**Правительство Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования   
"Национальный исследовательский университет   
"Высшая школа экономики"**

Факультет Математики

**Программа дисциплины** Продвинутая алгебра

для направления 010100.68 «Математика» подготовки магистра

магистерская программа «Математика» (англоязычная)

Автор программы:

К.ф.м.н. Сергей Локтев, S.Loktev@gmail.com

Рекомендована секцией УМС по математике «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г

Председатель С.М. Хорошкин

Утверждена УС факультета математики «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2013 г.

Ученый секретарь Ю.М. Бурман\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Москва, 2013

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

# Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, направления 010100.68 «Математика» подготовки магистра.

Программа разработана в соответствии с:

* ГОС ВПО;
* Образовательными программами: 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра и 010100.68 «Математика» подготовки магистра.
* Рабочими учебными планами университета: по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра и по направлению 010100.68 «Математика» подготовки магистра, специализации Математика, утвержденными в 2012 г.

# The goals of mastering the subject

The goal of mastering the subject «Advanced Algebra» is to develop further algebraic skills and methods widely used in mathematics and related areas (mathematical physics, computer science, bio-informatics)

# Competencies of a student which are formed by mastering the subject

As a result of mastering the subject the student should learn the basic notions and techniques of Galois Theory, Representation Theory, Algebraic Number Theory.

# Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических дисциплин и блоку дисциплин по выбору.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

*Basic Algebra, Advanced Linear Algebra.*

# Thematic plan of the subject

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название раздела | Всего часов | Аудиторные часы | | | Самостоятельная работа |
| Лекции | Семинары |  |
| 1  2  3 | Fields and Galois theory  Application to Algebraic Number Theory  Application to Representation Theory | 80  50  50 | 20  10  10 | 20  10  10 |  | 40  30  30 |
|  | Итого: | 180 | 40 | 40 |  | 100 |

# Формы контроля знаний студентов

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | 1 год | | | | Параметры \*\* |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Текущий  (неделя) | Контрольная работа |  |  | 8 | 8 | Письменная работа 60 минут |
| Домашнее задание |  |  | 8 |  |  |
| Промежуточный | Зачет |  |  | V |  | письменная работа, 90 мин. |
| Итоговый | Зачет |  |  |  | V | письменная работа, 240 мин |

## Критерии оценки знаний, навыков

На зачете студент должен продемонстрировать владение основными понятиями курса и знание основных результатов, а также умение их применять к конкретным задачам из теории представлений и теортт Галуа.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

## Порядок формирования оценок по дисциплине (подробные методические рекомендации по формированию оценок по дисциплине приведены в приложении)

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов. Оценки за самостоятельную работу студента преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за самостоятельную работу определяется перед промежуточным или итоговым контролем – *Осам. работа*.

Накопленная оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

О*накопленная*= 0.8\* *Отекущий* + 0.2\* Осам.работа,

где*Отекущий* рассчитывается как взвешенная сумма всех форм текущего контроля, предусмотренных в РУП

*Отекущий* = *0.3·Ок/р + 0.7·Одз* ;

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

*Опромежуточная i* = 0.7*·Отекущая i этапа + 0.3·Опромежуточный зачет/экзамен*

Где *Отекущая i этапа* рассчитывается по приведеннойвыше формуле

О*накопленная Итоговая=* (О*промежуточная 1+* О*накопленная 3)/2*

Где О*промежуточная 1+* О*промежуточная 2 –* промежуточная оценка,   
а О*накопленная 3 –* накопленная оценка последнего этапа перед итоговым зачетом/экзаменом

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме экзамена: арифметический.

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

На зачете студент может получить дополнительный вопрос, ответ на который оценивается в 1 балл.

