>leverage = 5</i>						
1	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ с вероятностью более 99% будут иметь благосостояние, превышающее начальное	0.64	0.62	0.63	0.61	0.63	0.71
2	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ с вероятностью более 99,9% будут иметь благосостояние, превышающее начальное	0.75	0.72	>0.75	0.71	0.72	>0.75
3	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ станут банкротами с вероятностью менее 1%	0.64	0.62	0.64	0.61	0.63	0.71
4	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ станут банкротами с вероятностью менее 0,1%	0.75	0.72	>0.75	0.71	0.71	>0.75
	<i>leverage = 10</i>						
1	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ с вероятностью более 99% будут иметь благосостояние, превышающее начальное	0.74	0.70	0.80	0.70	0.73	>0.85
2	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ с вероятностью более 99,9% будут иметь благосостояние, превышающее начальное	>0.85	>0.85	>0.85	>0.85	>0.85	>0.85
3	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ станут банкротами с вероятностью менее 1%	0.74	0.70	0.80	0.70	0.73	>0.85
4	Значение $p$ такое, что агенты с большим значением $p$ станут банкротами с вероятностью менее 0,1%	>0.85	>0.85	>0.85	>0.85	>0.85	>0.85

Таблица А.2 – Результаты стратегии «последователь» для S&P500

	leverage = 0			leverage = 2			leverage = 5			leverage = 10		
Значение $p$ у лидера	Среднее благосостояние	Доля увеличивших благосостояние	Доля банкротов	Среднее благосостояние	Доля увеличивших благосостояние	Доля банкротов	Среднее благосостояние	Доля увеличивших благосостояние	Доля банкротов	Среднее благосостояние	Доля увеличивших благосостояние	Доля банкротов
0.40	11 044	31.0	0.7	21 085	50.9	35.5	91 778	21.8	75.5	51 940	1.8	98.2
0.41	11 018	28.8	0.9	18 032	49.1	40.1	48 753	14.5	80.9	260 832	2.5	97.5
0.42	10 654	28.5	1.0	17 378	46.4	38.2	66 802	16.4	81.8	30 727	1	99
0.43	10 728	26.2	0.9	17 584	47.3	36.4	47 134	15.5	83.6	323 271	0.5	99.5
0.44	10 336	25.3	1.4	16 845	40.9	42.7	49 738	12.7	84.5	59 670	1.2	98.8
0.45	10 131	23.1	1.5	17 378	32.7	48.2	52 434	18.9	79.1	163 849	1.6	98.64
0.46	9 926	22.2	1.9	16 780	44.5	45.5	50 334	17.3	80.9	230 542	1.4	98.6
0.47	9 970	21.2	2.1	15 188	38.2	44.5	85 579	8.3	89.1	18 023	1.3	98.7
0.48	9 946	19.8	2.3	15 383	28.2	59.1	37 389	14.8	83.6	59 015	0.7	99.3
0.49	9 603	19.3	2.5	13 030	27.3	60.9	65 388	19.1	79.1	29 822	1.9	98.1
0.50	9 590	17.5	3.2	13 006	31.8	50.8	39 833	10.6	87.3	28 308	2.8	97.2
0.51	9 559	17.0	3.1	12 995	28.2	48.2	52 156	16.1	82.7	18 291	1.5	98.5
0.52	9 408	15.8	3.6	13 141	25.5	54.5	39 057	8.5	87.3	–	0	100
0.53	9 443	13.9	4.4	12 949	21.8	58.2	87 119	4.5	95.5	14 227	0.1	99.9
0.54	9 050	12.9	4.7	12 185	16.4	67.3	36 900	10.9	88.2	–	0	100
0.55	8 839	11.7	5.1	12 551	20.9	64.5	28 826	7.3	90.9	639 577	0.9	99.1
0.56	9 012	11.7	6.0	12 314	14.5	66.4	18 045	2.4	96.4	–	0	100
0.57	9 069	10.0	6.8	11 164	13.6	73.6	16 397	6.4	90.9	55 243	1.4	98.6
0.58	8 592	9.2	7.5	10 527	10.0	70.0	95 561	5.9	93.6	18 908	2.1	97.9
0.59	8 414	8.1	8.1	10 961	8.2	81.8	28 376	1.8	97.3	–	0	100
0.60	8 590	7.4	9.0	11 061	12.7	76.4	16 725	2.7	95.5	75 147	2.2	97.8

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**  
**Таблицы и рисунки к пункту 1.5.1**

**Таблица Б.1 – Описание данных**

Индекс	Dax	Cac40	Nasdaq	Hang – Seng	Nikkei 225
Страна	Германия	Франция	США	Китай	Япония
Город	Франкфурт	Париж	Нью – Йорк	Гонконг	Токио
Число наблюдений: базовый актив	5720	5720	5720	5720	5720
фьючерсный контракт	5720	5720	4345	5720	5720
Период данных	1991 – декабрь 2012				
Период данных для фьючерсного контракта	1991 – декабрь 2012	1991 – декабрь 2012	1996 – декабрь 2012	1991 – декабрь 2012	1991 – декабрь 2012

Источник данных: Bloomberg, finance.yahoo.com

**Таблица Б.2 – Описательные статистики**

Выборка	Биржа	Dax		CAC40		Nasdaq		Hang - Seng		Nikkei	
		Доходность	Inter	Intra	Inter	Intra	Inter	Intra	Inter	Intra	Inter
Pooled	min	-0,088	-0,071	-0,105	-0,072	-0,069	-0,090	-0,081	-0,110	-0,021	-0,100
	max	0,046	0,118	0,068	0,076	0,052	0,161	0,118	0,129	0,034	0,124
	mean	0,0005	-0,0001	0,0003	0,0000	0,0006	-0,0001	0,0004	0,0001	0,0003	-0,0004
	st.dev	0,006	0,013	0,008	0,012	0,007	0,014	0,010	0,013	0,006	0,013
	skewness	-1,20	0,20	-0,44	0,01	-0,44	0,15	-0,01	0,21	-0,12	0,11
	kurtosis	24,50	9,30	17,72	6,76	11,90	11,50	17,20	10,60	4,23	9,82
	corr.		0,08		-0,03		0,03		0,10		0,25
1991 - 1997	p - value		0,00		0,04		0,02		0,00		0,00
	corr.		0,27		0,02		0,07		0,28		0,30
1997 - 2000	p - value		0,00		0,34		0,01		0,00		0,00
	corr.		0,06		-0,13		-0,04		0,20		0,36
2000 - 2008	p - value		0,14		0,00		0,36		0,00		0,00
	corr.		0,10		-0,06		0,01		0,10		0,25
2008 - 2010	p - value		0,00		0,01		0,73		0,00		0,00
	corr.		0,07		0,05		0,10		-0,02		0,42
2010 - 2012	p - value		0,10		0,20		0,01		0,72		0,00
	corr.		-0,02		0,02		-0,02		0,02		0,17
	p - value		0,55		0,72		0,55		0,59		0,00

Таблица Б.3 – Статистические тесты проверки равенства математических ожиданий и дисперсий междневной и внутридневной доходности

Index	Dax	Cac	Nasdaq	HS	Nikkei
T- test, paired	2,886	1,786	3,150	1,559	3,990
p - value	0,002	0,037	0,001	0,060	0,000
d.f.	5552	5556	5524	5455	5391
F - test	4,269	2,017	3,282	1,656	5,138
p - value	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
d.f.	5553; 5552	5557; 5556	5525; 5524	5456; 5455	5392; 5391

В таблице приведены результаты парного Т– теста и F – теста. Р – значения приведены для правосторонней критической области.

Таблица Б.4 – Результаты теста Левена

Index	Статистика	p-значение	d.f.
Dax	1038,93	0,00	1; 11105
Cac	427,47	0,00	1; 11113
Nasdaq	844,58	0,00	1; 11049
Hang - Seng	310,95	0,00	1; 10911
Nikkei	1331,82	0,00	1; 10783

Нулевая гипотеза о равенстве дисперсий отвергается для всех пяти индексов.

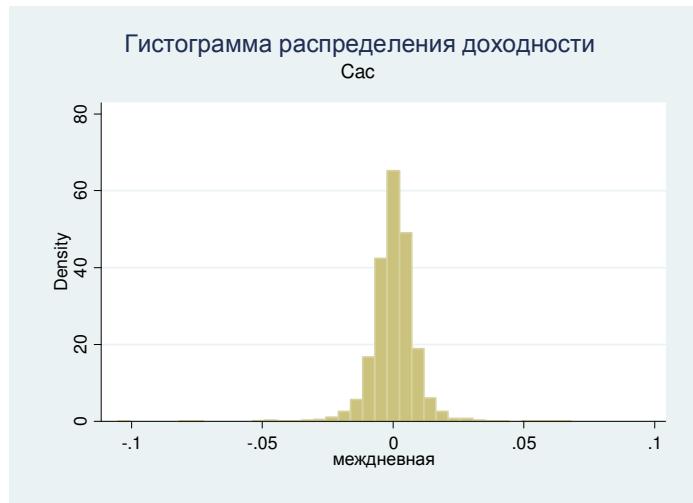


Рисунок Б.1 – Междневная гистограмма распределения доходностей

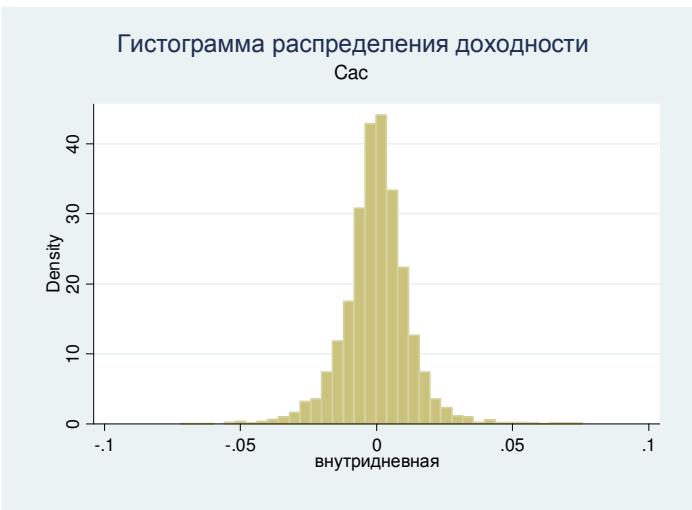


Рисунок Б.2 – Внутридневная гистограмма распределения доходностей

Таблица Б.5 – Калибровка модели по числу наблюдений в окне

Калибровка,Cac40	100	300	500	1000
средняя doch. без учета неоднородности	2,1	1,8	2,0	2,8
средняя doch. с учетом неоднородности	2,9	4,3	5,0	3,7
риск без учета неоднородности	288,5	291,6	291,0	280,4
риск с учетом неоднородности	315,2	309,5	308,0	302,3

Калибровка,Dax	100	300	500	1000
средняя doch. без учета неоднородности	6,9	6,9	8,0	6,4
средняя doch. с учетом неоднородности	19,0	20,5	21,0	20,9
риск без учета неоднородности	499,4	507,7	510,0	491,4
риск с учетом неоднородности	642,9	644,8	652,0	644,8

Калибровка,Nasdaq	100	300	500	1000
средняя doch. без учета неоднородности	-5,2	-2,1	-3,0	-4,2
средняя doch. с учетом неоднородности	4,7	6,2	5,0	-0,9
риск без учета неоднородности	477,4	490,6	490,0	501,3
риск с учетом неоднородности	594,2	606,3	610,0	628,3

Калибровка,Hang - Seng	100	300	500	1000
средняя doch. без учета неоднородности	4,3	2,7	2,0	1,4
средняя doch. с учетом неоднородности	6,3	5,4	3,0	1,6
риск без учета неоднородности	524,3	511,9	501,0	502,7
риск с учетом неоднородности	639,1	619,4	610,0	618,1

Калибровка,Nikkei	100	300	500	1000
средняя doch. без учета неоднородности	-0,8	0,5	1,0	0,1
средняя doch. с учетом неоднородности	11,6	11,1	12,0	12,7
риск без учета неоднородности	430,6	427,4	400,0	391,8
риск с учетом неоднородности	682,0	673,5	640,0	636,3

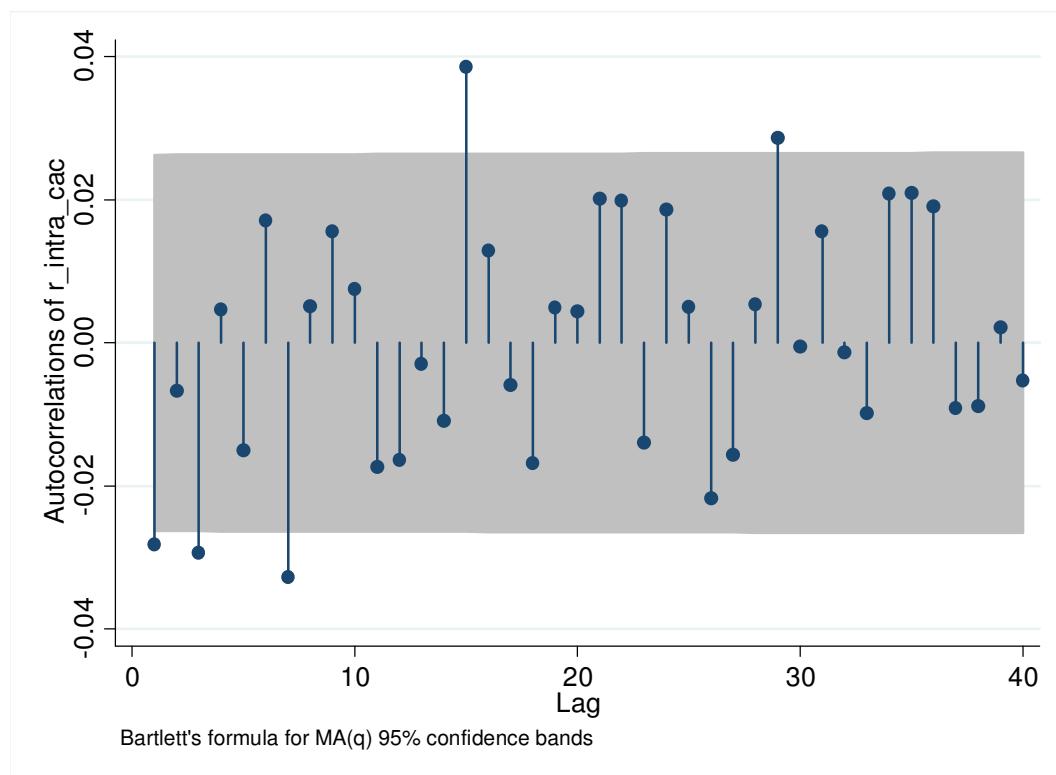


Рисунок Б.3 – Автокорреляция доходностей индекса Сас

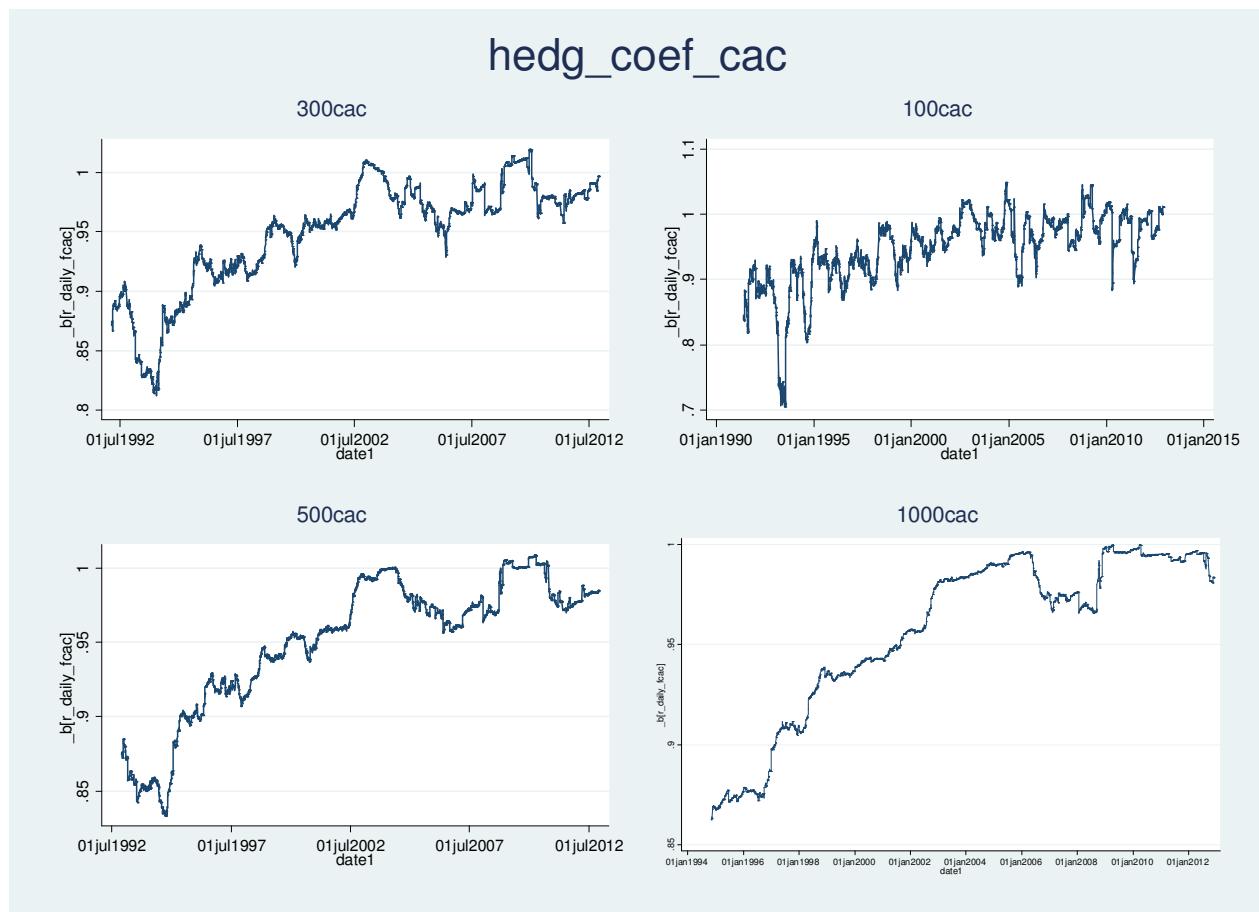


Рисунок Б.4 – Графики хеджирующего соотношения для различной ширины окна

## Критерий Колмогорова–Смирнова: теория и результаты

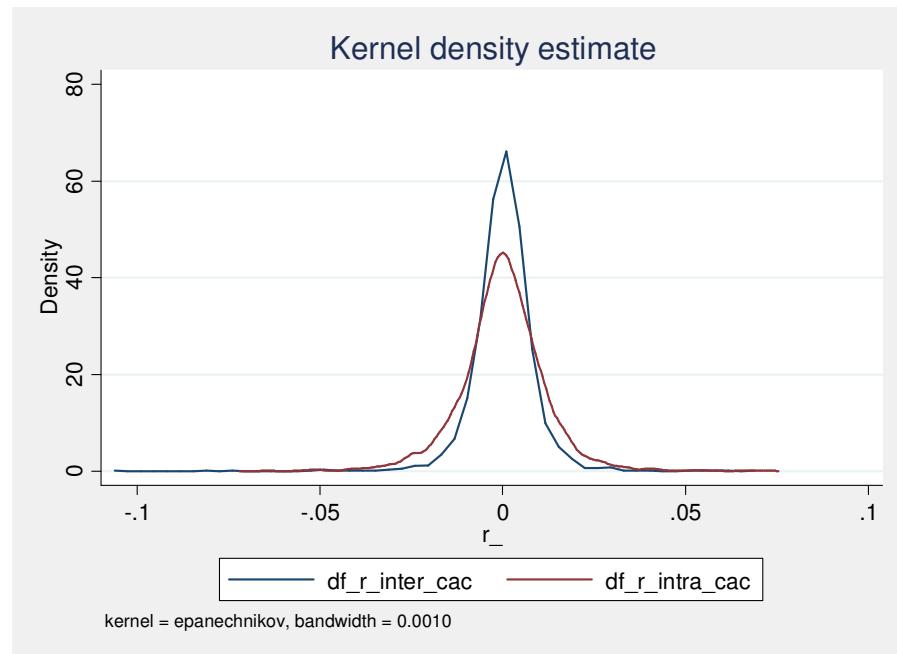


Рисунок Б.5 – Оценка плотности распределений доходностей

$$D = \sup(F_{1,n}(x) - F_{2,m}(x)) > c(a) \sqrt{\frac{n+m}{nm}}, \quad \text{где} \quad F_{i,n}(x) \quad - \quad \text{эмпирическая}$$

функция распределения,  $i = 1, 2$ ;  $c(a)$  определяется по таблице распределения Колмогорова.

Таблица Б.6 – Двухвыборочный критерий Колмогорова–Смирнова

Двухвыборочный критерий Колмогорова–Смирнова		
Подвыборка	D	P-значение
Междневная_Cac40	0,0903	0
Внутридневна_Cac40	-0,098	0
Модуль	0,098	0

N (число наблюдений) = 11090.

Таблица Б.7 – Значимость модели в целом и коэффициентов в отдельности

Seemingly unrelated regression						
Equation	Obs	Parms	RMSE	R-sq	chi2	P
r_inter_cac	5549	1	0,004	0,729	32880,490	0,000
r_intra_cac	5549	1	0,004	0,875	96795,910	0,000

Equation	Coef.	Std, Err.	z	P>z	[95% Conf. Interval]
r_inter_fcac	0,93	0,01	181,33	0,00	0,92      0,94
r_intra_fcac	0,95	0,00	311,12	0,00	0,95      0,96

Таблица Б.8 – Корреляция остатков уравнений

Correlation matrix of residuals:	r_inter_cac	r_intra_cac
r_inter_cac	1	
r_intra_cac	-0,7366	1

Таблица Б.9 – Проверка гипотезы о равенстве соотношений

(1) [r_inter_cac]r_inter_fcac - [r_intra_cac]r_intra_fcac = 0						
	Coef.	Std. Err.	z	P>z	[95% Conf. Interval]	
(1)	-0,027	0,0059	-4,58	0	-0,0391      -0,01566	

Таблица Б.10 – Проверка временных рядов в уровнях на стационарность. Расширенный тест Дикки–Фуллера. Тестирование текущих цен

Индекс, спот	Dax		Sac		Nasdaq		Hang – Seng		Nikkei	
Тип цены	Закрытия	Открытия	Закрытия	Открытия	Закрытия	Открытия	Закрытия	Открытия	Закрытия	Открытия
Тестовая статистика	-1,496	-2,692	-1,857	-2,084	-3,565	-1,588	-1,245	-1,147	-2,286	-2,278
Лаги дифференциала	2	2	3	2	6	1	3	4	1	2
Тренд_p – значение	0,123	0,037	0,787	0,695	0,020	0,282	0,222	0,317	0,072	0,090
MacKinon p – значение	0,535	0,240	0,352	0,251	0,033	0,490	0,654	0,696	0,442	0,446
Тип ряда	I(1)	I(1)	I(1)	I(1)	I(0)	I(1)	I(1)	I(1)	I(1)	I(1)

Если переменная тренда значима на 10% уровне, то он добавляется при тестировании, иначе удаляется.