В диплом выставляет результирующая оценка по учебной дисциплине, которая формируется по следующей формуле:

*Орезульт = 0.6·Онакопл* + *0.4*·*Оитоговый*

Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине: в пользу студента

оценка за итоговый контроль не блокирующая

# Content of the subject

Section 1. Fields and Galois Theory

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **Topic** | **Total hours** | **Lectures** | Seminars | Self-guided study |
| 1 | Introduction. Fields, examples, characteristic. | **8** | **2** | 2 | 4 |
| 2 | Extensions of fields; their specific classes (algebraic, finite). Algebraic closure. | **12** | **3** | 3 | 6 |
| 3 | Finite fields. Their automorphism. | **12** | **3** | 3 | 6 |
| 4 | Separable, normal, Galois extensions and relations between them. Classification of algebraically closed field extensions. Existence and uniqueness of an algebraic closure of a field; its normality. | **12** | **3** | 3 | 6 |
| 5 | Profinite (or compact totally disconnected) groups; compact groups of fields automorphisms. Galois group and Galois correspondence between compact subgroups and Galois subextensions. | **12** | **3** | 3 | 6 |
| 6 | Primitive element and normal basis theorems. | **12** | **3** | 3 | 6 |
| 7 | Kummer--Artin--Schreier theory; corollaries for (i) construction of regular polygons with ruler and compas, (ii) solvability in radicals of polynomial equations. Finite groups of automorphisms of algebraically closed fields. | **12** | **3** | 3 | 6 |
|  | **Total:** | **80** | **20** | 20 | 40 |

Section 2**.** Application to Algebraic Number Theory

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **Topic** | **Total hours** | Аудиторные часы | | | Self-guided study |
| **Lectures** | Seminars |  |
| 1 | Quadratic forms. Witt group | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
| 2 | Associative algebras. Division rings. Radical | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
| 3 | Semi-simple algebras. Wedderburn’s theorem | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
| 4 | Tensor product of vector spaces and algebras | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
| 5 | Brauer group | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
|  | Итого: | 50 | 10 | 10 |  | 30 |

Section 3**.** Application to Representation Theory

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | **Topic** | **Total hours** | Аудиторные часы | | | Self-guided study |
| **Lectures** | Seminars |  |
| 1 | Modules over ring and group representaions. Group ring and algebra. | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
| 2 | Maschke’s theorem. Semisimplicity and decomposition of group algebra. | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
| 3 | Schur Lemma, formulas for number of irreducible representations | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
| 4 | Tensor product of representations. Representations of products of groups. | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
| 5 | Representations in Galois Theory | 10 | 2 | 2 |  | 6 |
|  | Итого: | 50 | 10 | 10 |  | 30 |

# Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

## Тематика заданий текущего контроля

Примерные вопросы для контрольной работы

1. Find a degree of a given field extension.
2. Find a number of indecomposable polynomials of a given degree over a finite field.

## Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

* + 1. Find the Witt group of the given field
    2. Find the Brauer group of the given field
    3. Classify the algebraically closed fields and algebraically closed field extensions of a given field.
    4. Does there exist functorial algebraic closures of a field?
    5. Describe the finite groups of automorphisms of an algebraically closed field.
    6. Is it possible to cut a cube and a regular tetrahedron to the same finite collection of polyhedra?
    7. Describe the abelian extensions of a field containing all roots of unity.
    8. What is relation between solvability of an equation in radicals and solvability of its Galois group?

# Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

## Базовые учебники

S.Lang, Algebra, Springer + corrections, commentary, and divers supplementary material: <http://math.berkeley.edu/~gbergman/.C.to.L/>

D.Dummit, R.Foote, Abstract Algebra, 3rd edition, 2003

## Основная литература

C. Weibel, Introduction to Homological Algebra, CUP, 1994.

E. Artin, Galois Theory Notre Dame Mathematical Lectures, Number 2, 1971. 2nd edition, <http://projecteuclid.org/euclid.ndml/1175197041>

C. W. Curtis and I. Reiner, Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, American Math. Soc., 1962.

J.S. Milne, Group Theory, <http://www.jmilne.org/math/>

P. M. Cohn, Algebra, Vol. 1, Wiley

## Дополнительная литература

S. Gelfand, Y. Manin. Methods of homological algebra, Springer, 2000.