Таблица Б.11 – Проверка временных рядов в уровнях на стационарность. Расширенный тест Дикки–Фуллера. Тестирование цен на фьючерс

Индекс на фьючерс	Dax		Sac		Nasdaq		Hang – Seng		Nikkei	
Тип цены	Закрытия	Открытия	Закрытия	Открытия	Закрытия	Открытия	Закрытия	Открытия	Закрытия	Открытия
Тестовая статистика	-1,426	-2,548	-1,719	-2,215	-2,187	-1,798	-2,189	-1,627	-2,509	-2,302
Лаги дифференциала	2	3	3	1	1	1	1	1	2	2
Тренд_p – значение	0,166	0,055	0,840	0,653	0,621	0,967	0,096	0,140	0,030	0,093
MacKinon p – значение	0,570	0,304	0,421	0,201	0,211	0,381	0,496	0,469	0,323	0,433
Тип ряда	I(1)	I(1)	I(1)	I(1)						

Таблица Б.12 – Тестирование остатков на стационарность расширенным тестом Дикки–Фуллера

Остатки	Dax		Sac		Hang – Seng		Nikkei		Nasdaq	
Тип	дневной	меж и внутри	дневной	меж и внутри	дневной	меж и внутри	дневной	меж и внутри	дневной	меж и внутри
Тестовая статистика	-5,129	-7,537	-4,541	-4,455	-4,453	-4,289	-5,226	-8,639	-1,441	-1,402
MacKinon p – значение	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000	0,563	0,581
Лаги дифференциала	7	8	5	6	6	12	5	6	4	9
Тренд_p – значение	0,895	0,728	0,566	0,430	0,564	0,610	0,805	0,409	0,194	0,147
Индикатор константы	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Тип ряда	I(0)	I(0)	I(0)	I(0)	I(0)	I(0)	I(0)	I(0)	I(1)	I(1)

Таблица Б.13 – Оценивание модели ECM для индекса Nasdaq. Значимость модели в целом

Source	SS	df	MS	Number of obs	=	500
				F( 16, 483)	=	605,27
Model	550144,3	16	34384,02	Prob > F	=	0,00
Residual	27438,4	483	56,81	R-squared	=	0,95
				Adj R-squared	=	0,95
Total	577582,6	499	1157,48	Root MSE	=	7,54

Таблица Б.14 – Оценивание модели ECM для индекса Nasdaq. Значимость отдельных коэффициентов

del_nas	Coef.	Std. Err.	t	P>t	95% Conf.	Interval]
del_fnas	1,183	0,012	95,600	0,000	1,158	1,207
rsnas						
L1.	-0,005	0,007	-0,680	0,494	-0,017	0,008
del_fnas						
L1.	0,316	0,055	5,720	0,000	0,207	0,424
L2.	0,102	0,057	1,790	0,074	-0,010	0,214
L3.	0,058	0,057	1,020	0,311	-0,054	0,170
L4.	0,078	0,057	1,360	0,173	-0,034	0,190
L5.	-0,042	0,057	-0,740	0,458	-0,153	0,069
L6.	-0,029	0,056	-0,520	0,605	-0,140	0,081
L7.	0,036	0,054	0,670	0,503	-0,070	0,143
del_nas						
L1.	-0,275	0,046	-6,030	0,000	-0,365	-0,186
L2.	-0,088	0,047	-1,860	0,063	-0,181	0,005
L3.	-0,081	0,047	-1,720	0,087	-0,174	0,012
L4.	-0,043	0,047	-0,910	0,361	-0,136	0,050
L5.	0,028	0,047	0,600	0,547	-0,064	0,121
L6.	0,014	0,047	0,310	0,760	-0,077	0,106
L7.	-0,033	0,045	-0,740	0,460	-0,121	0,055
_cons	-0,559	0,348	-1,600	0,109	-1,242	0,125

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**  
**Таблицы к подразделу 1.6**

**Таблица В.1 – Номера журналов по экономике в рейтингах по библиометрическим показателям и в агрегированных рейтингах (журналы упорядочены в соответствии с марковским ранжированием)**

	импакт-фактор	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR	правило Коуплнда (2 версия)	правило Коуплнда (3 версия)	непокрытое множество	минимальное внешнеустойчивое множество	марковское ранжирование
<b>Число позиций в рейтинге</b>	<b>200</b>	<b>207</b>	<b>159</b>	<b>204</b>	<b>30</b>	<b>201</b>	<b>65</b>	<b>135</b>	<b>139</b>	<b>59</b>	<b>37</b>	<b>211</b>
Journal of Economic Literature	1	1	4	2	10	1	1	1	1	1	1	1
Quarterly Journal of Economics	2	2	5	1	3	2	3	2	2	2	2	2
Journal of Finance	4	3	3	5	4	3	12	3	3	3	3	3
Journal of Economic Perspectives	5	4	21	6	7	6	6	4	4	4	4	4
Review of Financial Studies	3	7	9	7	5	7	11	5	5	5	5	5
Journal of Political Economy	11	6	55	3	9	5	11	6	6	6	5	6
Journal of Financial Economics	7	5	12	8	3	4	17	5	6	5	5	7
Journal of Economic Geography	10	8	2	35	10	12	32	7	7	7	6	8
Review of Economics and Statistics	16	14	23	11	9	10	18	8	8	7	6	9
Review of Economic Studies	12	11	24	4	12	9	15	7	7	7	6	10
American Economic Review	15	12	8	9	2	13	13	8	8	8	6	11
Journal of Accounting and Economics	9	9	72	24	13	8	35	9	9	9	7	12
Brookings Papers On Economic Activity	8	16	44	12	23	31	24	13	13	9	7	13
Journal of Econometrics	63	32	15	21	8	21	32	17	16	9	7	14
Journal of Human Resources	20	21	22	17	18	17	14	11	11	9	7	15
Journal of Economic Growth	19	13	126	10	20	16	33	12	12	9	7	16
Ecological Economics	14	19	43	69	1	45	13	10	10	9	7	17
Review of Environmental Economics and Policy	26	15	1	33	17	60	20	13	12	9	7	18
Energy Economics	21	25	31	62	6	26	18	13	13	9	7	19
Economic Journal	31	28	18	25	11	19	20	14	13	9	7	20
PharmacoEconomics	17	23	7	72	11	80	2	11	12	10	7	21
Journal of Urban Economics	32	30	22	42	14	20	16	19	17	9	7	22
Economic Geography	6	10	28	49	17	28	36	17	15	9	7	23
Journal of Environmental Economics and Management	25	22	36	34	13	22	19	15	14	9	7	24
Economic Policy	23	24	13	26	23	25	29	18	16	9	7	25
Experimental Economics	60	18	45	14	20	15	26	20	19	10	7	26

## Продолжение таблицы В.1

Journal of the European Economic Association	62	50	13	20	15	59	22	26	26	18	7	27
Journal of Health Economics	22	20	78	37	10	62	5	16	15	10	8	28
Journal of Banking & Finance	18	42	22	96	12	14	37	21	19	15	7	29
Value in Health	24	26	49	76	9	104	4	19	18	11	8	30
Economics Human Biology	13	35	20	87	18	107	8	23	23	14	7	31
Journal of Development of Economics	27	29	17	29	11	24	25	19	18	12	7	32
Journal of Monetary Economics	32	31	75	15	11	27	33	20	20	13	7	33
Journal of Labor Economics	40	17	53	13	20	23	34	22	21	10	8	34
Journal of Business and Economic Statistics	33	37	16	18	19	26	34	22	22	14	7	35
Journal of International Economics	36	27	61	22	13	11	39	23	24	16	9	36
Health Economics	28	33	27	55	12	72	7	21	20	14	8	37
Food Policy	29	38	44	90	16	47	9	24	25	17	8	38
Journal of Public Economics	52	44	81	32	12	30	21	25	26	17	10	39
Small Business Economics	44	41	46	98	13	34	47	27	28	18	11	40
World Development	45	45	64	70	13	44	23	27	28	18	11	41
RAND Journal of Economics	50	40	91	16	18	37	43	30	29	18	11	42
World Bank Economic Review	77	34	29	30	17	38	43	27	27	17	11	43
International Journal of Forecasting	50	36	14	51	17	52	38	28	28	18	11	44
Journal of Applied Econometrics	35	46	34	28	19	42	36	27	28	18	11	45
European Economic Review	47	54	77	43	17	51	37	32	32	20	11	46
Environmental & Resource Economics	48	66	26	91	16	121	31	34	35	21	11	47
Journal of Financial and Quantitative Analysis	34	47	76	31	19	35	40	29	29	19	11	48
Journal of Economic Theory	73	78	38	27	14	66	43	35	37	20	12	49
Industrial and Corporate Change	59	48	32	71	16	63	28	31	30	20	12	50
Journal of Risk and Uncertainty	46	43	57	39	21	53	30	32	31	20	12	51
Journal of Money Credit and Banking	80	65	40	38	16	50	49	34	36	20	12	52
Journal of Economic Surveys	65	49	42	59	19	36	32	33	33	21	12	53
International Economic Review	41	63	137	23	19	43	41	33	33	20	12	54
Oxford Review of Economic Policy	118	51	10	56	19	69	16	34	34	21	12	55
Journal of Law and Economics	105	52	28	40	20	81	35	34	37	20	12	56
Economy and Society	37	39	128	53	16	86	51	37	37	20	12	57
Journal of Regional Science	30	53	68	79	20	77	44	37	39	22	12	58
Quantitative Marketing and Economics	49	64	22	36	23	86	50	38	38	21	12	59
JCMS – Journal of Common Market Studies	66	57	92	80	16	61	54	41	41	22	13	60
Journal of Agricultural Economics	43	59	93	108	21	118	28	49	45	23	13	61
Review of Economic Dynamics	61	70	30	19	21	48	39	35	35	20	12	62

## Продолжение таблицы В.1

Mathematical Finance	70	68	63	46	20	18	42	36	38	22	12	63
Journal of Agrarian Change	64	74	11	95	21	39	37	39	39	22	12	64
Resource and Energy Economics	71	76	33	85	21	96	37	45	43	23	13	65
Regional Studies	74	62	51	115	13	49	51	43	42	23	12	66
Journal of Economics and Management Strategy	80	80	60	48	19	68	49	43	40	23	12	67
Journal of Economic Dynamics and Control	110	107	80	66	16	57	36	42	42	22	13	68
World Bank Research Observer	56	55	87	54	24	91	35	40	40	22	13	69
Journal of Economic Psychology	82	72	97	81	17	74	34	41	42	23	13	70
Cambridge Journal of Regions Economy and Society	39	56	6	101	23	152	53	59	56	23	13	71
Journal of Risk and Insurance	57	87	44	88	21	82	10	43	41	22	13	72
Journal of Economic Behavior and Organization	93	85	89	61	15	113	48	50	49	24	13	73
Land Economics	67	58	94	83	18	111	43	44	43	23	13	74
Journal of Law Economics & Organization	88	67	62	41	21	78	53	51	47	24	13	75
Journal of Policy Analysis and Management	79	60	90	58	18	88	52	48	45	23	13	76
Economics of Education Review	82	83	41	98	18	46	51	46	44	23	13	77
Econometric Reviews	119	89	128	44	20	90	27	53	51	23	13	78
American Journal of Agricultural Economics	75	75	92	102	15	87	41	45	45	23	13	79
Applied Economic Perspectives and Policy	42	77	85	118	28	33	50	53	52	24	13	80
Economica	76	95	52	68	21	85	47	52	50	24	13	81
Econometric Theory	110	121	35	50	21	95	42	55	54	25	13	82
European Review of Agricultural Economics	58	61	59	94	24	98	40	47	46	22	13	83
Games and Economic Behavior	114	98	82	45	18	108	45	55	53	23	13	84
Papers in Regional Science	55	69	65	117	20	67	49	45	44	23	13	85
Regional Science and Urban Economics	92	86	80	78	20	100	51	61	59	27	13	86
Journal of Population Economics	102	96	80	89	20	112	53	68	66	28	13	87
Journal of Comparative Economics	87	71	138	73	20	56	50	54	52	25	13	88
Insurance Mathematics & Economics	68	85	104	93	18	32	42	46	44	23	13	89
Cambridge Journal of Economics	54	88	100	112	18	58	49	51	48	24	13	90
Work Employment and Society	72	73	156	119	19	54	53	56	55	26	13	91
Economic Inquiry	96	101	83	60	20	131	35	58	57	24	13	92
Inžinerinė ekonomika – Engineering Economics	51	106	107	197	17	73	45	55	56	25	13	93
Oxford Bulletin of Economics and Statistics	94	84	140	63	22	70	44	57	58	25	13	94
KYKLOS	107	79	67	100	22	88	51	65	63	27	13	95
Journal of Industrial Economics	84	97	131	47	22	65	51	60	60	25	13	96

## Продолжение таблицы В.1

Labour Economics	103	99	119	65	19	97	49	63	62	25	13	97
International Journal of Industrial Organization	111	100	102	57	20	71	51	64	62	25	13	98
Canadian Journal of Economics – La Revue canadienne d'économique	137	127	50	86	22	94	50	69	68	28	13	99
Economic Development and Cultural Change	97	81	117	74	23	92	49	64	63	27	14	100
Oxford Economic Papers	78	92	54	82	22	117	51	62	61	27	13	101
Journal of Economic History	91	114	58	67	24	40	57	64	64	27	14	102
Scandinavian Journal of Economics	148	118	103	52	23	99	47	71	71	29	15	103
Real Estate Economics	89	94	101	77	24	41	49	62	60	25	14	104
Journal of Transport Economics and Policy	98	108	79	120	24	83	43	66	67	25	14	105
China Economic Review	100	93	95	146	22	64	49	67	65	25	15	106
Australian Journal of Agricultural and Resource Economics	83	102	159	130	21	118	39	68	68	27	14	107
Futures	69	91	88	171	19	146	53	68	68	28	14	108
Economics and Philosophy	123	131	37	111	27	103	43	79	77	28	13	109
Bulletin of Indonesian Economic Studies	53	120	7	154	25	29	59	77	75	28	14	110
Information Economics and Policy	99	113	129	113	22	79	46	72	70	28	15	111
Journal of Evolutionary Economics	94	82	126	129	21	150	56	80	76	30	15	112
Explorations in Economic History	101	133	19	99	24	75	54	73	70	29	15	113
Review of Income and Wealth	116	115	86	92	22	76	56	75	71	30	15	114
Economic History Review	118	127	48	103	24	86	60	82	77	31	16	115
Public Choice	104	103	99	97	18	124	54	70	69	29	15	116
Economic Theory	130	139	25	75	20	134	56	80	77	28	15	117
Review of International Political Economy	85	124	66	107	20	140	57	74	73	30	15	118
Journal of Productivity Analysis	108	90	142	121	22	101	52	72	72	28	14	119
Journal of Development Studies	117	110	70	116	20	129	56	76	74	30	15	120
Journal of Real Estate Finance and Economics	106	118	112	124	24	55	53	79	75	30	15	121
Post-Soviet Affairs	38	119	132	133	25	89	58	87	85	32	16	122
Econometrics Journal	109	129	73	64	24	109	54	78	74	30	15	123
World Economy	127	111	108	109	20	133	58	80	78	30	15	124
Feminist Economics	136	109	113	111	22	110	55	81	79	30	15	125
Journal of Regulatory Economics	112	122	96	105	24	137	51	78	75	30	15	126
Canadian Journal of Agricultural Economics – La Revue canadienne d'agroéconomie	90	116	98	151	24	162	53	86	82	31	16	127
Agricultural Economics	121	104	122	131	27	114	41	82	80	31	16	128
Journal of Real Estate Research	81	112	141	149	26	93	53	83	82	30	15	129

## Продолжение таблицы В.1

Journal of African Economies	142	130	71	136	25	115	50	85	83	31	14	130
Review of World Economics	120	117	152	123	23	126	55	87	84	31	16	131
Journal of Forest Economics	115	105	69	152	25	123	58	89	84	30	16	132
Southern Economic Journal	132	140	89	106	22	136	53	84	81	31	15	133
Quantitative Finance	122	132	111	118	23	149	48	84	82	31	15	134
Transformations in Business and Economics	95	125	118	194	21	164	54	88	85	31	16	135
New Political Economy	86	123	121	137	23	132	60	90	86	32	16	136
ASTIN Bulletin	151	151	101	122	24	105	57	93	91	31	16	137
CESifo Economic Studies	135	128	69	127	24	162	57	91	88	32	17	138
Federal Reserve Bank of St Louis Review	143	158	126	84	25	171	52	97	96	34	18	139
Macroeconomic Dynamics	156	163	109	110	24	120	57	95	96	32	16	140
Journal of Housing Economics	145	135	62	142	24	106	57	92	90	33	16	141
Economics of Transition	129	134	39	148	24	145	58	94	89	33	16	142
Theory and Decision	152	166	121	128	24	158	57	101	101	35	18	143
Journal of Policy Modeling	131	146	114	162	22	114	52	89	86	31	16	144
Economic Development Quarterly	133	126	115	167	22	121	55	90	87	32	16	145
Journal of Macroeconomics	150	160	126	143	23	119	58	96	97	34	18	146
Social Choice and Welfare	158	162	134	104	22	166	55	100	100	35	17	147
Journal of Competition Law and Economics	113	142	135	151	25	102	59	97	97	33	16	148
Fiscal Studies	151	167	47	147	25	116	58	99	99	35	18	149
Review of Development Economics	126	141	146	132	23	147	56	93	91	32	17	150
Economic Modelling	125	148	128	159	22	135	55	92	92	33	17	151
Empirical Economics	138	137	125	141	23	130	55	91	89	32	17	152
International Tax and Public Finance	146	138	159	126	23	141	57	98	93	33	18	153
Contemporary Economic Policy	139	144	155	139	23	163	54	95	95	33	18	154
Tijdschrift voor Economische en Sociale Geografie	128	147	74	161	23	142	58	95	94	34	18	155
Journal of Agricultural and Resource Economics	124	145	153	164	26	118	39	94	95	32	17	156
Geneva Risk and Insurance Review	134	154	159	135	28	84	55	98	98	33	18	157
Europe–Asia Studies	141	157	158	163	23	128	61	105	104	35	18	158
Review of Industrial Organization	154	143	103	125	25	159	59	100	99	35	18	159
Journal of Economics / Zeitschrift f	140	152	93	155	26	161	60	106	106	37	18	160
Journal of the Japanese and International Economies	161	150	106	134	25	154	59	104	102	36	18	161
Journal of Mathematical Economics	177	180	120	145	24	148	56	107	105	37	19	162
National Tax Journal	165	162	55	144	26	156	55	106	105	35	19	163
Economic Record	163	136	127	140	23	138	59	102	99	36	18	164

## Продолжение таблицы В.1

Economics Letters	157	169	143	138	19	165	52	103	103	35	18	165
Applied Economics	155	149	144	166	21	155	58	103	103	35	19	166
Cliometrica	153	155	128	168	26	139	62	108	108	38	20	167
International Journal of Game Theory	174	172	154	114	25	133	57	109	106	37	19	168
Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics	160	153	159	150	26	127	56	107	105	37	19	169
China & World Economy	147	167	105	170	25	172	58	108	107	38	20	170
Scottish Journal of Political Economy	187	161	159	153	25	157	58	109	109	38	20	171
Journal of Post Keynesian Economics	176	175	130	178	24	144	57	113	111	38	20	172
Journal of Media Economics	149	165	76	173	27	160	59	110	110	40	20	173
Pacific Economic Review	144	170	109	173	25	169	60	111	110	40	20	174
Journal of Institutional and Theoretical Economics	175	182	56	160	25	189	61	117	117	44	20	175
International Labour Review	168	156	145	165	24	176	61	112	112	38	20	176
Defence and Peace Economics	162	171	56	172	25	180	63	114	114	42	20	177
International Review of Law and Economics	158	168	149	158	25	183	59	114	113	41	21	178
Developing Economies	193	159	110	169	27	177	57	115	115	40	21	179
Open Economies Review	158	164	133	157	26	153	59	110	111	39	20	180
International Journal of Transport Economics	167	179	130	177	28	167	59	115	116	43	20	181
Japanese Economic Review	182	173	151	156	26	174	61	117	118	44	21	182
American Journal of Economics and Sociology	173	177	84	174	25	186	61	116	117	43	21	183
Journal of Economic Issues	171	176	127	184	23	173	62	116	119	43	21	184
Japan and the World Economy	169	181	150	175	26	151	61	116	119	44	21	185
Manchester School	183	178	136	173	25	175	60	117	119	44	21	186
Post-Communist Economies	155	174	159	187	27	168	61	118	120	45	21	187
Politická ekonomie	164	187	80	195	26	170	62	119	121	45	21	188
Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik	181	184	153	179	26	177	61	118	122	45	22	189
Applied Economics Letters	186	190	157	182	23	181	61	120	125	46	24	190
Australian Economic Review	180	191	109	185	26	182	61	121	126	47	25	191
History of Political Economy	185	195	137	183	26	143	62	122	126	45	26	192
South African Journal of Economics	159	183	148	189	27	179	58	118	124	45	21	193
Journal of World Trade	166	185	43	181	26	178	63	118	123	45	23	194
Journal of Economic Education	184	186	159	191	28	125	62	126	128	50	28	195
Eastern European Economics	170	188	120	190	27	185	62	123	127	48	26	196
Australian Economic History Review	172	189	159	186	27	187	54	124	128	49	27	197
Ekonomický časopis – Journal of Economics	178	197	116	202	26	188	62	125	129	50	28	198
Independent Review	179	194	147	176	27	193	63	125	130	50	28	199

## Продолжение таблицы В.1

European Journal of the History of Economic Thought	189	199	159	188	27	122	64	128	131	52	30	200
FinanzArchiv – Public Finance Analysis	190	192	159	180	27	184	62	126	130	50	28	201
Hacienda Pública Española	188	193	159	186	30	192	61	127	131	51	29	202
Portuguese Economic Journal	194	196	123	194	27	191	63	128	132	52	30	203
Journal of Economic Policy Reform	195	200	124	193	28	195	64	129	133	53	31	204
La Revista de economía aplicada	196	198	139	192	29	190	64	129	133	53	31	204
La Revista de Economía Mundial	174	202	85	199	30	197	64	130	134	54	32	205
South African Journal of Economic and Management Sciences	192	201	150	198	28	200	64	132	134	54	32	206
Investigación Económica	191	204	120	200	29	196	64	131	135	55	33	207
La Revue d'Economie Politique	197	203	147	196	28	198	65	132	136	56	34	208
El Trimestre Económico	198	205	159	201	29	194	64	133	137	57	35	209
Hitotsubashi Journal of Economics	199	207	159	204	30	199	64	134	138	58	36	210
La Revue d'études comparatives Est–Ouest	200	206	159	203	30	201	65	135	139	59	37	211

Таблица В.2 – Номера журналов по менеджменту в рейтингах по библиометрическим показателям и в агрегированных рейтингах (журналы упорядочены в соответствии с марковским ранжированием)

	импакт-фактор	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR	правило Коуплана (2 версия)	правило Коуплана (3 версия)	непокрытое множество	минимальное внешнеустойчивое множество	марковское ранжирование
<b>Число позиций в рейтинге</b>	<b>90</b>	<b>92</b>	<b>84</b>	<b>91</b>	<b>30</b>	<b>92</b>	<b>41</b>	<b>68</b>	<b>69</b>	<b>42</b>	<b>33</b>	<b>93</b>
Academy of Management Review	1	1	2	2	2	2	4	1	1	1	1	1
Academy of Management Journal	2	2	14	1	3	4	7	2	2	2	2	2
Journal of Applied Psychology	8	4	24	5	1	5	2	3	3	3	3	3
MIS Quarterly	5	3	12	7	9	1	6	3	3	3	3	4
Journal of Management	4	5	3	4	7	7	6	3	3	3	3	5
Strategic Management Journal	12	7	19	9	4	6	13	4	4	4	4	6
Journal of Operations Management	6	9	29	16	5	3	3	5	5	5	5	7
Administrative Science Quarterly	10	6	71	3	15	9	14	6	6	6	6	8
Organization Science	7	10	4	8	6	15	14	7	7	6	6	9
Personnel Psychology	20	8	25	6	10	10	11	7	8	6	6	10

## Продолжение таблицы В.2

Omega – International Journal of Management Science	16	24	6	29	8	13	1	9	10	8	8	11
Journal of Management Studies	9	12	1	14	10	18	15	8	9	7	7	12
Journal of International Business Studies	15	13	12	19	5	14	16	11	11	8	8	13
Organizational Research Methods	18	11	8	10	15	23	5	10	11	8	8	14
Journal of Organizational Behavior	11	15	7	17	15	29	16	12	12	9	9	15
Management Science	36	26	27	12	9	21	9	13	13	9	9	16
Organizational Behavior and Human Decision Processes	19	20	34	11	12	36	9	13	13	10	9	17
Research Policy	24	19	39	23	6	19	10	13	14	9	9	18
Tourism Management	22	22	26	48	11	8	17	15	16	9	9	19
Academy of Management Learning and Education	3	18	11	28	19	31	22	18	18	10	9	20
Leadership Quarterly	21	16	30	25	13	17	20	14	15	10	9	21
International Journal of Management Reviews	14	14	47	20	20	22	12	16	17	10	10	22
Academy of Management Perspectives	13	34	5	27	16	52	14	19	19	12	11	23
Information Systems Research	31	17	41	13	16	12	21	18	18	10	10	24
Operations Research	41	45	40	18	14	24	5	19	19	10	10	25
M&SOM – Manufacturing and Service Operations Management	48	42	35	15	19	30	8	23	23	13	10	26
Information and Management	29	21	64	41	12	11	11	17	18	11	10	27
Organization Studies	27	25	40	22	13	27	25	21	21	12	11	28
Technovation	17	33	18	60	14	20	19	20	20	12	10	29
Journal of Product Innovation Management	32	23	38	34	18	25	24	22	22	12	11	30
Group and Organization Management	26	31	13	40	21	28	25	24	24	13	12	31
Human Relations	37	40	31	37	17	42	24	29	30	15	12	32
Industrial Marketing Management	44	35	22	67	14	38	29	30	31	15	12	33
European Journal of Work and Organizational Psychology	33	32	17	30	22	44	19	27	27	13	12	34
Journal of Management Information Systems	49	30	78	31	15	16	23	25	26	13	11	35
R and D Management	25	27	53	44	21	34	18	25	25	13	12	36
Decision Sciences	52	28	62	26	19	26	22	25	26	13	12	37
Journal of Information Technology	28	29	9	36	23	41	31	27	28	14	12	38
California Management Review	40	38	43	35	20	33	23	28	29	13	12	39
Industrial and Corporate Change	51	49	23	33	18	47	11	30	29	16	12	40
International Journal of Forecasting	47	37	15	24	20	43	19	26	27	13	12	41
Harvard Business Review	55	46	33	32	16	56	22	33	34	16	11	42

## Продолжение таблицы В.2

Small Business Economics	42	44	32	45	15	37	25	31	32	15	12	43
Long Range Planning	30	41	16	42	20	48	24	31	32	15	14	44
Journal of Occupational and Organizational Psychology	34	43	5	38	21	50	25	32	33	17	15	45
Supply Chain Management	43	39	72	52	18	39	23	33	33	16	13	46
British Journal of Management	45	36	20	43	21	55	28	34	35	18	16	47
Journal of Economics and Management Strategy	62	62	36	21	21	49	27	38	38	19	16	48
Human Resource Management	45	48	52	47	21	45	26	35	36	18	16	49
Journal of Small Business Management	50	47	75	49	22	32	25	36	37	19	16	50
International Journal of Operations and Production Management	61	53	83	58	18	35	26	38	39	20	16	51
IEEE Transactions on Engineering Management	68	56	74	55	20	49	26	41	42	21	18	52
Organization	39	51	21	39	22	51	31	37	38	19	17	53
Small Group Research	53	59	73	48	23	58	20	41	43	20	19	54
International Small Business Journal	46	50	42	66	22	40	31	39	40	20	18	55
Journal of the Operational Research Society	67	65	56	51	19	62	23	42	45	21	20	56
Service Industries Journal	23	52	65	74	20	75	33	44	46	23	19	57
Management Learning	38	54	49	61	22	53	29	40	41	20	18	58
MIT Sloan Management Review	67	57	48	46	23	61	27	41	43	21	19	59
Corporate Governance – An International Review	35	61	53	71	20	57	28	41	44	22	19	60
International Journal of Selection and Assessment	54	63	45	59	22	64	32	43	46	23	20	61
International Journal of Human Resource Management	63	58	70	68	17	59	34	44	47	24	20	62
Technology Analysis and Strategic Management	80	62	46	64	23	67	30	46	50	25	22	63
Journal of Forecasting	69	78	57	50	25	68	26	48	49	26	22	64
New Technology, Work and Employment	71	70	50	70	27	69	33	51	53	28	23	65
Gender, Work and Organization	58	60	69	54	24	60	30	43	46	23	20	66
Journal of Engineering and Technology Management (JET-M)	64	55	76	56	23	66	29	45	48	24	21	67
System Dynamics Review	74	71	67	62	26	54	29	49	52	24	20	68
Group Decision and Negotiation	65	73	77	63	25	65	29	50	51	25	22	69
Journal of Management Inquiry	59	64	10	53	25	80	36	47	50	25	22	70
Journal of Sport Management	76	67	37	77	25	46	35	51	51	26	23	71
Public Management Review	70	69	59	65	22	63	35	49	51	27	22	72
Leadership	60	68	63	69	25	77	34	52	52	28	23	73
Interfaces	75	76	67	57	25	71	29	53	53	29	23	74
Personnel Review	81	66	68	73	24	72	34	54	54	26	23	75

## Продолжение таблицы В.2

Total Quality Management and Business Excellence	82	82	58	85	25	73	32	57	57	30	24	76
Organizational Dynamics	77	74	61	72	24	76	35	55	55	29	24	77
Journal of Organizational Change Management	79	80	75	75	24	70	33	55	56	29	24	78
Research Technology Management	72	75	58	79	25	89	39	59	60	30	25	79
Journal of Organizational Behavior Management	56	79	44	81	27	86	38	59	60	30	25	80
Journal of Service Management	57	72	60	80	29	81	35	58	59	33	24	81
Service Business	66	77	28	86	26	78	34	56	57	30	24	82
International Journal of Manpower	84	83	51	76	25	74	35	57	58	31	24	83
Review of Industrial Organization	87	85	54	58	27	79	36	58	59	32	24	84
Systems Research and Behavioral Science	78	87	79	78	26	85	34	60	61	34	25	85
Canadian Journal of Administrative Sciences – Revue Canadienne des Sciences de L'Administration	84	84	55	82	27	82	37	61	62	35	26	86
Cornell Hospitality Quarterly	73	81	66	87	28	87	35	62	63	36	27	87
International Journal of Technology Management	85	86	82	83	25	83	36	63	64	37	28	88
Systemic Practice and Action Research	86	89	80	88	27	84	35	64	65	38	29	89
Chinese Management Studies	83	88	58	89	29	88	38	65	66	39	30	90
Negotiation Journal	88	90	84	84	28	90	33	66	67	40	31	91
Zeitschrift für Personalforschung	89	91	84	90	30	91	40	67	68	41	32	92
South African Journal of Economic and Management Sciences	90	92	81	91	30	92	41	68	69	42	33	93

Таблица В.3 – Номера журналов по политологии в рейтингах по библиометрическим показателям и в агрегированных рейтингах (журналы упорядочены в соответствии с марковским ранжированием)

	импакт-фактор	5-летний импакт-фактор	индекс оперативности	индекс влияния	индекс Хирша	SNIP	SJR	правило Коуплнда (2 версия)	правило Коуплнда (3 версия)	непокрытое множество	минимальное внешнеустойчивое множество	Марковское ранжирование
<b>Число позиций в рейтинге</b>	<b>95</b>	<b>98</b>	<b>72</b>	<b>95</b>	<b>19</b>	<b>97</b>	<b>28</b>	<b>69</b>	<b>66</b>	<b>42</b>	<b>36</b>	<b>97</b>
American Journal of Political Science	2	3	24	3	1	3	1	1	1	1	1	1
American Political Science Review	1	4	14	2	2	2	4	1	1	1	1	2
Political Analysis	5	1	8	1	7	5	3	1	1	1	1	3
Public Opinion Quarterly	3	2	25	8	3	9	2	2	2	2	2	4
Annual Review of Political Science	11	5	17	4	6	1	6	3	3	3	3	5
Journal of Conflict Resolution	4	7	12	6	5	7	8	4	4	4	4	6
Political Geography	8	6	15	17	3	20	11	5	5	5	5	7
Journal of Peace Research	9	15	4	14	5	11	10	6	6	5	5	8
Comparative Political Studies	14	10	5	9	4	10	12	6	5	5	5	9
Journal of Politics	18	8	33	7	4	21	9	6	5	5	5	9
Political Psychology	11	9	13	15	8	26	7	7	7	6	6	10
British Journal of Political Science	17	16	19	11	6	4	11	8	8	7	7	11
African Affairs	15	24	7	25	8	8	10	9	9	8	8	12
Politics and Society	7	12	39	12	8	27	19	11	12	9	8	13
International Studies Quarterly	22	11	44	10	5	14	18	9	10	8	8	14
European Union Politics	23	13	16	19	8	12	17	10	11	9	9	15
JCMS – Journal of Common Market Studies	21	22	28	27	5	22	18	12	14	9	8	16
Global Environmental Politics	6	20	42	44	8	23	11	13	13	11	11	17
West European Politics	31	29	1	30	7	19	18	14	15	9	8	18
European Journal of Political Research	18	14	11	16	8	54	20	13	13	10	9	19
Political Communication	24	18	9	18	10	15	16	12	14	10	10	20
Political Behavior	13	17	58	13	12	25	14	11	13	9	9	21
Policy Studies Journal	10	33	2	54	9	17	10	11	13	9	9	22
Governance	15	21	46	28	9	24	16	15	16	12	12	23
New Left Review	16	27	37	20	10	13	19	16	17	13	13	24
Quarterly Journal of Political Science	27	19	72	5	12	64	18	22	19	14	14	25
Annals of the American Academy of Political and Social Science	33	31	30	33	6	59	13	17	18	14	14	26

### Продолжение таблицы В.3

Environmental Politics	19	28	35	51	8	46	15	17	18	14	14	27
Political Studies	41	35	70	23	8	18	17	19	18	14	14	28
Journal of Political Philosophy	26	32	53	26	12	20	20	21	20	15	15	29
International Political Sociology	20	25	52	37	8	55	24	24	22	15	15	30
Social Science Quarterly	34	36	45	43	9	49	13	23	24	16	15	31
Public Choice	39	37	32	36	7	52	18	24	24	15	15	32
Human Rights Quarterly	25	51	66	56	12	37	23	34	33	20	20	33
International Journal of Press/Politics	28	26	3	31	12	28	19	18	18	14	14	34
Electoral Studies	48	30	10	22	9	48	23	20	21	14	14	35
Political Research Quarterly	37	34	63	29	8	40	21	26	22	16	15	36
Party Politics	35	39	13	34	10	34	20	23	23	15	15	37
Legislative Studies Quarterly	42	38	13	21	13	33	21	25	23	17	15	38
Journal of Democracy	32	40	23	38	10	16	21	27	25	16	17	39
Scandinavian Political Studies	47	23	59	24	14	6	24	31	28	16	15	40
Review of International Political Economy	29	48	21	46	9	61	20	27	26	16	16	41
Post-Soviet Affairs	12	45	58	50	14	32	21	30	29	19	18	42
Publius – The Journal of Federalism	46	43	26	48	12	43	19	28	27	18	18	43
Comparative Politics	45	44	56	32	13	44	21	29	28	19	18	44
Terrorism and Political Violence	38	42	57	40	13	42	23	31	27	18	18	45
Acta Politica	53	41	59	39	12	53	22	30	30	18	18	46
New Political Economy	30	47	51	52	11	57	23	32	31	20	18	47
Government and Opposition	62	56	40	52	13	35	5	32	30	19	18	48
American Politics Research	49	50	36	43	12	62	23	32	32	19	18	49
Political Theory	56	59	49	47	14	30	18	33	32	19	18	50
International Political Science Review	57	55	41	53	12	36	23	34	34	21	19	51
Armed Forces and Society	43	52	54	68	14	39	20	34	34	19	18	52
Cooperation and Conflict	40	57	48	71	14	41	23	39	36	23	21	53
Studies in Comparative International Development	52	46	72	45	14	56	22	35	34	20	18	54
Latin American Politics and Society	70	49	72	35	13	58	22	37	35	22	21	55
Policy and Politics	50	54	43	61	12	65	23	36	36	22	21	56
Journal of Strategic Studies	36	62	6	58	14	31	26	38	36	22	21	57
State Politics and Policy Quarterly	75	56	72	49	13	38	23	39	37	22	21	58
Parliamentary Affairs	54	65	27	62	13	51	24	40	38	24	21	59
Europe–Asia Studies	59	63	71	67	12	53	24	43	40	22	21	60
Local Government Studies	69	71	66	81	13	47	24	48	45	26	24	61
Journal of Theoretical Politics	69	61	34	41	13	71	24	44	39	22	21	62
Studies in American Political Development	83	53	72	42	15	29	26	53	46	29	24	63
Survival	58	70	20	57	14	45	24	41	39	24	22	64
Studies in Conflict and Terrorism	63	60	43	59	12	63	25	42	41	25	21	65

### Продолжение таблицы В.3

PS – Political Science and Politics	64	74	55	66	11	68	24	45	43	26	23	66
Communist and Post-Communist Studies	60	68	72	64	13	66	19	46	42	26	23	67
Political Science Quarterly	68	66	61	55	13	70	25	46	44	26	23	68
Historical Materialism – Research in Critical Marxist Theory	51	73	64	70	14	69	24	48	46	27	24	69
Monthly Review – An Independent Socialist Magazine	65	79	18	72	15	73	23	49	47	27	24	70
East European Politics and Societies	72	64	50	65	13	74	26	51	46	27	24	71
Latin American Perspectives	74	76	47	78	13	72	23	51	48	27	24	72
Australian Journal of Political Science	77	77	38	80	13	60	24	50	47	27	24	73
Swiss Political Science Review	71	72	45	57	15	78	25	52	50	27	24	74
Political Quarterly	76	78	63	73	13	75	25	53	52	28	24	75
Canadian Journal of Political Science – Revue Canadienne de Science Politique	67	75	72	69	14	76	25	54	51	28	25	76
Politická ekonomie	73	82	27	87	15	77	25	54	53	29	25	77
Scottish Journal of Political Economy	84	67	72	60	14	67	21	47	47	26	24	78
Politikon: South African Journal of Political Studies	61	69	72	68	15	50	25	50	49	27	24	79
Ethics and Global Politics	44	58	72	63	16	80	26	55	52	30	25	80
Problems of Post-Communism	81	81	72	74	16	79	25	56	54	31	26	81
Independent Review	80	83	64	76	15	84	26	57	55	32	27	82
Journal of Women, Politics and Policy	79	80	72	77	17	81	26	58	55	32	27	83
Dissent	66	85	41	75	17	95	28	60	57	35	30	84
Political Science	89	84	31	83	17	83	18	58	56	33	28	85
New Republic	55	87	22	79	18	93	27	59	57	34	29	86
Current History	85	88	69	82	17	85	27	61	58	36	31	87
Nation	78	86	29	85	19	94	28	62	59	37	32	88
Policy Review	87	90	65	84	19	86	27	63	60	37	32	89
Issues and Studies	86	92	72	90	17	82	26	64	60	37	32	90
Revue d'Économie Politique	93	91	64	88	17	89	28	65	61	38	33	91
Internasjonal Politikk	82	89	67	95	17	91	28	66	62	39	33	92
SWS-Rundschau	88	94	60	91	19	87	27	65	62	38	33	93
Política y gobierno	90	93	72	86	18	97	26	66	63	38	33	94
Russian Politics and Law	91	96	68	92	19	90	27	67	64	40	34	95
Commentary	94	95	71	89	18	92	28	68	65	41	35	96
Internationale Politik	95	98	62	93	18	96	28	69	66	42	36	97
Pensée	92	97	72	94	19	88	28	69	66	42	36	97

Таблица В.4 – Процент инверсий от общего числа пар  $d$

	импакт-фактор	5-л. импакт-фактор	и. оперативности	и. влияния	Хирш	SNIP	SJR	Коупланд (2)	Коупланд (3)	$UC$	$MES$	Марков
<b>Экономика</b>												
импакт-фактор	0,00	8,46	24,59	18,13	15,45	15,09	14,23	8,16	8,29	7,50	6,24	9,03
5-л. импакт-фактор	8,46	0,00	24,25	13,72	13,15	13,66	12,20	4,73	4,67	3,95	3,30	5,45
и. оперативности	24,59	24,25	0,00	26,00	25,57	27,01	25,25	22,12	22,05	20,98	18,43	21,78
и. влияния	18,13	13,72	26,00	0,00	17,15	16,31	15,50	11,54	11,42	10,32	8,64	11,51
Хирш	15,45	13,15	25,57	17,15	0,00	18,47	15,05	11,28	11,34	10,73	9,19	11,86
SNIP	15,09	13,66	27,01	16,31	18,47	0,00	17,28	11,91	11,92	10,82	9,10	12,46
SJR	14,23	12,20	25,25	15,50	15,05	17,28	0,00	9,57	9,70	8,58	7,52	10,54
Коупланд (2 версия)	8,16	4,73	22,12	11,54	11,28	11,91	9,57	0,00	0,32	0,80	0,70	2,08
Коупланд (3 версия)	8,29	4,67	22,05	11,42	11,34	11,92	9,70	0,32	0,00	0,85	0,72	1,95
непокрытое множество $UC$	7,50	3,95	20,98	10,32	10,73	10,82	8,58	0,80	0,85	0,00	0,59	1,58
минимальное внешнеустойчивое множество $MES$	6,24	3,30	18,43	8,64	9,19	9,10	7,52	0,70	0,72	0,59	0,00	0,72
марковское ранжирование	9,03	5,45	21,78	11,51	11,86	12,46	10,54	2,08	1,95	1,58	0,72	0,00
<b>Менеджмент</b>												
импакт-фактор	0,00	10,47	23,87	17,93	15,52	16,04	17,84	10,40	10,45	9,79	9,70	11,22
5-л. импакт-фактор	10,47	0,00	26,16	12,83	11,34	10,10	14,10	5,10	5,07	4,23	4,39	6,38
и. оперативности	23,87	26,16	0,00	27,09	27,44	29,97	29,36	24,64	24,68	24,01	23,45	25,06
и. влияния	17,93	12,83	27,09	0,00	15,26	15,24	12,79	9,72	9,72	9,05	8,30	10,57
Хирш	15,52	11,34	27,44	15,26	0,00	10,99	12,53	8,79	8,79	7,97	6,71	8,95
SNIP	16,04	10,10	29,97	15,24	10,99	0,00	13,25	7,50	7,71	6,85	6,12	8,88
SJR	17,84	14,10	29,36	12,79	12,53	13,25	0,00	10,14	10,14	9,54	8,49	10,59
Коупланд (2 версия)	10,40	5,10	24,64	9,72	8,79	7,50	10,14	0,00	0,14	0,63	0,72	1,99
Коупланд (3 версия)	10,45	5,07	24,68	9,72	8,79	7,71	10,14	0,14	0,00	0,72	0,72	1,96
непокрытое множество $UC$	9,79	4,23	24,01	9,05	7,97	6,85	9,54	0,63	0,72	0,00	0,65	1,57
минимальное внешнеустойчивое множество $MES$	9,70	4,39	23,45	8,30	6,71	6,12	8,49	0,72	0,72	0,65	0,00	1,24
марковское ранжирование	11,22	6,38	25,06	10,57	8,95	8,88	10,59	1,99	1,96	1,57	1,24	0,00
<b>Политология</b>												
импакт-фактор	0,00	11,34	27,91	16,39	13,50	17,30	14,62	9,71	9,57	9,24	8,47	9,79
5-л. импакт-фактор	11,34	0,00	30,30	8,23	9,89	14,74	12,47	5,11	4,47	4,12	3,28	5,52
и. оперативности	27,91	30,30	0,00	31,17	25,01	30,36	27,15	26,28	26,65	25,60	24,61	27,75
и. влияния	16,39	8,23	31,17	0,00	13,19	16,41	15,54	9,48	8,93	8,20	7,17	10,29

## Продолжение таблицы В.4

Хирш	13,50	9,89	25,01	13,19	0,00	16,35	11,48	7,69	7,71	6,91	6,25	7,79
SNIP	17,30	14,74	30,36	16,41	16,35	0,00	15,13	12,43	12,24	11,56	10,86	12,90
SJR	14,62	12,47	27,15	15,54	11,48	15,13	0,00	8,64	9,05	8,02	7,83	10,00
Коупланд (2 версия)	9,71	5,11	26,28	9,48	7,69	12,43	8,64	0,00	0,82	0,60	0,47	2,27
Коупланд (3 версия)	9,57	4,47	26,65	8,93	7,71	12,24	9,05	0,82	0,00	0,82	0,52	1,77
непокрытое множество <i>UC</i>	9,24	4,12	25,60	8,20	6,91	11,56	8,02	0,60	0,82	0,00	0,10	1,96
минимальное внешнеустойчивое множество <i>MES</i>	8,47	3,28	24,61	7,17	6,25	10,86	7,83	0,47	0,52	0,10	0,00	1,24
марковское ранжирование	9,79	5,52	27,75	10,29	7,79	12,90	10,00	2,27	1,77	1,96	1,24	0,00

Таблица В.5 – Коэффициент Кендалла  $\tau_b$

	импакт-фактор	5-л. импакт-фактор	и. оперативности	и. влияния	Хирш	SNIP	SJR	Коупланд (2)	Коупланд (3)	<i>UC</i>	<i>MES</i>	Марков
<b>Экономика</b>												
импакт-фактор	1,000	0,830	0,503	0,637	0,654	0,698	0,700	0,834	0,831	0,834	0,835	0,819
5-л. импакт-фактор	0,830	1,000	0,510	0,725	0,702	0,726	0,741	0,903	0,904	0,906	0,896	0,891
и. оперативности	0,503	0,510	1,000	0,475	0,442	0,454	0,472	0,550	0,551	0,556	0,578	0,560
и. влияния	0,637	0,725	0,475	1,000	0,620	0,673	0,674	0,766	0,769	0,777	0,785	0,769
Хирш	0,654	0,702	0,442	0,620	1,000	0,592	0,650	0,738	0,737	0,737	0,747	0,729
SNIP	0,698	0,726	0,454	0,673	0,592	1,000	0,638	0,759	0,759	0,767	0,775	0,750
SJR	0,700	0,741	0,472	0,674	0,650	0,638	1,000	0,792	0,790	0,800	0,797	0,775
Коупланд (2 версия)	0,834	0,903	0,550	0,766	0,738	0,759	0,792	1,000	0,990	0,970	0,950	0,956
Коупланд (3 версия)	0,831	0,904	0,551	0,769	0,737	0,759	0,790	0,990	1,000	0,969	0,950	0,959
непокрытое множество <i>UC</i>	0,834	0,906	0,556	0,777	0,737	0,767	0,800	0,970	0,969	1,000	0,955	0,954
минимальное внешнеустойчивое множество <i>MES</i>	0,835	0,896	0,578	0,785	0,747	0,775	0,797	0,950	0,950	0,955	1,000	0,949
марковское ранжирование	0,819	0,891	0,560	0,769	0,729	0,750	0,775	0,956	0,959	0,954	0,949	1,000
<b>Менеджмент</b>												
импакт-фактор	1,000	0,790	0,520	0,641	0,663	0,679	0,626	0,787	0,787	0,789	0,780	0,775
5-л. импакт-фактор	0,790	1,000	0,475	0,743	0,749	0,798	0,702	0,894	0,895	0,901	0,888	0,872
и. оперативности	0,520	0,475	1,000	0,456	0,418	0,399	0,391	0,500	0,500	0,499	0,497	0,497
и. влияния	0,641	0,743	0,456	1,000	0,668	0,695	0,728	0,801	0,801	0,804	0,808	0,788
Хирш	0,663	0,749	0,418	0,668	1,000	0,756	0,710	0,797	0,797	0,804	0,822	0,797

## Продолжение таблицы В.5

SNIP	0,679	0,798	0,399	0,695	0,756	1,000	0,719	0,846	0,842	0,848	0,853	0,822
SJR	0,626	0,702	0,391	0,728	0,710	0,719	1,000	0,778	0,779	0,780	0,792	0,773
Коупланд (2 версия)	0,787	0,894	0,500	0,801	0,797	0,846	0,778	1,000	0,993	0,974	0,964	0,956
Коупланд (3 версия)	0,787	0,895	0,500	0,801	0,797	0,842	0,779	0,993	1,000	0,973	0,964	0,957
непокрытое множество <i>UC</i>	0,789	0,901	0,499	0,804	0,804	0,848	0,780	0,974	0,973	1,000	0,965	0,956
минимальное внешнеустойчивое множество <i>MES</i>	0,780	0,888	0,497	0,808	0,822	0,853	0,792	0,964	0,964	0,965	1,000	0,953
марковское ранжирование	0,775	0,872	0,497	0,788	0,797	0,822	0,773	0,956	0,957	0,956	0,953	1,000
<b>Политология</b>												
импакт-фактор	1,000	0,773	0,422	0,671	0,682	0,653	0,673	0,801	0,803	0,798	0,802	0,803
5-л. импакт-фактор	0,773	1,000	0,374	0,835	0,757	0,705	0,717	0,894	0,905	0,902	0,909	0,889
и. оперативности	0,422	0,374	1,000	0,356	0,425	0,372	0,398	0,450	0,441	0,448	0,453	0,425
и. влияния	0,671	0,835	0,356	1,000	0,688	0,671	0,653	0,806	0,816	0,819	0,829	0,794
Хирш	0,682	0,757	0,425	0,688	1,000	0,623	0,696	0,800	0,798	0,807	0,814	0,801
SNIP	0,653	0,705	0,372	0,671	0,623	1,000	0,662	0,747	0,749	0,751	0,753	0,741
SJR	0,673	0,717	0,398	0,653	0,696	0,662	1,000	0,793	0,783	0,794	0,789	0,768
Коупланд (2 версия)	0,801	0,894	0,450	0,806	0,800	0,747	0,793	1,000	0,977	0,974	0,968	0,951
Коупланд (3 версия)	0,803	0,905	0,441	0,816	0,798	0,749	0,783	0,977	1,000	0,969	0,968	0,960
непокрытое множество <i>UC</i>	0,798	0,902	0,448	0,819	0,807	0,751	0,794	0,974	0,969	1,000	0,982	0,946
минимальное внешнеустойчивое множество <i>MES</i>	0,802	0,909	0,453	0,829	0,814	0,753	0,789	0,968	0,968	0,982	1,000	0,951
марковское ранжирование	0,803	0,889	0,425	0,794	0,801	0,741	0,768	0,951	0,960	0,946	0,951	1,000

Таблица В.6 – Доля совпадающих парных сравнений *r* (в %)

	импакт-фактор	5-л. импакт-фактор	и. оперативности	и. влияния	Хирш	SNIP	SJR	Коупланд (2)	Коупланд (3)	<i>UC</i>	<i>MES</i>	Марков
<b>Экономика</b>												
импакт-фактор	100,00	91,46	74,70	81,77	79,07	84,80	83,38	91,34	91,25	89,73	86,72	90,91
5-л. импакт-фактор	91,46	100,00	75,08	86,22	81,40	86,26	85,45	94,81	94,91	93,32	89,67	94,52
и. оперативности	74,70	75,08	100,00	73,31	68,48	72,28	71,79	76,81	76,92	75,68	74,01	77,56
и. влияния	81,77	86,22	73,31	100,00	77,39	83,60	82,12	87,99	88,15	86,92	84,32	88,44
Хирш	79,07	81,40	68,48	77,39	100,00	76,06	77,94	83,02	82,91	81,76	80,06	82,71
SNIP	84,80	86,26	72,28	83,60	76,06	100,00	80,32	87,60	87,63	86,41	83,85	87,48
SJR	83,38	85,45	71,79	82,12	77,94	80,32	100,00	87,74	87,62	86,69	83,89	87,11
Коупланд (2 версия)	91,34	94,81	76,81	87,99	83,02	87,60	87,74	100,00	98,98	96,48	92,37	97,49
Коупланд (3 версия)	91,25	94,91	76,92	88,15	82,91	87,63	87,62	98,98	100,00	96,40	92,39	97,66
непокрытое множество <i>UC</i>	89,73	93,32	75,68	86,92	81,76	86,41	86,69	96,48	96,40	100,00	93,14	95,70
минимальное внешнеустойчивое множество <i>MES</i>	86,72	89,67	74,01	84,32	80,06	83,85	83,89	92,37	92,39	93,14	100,00	92,27

## Продолжение таблицы В.6

марковское ранжирование	90,91	94,52	77,56	88,44	82,71	87,48	87,11	97,49	97,66	95,70	92,27	100,00
<b>Менеджмент</b>												
импакт-фактор	100,00	89,43	75,83	81,95	80,50	83,87	79,64	88,80	88,83	87,70	86,00	88,71
5-л. импакт-фактор	89,43	100,00	73,59	87,10	84,69	89,86	83,43	94,16	94,25	93,22	91,30	93,60
и. оперативности	75,83	73,59	100,00	72,63	68,42	69,78	68,00	74,40	74,43	73,28	72,04	74,71
и. влияния	81,95	87,10	72,63	100,00	80,74	84,69	84,71	89,50	89,57	88,38	87,38	89,39
Хирш	80,50	84,69	68,42	80,74	100,00	85,04	81,39	86,72	86,70	86,07	85,90	87,10
SNIP	83,87	89,86	69,78	84,69	85,04	100,00	84,27	91,75	91,61	90,60	89,57	91,09
SJR	79,64	83,43	68,00	84,71	81,39	84,27	100,00	86,77	86,93	85,76	85,25	86,96
Коупланд (2 версия)	88,80	94,16	74,40	89,50	86,72	91,75	86,77	100,00	99,04	96,82	95,21	97,29
Коупланд (3 версия)	88,83	94,25	74,43	89,57	86,70	91,61	86,93	99,04	100,00	96,80	95,09	97,38
непокрытое множество <i>UC</i>	87,70	93,22	73,28	88,38	86,07	90,60	85,76	96,82	96,80	100,00	95,11	95,91
минимальное внешнеустойчивое множество <i>MES</i>	86,00	91,30	72,04	87,38	85,90	89,57	85,25	95,21	95,09	95,11	100,00	94,48
марковское ранжирование	88,71	93,60	74,71	89,39	87,10	91,09	86,96	97,29	97,38	95,91	94,48	100,00
<b>Политология</b>												
импакт-фактор	100,00	88,56	69,53	83,45	79,14	82,58	80,09	89,49	89,42	87,90	86,68	90,08
5-л. импакт-фактор	88,56	100,00	67,20	91,67	82,81	85,20	82,25	94,15	94,58	93,07	91,94	94,41
и. оперативности	69,53	67,20	100,00	66,27	65,62	67,12	65,70	70,52	69,99	69,22	68,44	69,74
и. влияния	83,45	91,67	66,27	100,00	79,41	83,47	79,12	89,75	90,06	88,93	88,02	89,59
Хирш	79,14	82,81	65,62	79,41	100,00	76,33	77,51	84,52	84,29	84,02	83,69	84,89
SNIP	82,58	85,20	67,12	83,47	76,33	100,00	79,57	86,81	86,79	85,61	84,33	87,01
SJR	80,09	82,25	65,70	79,12	77,51	79,57	100,00	85,63	84,97	84,56	83,34	84,75
Коупланд (2 версия)	89,49	94,15	70,52	89,75	84,52	86,81	85,63	100,00	97,94	96,68	95,07	97,05
Коупланд (3 версия)	89,42	94,58	69,99	90,06	84,29	86,79	84,97	97,94	100,00	96,33	95,24	97,34
непокрытое множество <i>UC</i>	87,90	93,07	69,22	88,93	84,02	85,61	84,56	96,68	96,33	100,00	96,76	95,30
минимальное внешнеустойчивое множество <i>MES</i>	86,68	91,94	68,44	88,02	83,69	84,33	83,34	95,07	95,24	96,76	100,00	94,04
марковское ранжирование	90,08	94,41	69,74	89,59	84,89	87,01	84,75	97,05	97,34	95,30	94,04	100,00

ПРИЛОЖЕНИЕ Г  
Сокращения и таблицы к подразделу 3.3

Список использованных сокращений к подразделу 3.3:

БЮТ – Блок Юлии Тимошенко;

ВРУ – Верховная Рада Украины;

КПУ – Коммунистическая партия Украины;

МДГ – Межрегиональная депутатская группа;

НДП – Народно-демократическая партия;

НРУ – Народный Рух Украины (Народное Движение Украины);

НУ – Наша Украина;

НУНС – «Наша Украина – Народная Самооборона»;

ПДВУ – Партия демократического возрождения Украины;

ПЗУ – Партия зеленых Украины;

ППУ – Прогрессивная партия Украины;

ПППУ – Партия промышленников и предпринимателей Украины;

СДПУ(о) – Социал-демократическая партия (объединенная);

Сел. ПУ – Селянская партия Украины (Крестьянская партия Украины);

СПУ – Социалистическая партия Украины;

ПНЭРУ – Партия национально-экономического развития;

ПСПУ – Прогрессивная социалистическая партия Украины;

УНР – Украинская Народная Рада;

УНР – Украинский народный рух (Украинское народное движение).

Таблица Г.1 – Численный состав, доля мест и индекс Банцафа групп и фракций ВРУ 2-го созыва

Период работы	Сокращенное название и численность депутатских групп (фракций)														Всего
	Коммунисты	Социалисты	Народный Рух	МДГ (Регионы)	«Государственный союз»	«Центр»	Аграрии	Реформы	«Единство»	Независимые	Крестьяне	«Рыночный выбор»	Аграрная партия	Внефракционные	
Начало созыва	83	25	27	26	25	38	36	27	25	–	–	–	–	26	338
Доля	0,246	0,074	0,080	0,077	0,074	0,112	0,107	0,080	0,074	–	–	–	–	0,077	–
Индекс Банцафа	0,324	0,061	0,064	0,064	0,061	0,121	0,115	0,064	0,061	–	–	–	–	0,064	–
Через 1 год работы	90	28	27	32	29	37	51	36	34	–	–	–	–	37	401
Доля	0,224	0,070	0,067	0,080	0,072	0,092	0,127	0,090	0,085	–	–	–	–	0,092	–
Индекс Банцафа	0,258	0,072	0,069	0,076	0,072	0,079	0,137	0,079	0,079	–	–	–	–	0,079	–
Через 2 года работы (до 28.06.1996)	87	28	29	26	29	28	25	31	28	26	25	26	–	27	415
Доля	0,210	0,067	0,070	0,063	0,070	0,067	0,060	0,075	0,067	0,063	0,060	0,063	–	0,065	–
Индекс Банцафа	0,241	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	–	0,063	–
После принятия Конституции	87	26	31	25	–	47	24	29	37	26	23	23	–	39	417
Доля	0,209	0,062	0,074	0,060	–	0,113	0,058	0,070	0,089	0,062	0,055	0,055	–	0,094	–
Индекс Банцафа	0,244	0,059	0,070	0,056	–	0,113	0,055	0,069	0,082	0,059	0,054	0,054	–	0,085	–
Через 3 года работы	78	34	26	25	–	56	25	30	31	25	–	24	25	35	414
Доля	0,188	0,082	0,063	0,060	–	0,135	0,060	0,072	0,075	0,060	–	0,058	0,060	0,085	–
Индекс Банцафа	0,227	0,068	0,063	0,062	–	0,133	0,062	0,066	0,068	0,062	–	0,061	0,062	0,068	–
На конец созыва	80	40	25	32	–	50	–	30	32	25	–	25	27	45	411
Доля	0,195	0,097	0,061	0,078	–	0,122	–	0,073	0,078	0,061	–	0,061	0,066	0,109	–
Индекс Банцафа	0,222	0,084	0,057	0,078	–	0,122	–	0,071	0,078	0,057	–	0,057	0,062	0,112	–

Таблица Г.2 – Доля мест и индекс Банцафа групп и фракций ВРУ 3-го созыва

9-я сессия	$\beta$	0,355	0,028	0,028	—	0,033	0,061	0,031	—	—	—	0,029	0,029	0,045	0,047	0,073	0,040	0,026	0,045	0,042	0,086
	Доля	0,255	0,032	0,032	—	0,038	0,072	0,036	—	—	—	0,034	0,034	0,052	0,054	0,086	0,045	0,029	0,052	0,047	0,104
8-я сессия	$\beta$	0,360	0,027	0,027	—	0,033	0,061	0,029	—	—	—	0,029	0,029	0,044	0,049	0,073	0,042	0,027	0,045	0,040	0,083
	Доля	0,256	0,032	0,032	—	0,038	0,072	0,034	—	—	—	0,034	0,034	0,050	0,057	0,086	0,048	0,032	0,052	0,045	0,100
7-я сессия	$\beta$	0,338	0,032	0,027	—	0,034	0,071	0,034	—	—	—	0,030	0,036	0,044	0,052	0,090	0,042	0,032	0,047	—	0,093
	Доля	0,252	0,036	0,031	—	0,038	0,080	0,038	—	—	—	0,033	0,040	0,049	0,058	0,102	0,047	0,036	0,053	—	0,107
6-я сессия	$\beta$	0,324	0,041	0,034	—	0,033	0,067	0,034	—	—	—	0,030	0,070	0,045	0,065	0,096	0,045	0,028	—	—	0,089
	Доля	0,247	0,045	0,038	—	0,036	0,073	0,038	—	—	—	0,033	0,078	0,051	0,071	0,107	0,051	0,031	—	—	0,100
5-я сессия	$\beta$	0,330	0,045	0,039	—	0,034	0,065	0,034	—	—	—	0,030	0,074	0,042	0,068	0,087	0,056	—	—	—	0,096
	Доля	0,253	0,051	0,042	—	0,038	0,073	0,038	—	—	—	0,033	0,082	0,047	0,076	0,096	0,060	—	—	—	0,111
4-я сессия	$\beta$	0,373	0,051	0,032	0,027	0,042	0,064	0,034	0,021	0,027	0,029	0,025	0,067	0,049	0,066	0,044	—	—	—	—	0,048
	Доля	0,258	0,061	0,038	0,031	0,049	0,076	0,040	0,025	0,031	0,034	0,029	0,081	0,058	0,079	0,052	—	—	—	—	0,056
3-я сессия	$\beta$	0,428	0,052	0,029	0,030	0,042	0,046	0,040	0,025	0,034	0,027	0,037	0,049	0,052	0,049	0,032	—	—	—	—	0,029
	Доля	0,273	0,067	0,036	0,038	0,054	0,058	0,051	0,031	0,043	0,034	0,047	0,063	0,067	0,063	0,040	—	—	—	—	0,036
2-я сессия	$\beta$	0,333	0,139	0,097	0,094	0,051	0,051	0,055	0,026	0,041	0,029	0,026	—	—	—	—	—	—	—	—	0,055
	Доля	0,271	0,162	0,102	0,100	0,053	0,053	0,060	0,031	0,042	0,033	0,031	—	—	—	—	—	—	—	—	0,060
1-я сессия	$\beta$	0,314	0,173	0,104	0,102	0,073	0,052	0,052	0,031	0,052	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,046
	Доля	0,273	0,195	0,107	0,102	0,075	0,057	0,055	0,032	0,059	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,045
Начало созыва	$\beta$	0,306	0,185	0,107	0,084	0,072	0,057	0,057	0,033	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,099
	Доля	0,270	0,207	0,107	0,089	0,080	0,057	0,055	0,039	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,098
Фракция (группа)	КПУ	НДП	НРУ	Громада	СПУ	СДПУ(о)	Партия Зеленых	ПСПУ	Независимые	Сел. ПУ	Реформы	Демократический Союз	УНР	«Батькивщина»	Трудовая Украина	Солидарность	«Яблоко»	Регионы Украины	«Единство»	Внефракционные	
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Таблицы к подразделу 4.2

**Таблица Д.1 – Кластеры на фондовом рынке США**

No	Abbrevia -tion	Name	Field
Кластер 1 Волатильность 0.000			
25	ABX	Barrick Gold Corporation	Gold minimg
69	AEM	Agnico-Eagle Mines Ltd.	Gold minimg
242	AU	AngloGold Ashanti Ltd.	Gold minimg
247	AUY	Yamana Gold, Inc.	Gold minimg
270	AZK	Aurizon Mines Ltd.	Gold minimg
409	BVN	Compania de Minas Buenaventura SA	Color Metallurgy
483	CDE	Coeur d'Alene Mines Corporation	Color Metallurgy
Кластер 2 Волатильность 0.125			
29	ACC	American Campus Communities Inc.	Hotels
64	AEC	Associated Estates Realty Corp.	Building
89	AGNC	American Capital Agency Corp.	Investment
109	AIV	Apartment Investment & Management Co.	Investment
113	AKR	Acadia Realty Trust	Finances
170	ANH	Anworth Mortgage Asset Corporation	Investment
195	ARE	Alexandria Real Estate Equities Inc.	Investment
250	AVB	Avalonbay Communities Inc.	Real Estate
311	BDN	Brandywine Realty Trust	Real Estate
367	BMR	BioMed Realty Trust Inc.	Real Estate
392	BRE	BRE Properties Inc.	Finances
419	BXP	Boston Properties Inc.	Real Estate
458	CBL	CBL & Associates Properties Inc.	Real Estate
Кластер 3 Волатильность 0.167			
31	ACE	ACE Limited	Insurance
33	ACGL	Arch Capital Group Ltd.	Insurance
97	AHL	Aspen Insurance Holdings Ltd.	Insurance
258	AWH	Allied World Assurance Company Holdings	Insurance
266	AXS	Axis Capital Holdings Ltd.	Insurance
447	CB	The Chubb Corporation	Insurance
Кластер 4 Волатильность 0.167			
84	AGA	PowerShares DB Agriculture Dble Shrt ETN	Index
86	AGG	iShares Barclays Aggregate Bond	Index
94	AGZ	iShares Barclays Agency Bond	Index
329	BGZ	Direxion Daily Large Cap Bear 3X Shares	Investment
343	BIV	BIV Vanguard Intermediate-Term Bond ETF	Investment
361	BLV	Vanguard Long-Term Bond Index ETF	Investment
373	BND	Vanguard Total Bond Market ETF	Investment
378	BOM	PowerShares DB Base Metals Dble Shrt ETN	Investment
402	BSV	Vanguard Short-Term Bond ETF	Investment

Продолжение таблицы Д.1

Кластер 5 Волатильность 0.286			
186	APL	Atlas Pipeline Partners LP	Oil and Gas
202	ARLP	Alliance Resource Partners LP	Coal Mining
289	BBEP	Breitburn Energy Partners L.P.	Oil and Gas
384	BPL	Buckeye Partners LP	Wholesale Trading
413	BWP	Boardwalk Pipeline Partners, LP	Oil and Gas
Кластер 6 Волатильность 0.356			
15	ABCB	Ameris Bancorp	Bank
76	AF	Astoria Financial Corporation	Finances
160	AMWD	American Woodmark Corp.	Production
169	ANGO	AngioDynamics Inc.	Medical Equipment
205	AROW	Arrow Financial Corporation	Bank
219	ASI	American Safety Insurance Holdings Ltd.	Insurance
225	ASYS	Amtech Systems Inc.	Semiconductors
227	BAC	Bank of America Corporation	Bank
282	BANF	BancFirst Corporation	Investment
294	BBSI	Barrett Business Services Inc.	Services
295	BBT	BB&T Corporation	Investment
332	BHLB	Berkshire Hills Bancorp Inc.	Finances
376	BOH	Bank of Hawaii Corporation	Bank
377	BOKF	BOK Financial Corp.	Finances
382	BPFH	Boston Private Financial Holdings Inc.	Finances
393	BRKL	Brookline Bancorp, Inc.	Bank
401	BSRR	Sierra Bancorp	Bank
408	BUSE	First Busey Corporation	Bank
443	CASS	Cass Information Systems Inc.	Information Technologies
459	CBM	Cambrex Corporation.	Pharmaceutics
464	CBSH	Commerce Bancshares, Inc.	Finances
467	CBU	Community Bank System Inc.	Bank
469	CCBG	Capital City Bank Group Inc.	Bank
Кластер 7 Волатильность 0.559			
10	AAXJ	iShares MSCI All Country Asia ex Jpn Idx	Index
34	ACH	Aluminum Corporation Of China Limited	Aluminum
51	ADLR	Adolor Corporation	Pharmaceutics
56	ADRE	BLDRS Emerging Markets 50 ADR Index	Index
92	AGU	Agrium Inc.	Fertilizations
100	AIA	iShares S&P Asia 50 Index	Index
161	AMX	America Movil S.A.B. de C.V.	Telecommunications
224	ASX	Advanced Semiconductor Engineering Inc.	Semiconductors
288	BBD	Banco Bradesco S.A.	Insurance
334	BIDU	Baidu, Inc.	Information Technologies
338	BIK	SPDR S&P BRIC 40	Investment
348	BKF	iShares MSCI BRIC Index	Investment
452	CBD	Companhia Brasileira de Distribuicao	Retail Trading
472	CCH	Coca-Cola Hellenic Bottling Company S.A.	Food and Beverage Sale
489	CEA	China Eastern Airlines Corp. Ltd.	Transport
499	CEO	CNOOC Ltd.	Oil and Gas

Продолжение таблицы Д.1

Кластер 8 Волатильность 0.583			
No	Abbrevia-tion	Name	Field
35	ACI	Arch Coal Inc.	Coal Mining
123	ALJ	Alon USA Energy, Inc.	Oil and Gas
196	AREX	Approach Resources, Inc.	Oil and Gas
400	BRY	Berry Petroleum Co.	Oil and Gas
407	BTU	Peabody Energy Corp.	Coal Mining

Таблица Д.2 – Кластеры на российском фондовом рынке

No	Abbrevia-tion	Name	Field
Кластер 1 Волатильность 0.185			
23	EONR	EON Russia	Electric power production
24	ETGK	Enyseyskaya TGK-13	Electric power production
35	IRGZ	Irkutskenergo	Electric power production
44	KRSG	Krasnoyarskaya GES	Electric power production
47	KZBE	Kuzbasenergo	Electric power production
83	OGKA	OGK-1	Electric power production
84	OGKB	OGK-2	Electric power production
85	OGKC	OGK-3 OAO	Electric power production
86	OGKE	Enel OGK-5	Electric power production
120	TGKA	TGK-1	Electric power production
121	TGKBP	TGK-2p	Electric power production
122	TGKB	TGK-2	Electric power production
124	TGKD	Kwadra	Electric power production
125	TGKE	TGK-5	Electric power production
126	TGKF	TGK-6	Electric power production
127	TGKI	TGK-9	Electric power production
130	TGKN	TGK-14	Electric power production
146	VTGK	Volgskaya TGK	Electric power production
Кластер 2 Волатильность 0.200			
45	KTSBP	Kostromskaya cbyt company	Electric power production
49	LSNGP	Lenenergo	Electric power production
51	LSRG	LSR Group	Buiding
56	MGTSP	MGTS	Telecommunications
115	SYNG	Synergiya	Electric power production