ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.С. Шведов

О ВЫПУКЛОСТИ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Препринт WP2/2014/01

Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва
2014

УДК 519.856
ББК 22.172
Ш34

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

Ш34 **Шведов, А. С.** О выпуклости допустимого множества в задаче стохастического линейного программирования [Электронный ресурс] : препринт WP2/2014/01 / А. С. Шведов ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – Электрон. текст. дан. (300 КБ). – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2014. – 25 с. – (Серия WP2 «Количественный анализ в экономике»).

Основной математический результат работы – это простое доказательство известной теоремы, что любая из гиперплоскостей, определяющих плавающее множество распределения вероятностей, является опорной для этого множества. Данная теорема играет центральную роль при доказательстве выпуклости допустимого множества в задаче стохастического линейного программирования с вероятностными ограничениями.

УДК 519.856
ББК 22.172

Классификация JEL: C61

Ключевые слова: стохастическое линейное программирование, плавающее множество

Shvedov, A. S. On convexity of feasible sets in stochastic linear programs [Electronic resource] : Working paper WP2/2014/01 / A. S. Shvedov ; National Research University Higher School of Economics. – Electronic text data (300 KB). – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2014. – 25 p. – (Series WP2 "Quantitative Analysis of Russian Economy"). (In Russian.)

Simple proof of the known theorem is given in the paper. The theorem states that any hyperplane defining the floating body of probability distribution is supporting. The theorem is useful in the proof of convexity of feasible sets in chance constrained stochastic linear programs.

JEL Classification: C61

Key phrases: stochastic linear programming, floating body

Препринты Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

1. Введение

Классическая задача линейного программирования состоит в минимизации

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{1}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – действительные числа. Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, для которых выполняется условие (1), называется допустимым множеством. В классической задаче линейного программирования допустимое множество является, очевидно, выпуклым множеством.

Но во многих прикладных исследованиях a_{ij}, b_i, c_j не известны точно. Для включения в математическую модель этой неопределенности может быть использован аппарат теории вероятностей. Различные типы задач стохастического линейного программирования рассматриваются, например, в книге [5].

В той задаче стохастического линейного программирования с вероятностными ограничениями, которая рассматривается в настоящей работе, условия, задающие допустимое множество в пространстве $\mathbb{R}^m$, принимают вид ограничений на вероятности некоторых событий:

$$P\left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + \eta_{ij}) x_j \geq b_i + \zeta_i\right) \geq 1 - \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{2}$$

Здесь η_{ij}, ζ_i – случайные величины, ε_i – фиксированные действительные числа, лежащие между 0 и 1.

Является ли множество точек $x \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих условиям (2), выпуклым множеством? Отрицательный ответ на этот вопрос может поставить под сомнение саму пригодность такой математической модели. Поэтому на изучение этого вопроса были затрачены значительные усилия математиков (ссылки на работы см. в [5], [6]). Оказывается, что ответ зависит от вида распределения случайных величин, входящих в (2).

Поставленный вопрос можно несколько упростить и ограничиться рассмотрением допустимых множеств в $\mathbb{R}^m$, задаваемых условиями

$$P\left(\sum_{j=1}^{m}(a_j+\eta_j)x_j \geq b\right) \geq 1-\varepsilon, \tag{3}$$

где a_j, b – действительные числа, η_j – случайные величины, ε – действительное число, лежащее между 0 и 1.

Если выпуклость допустимого множества будет установлена при $l = 1$, то тем самым будет дан положительный ответ и при произвольном l, поскольку пересечение выпуклых множеств – это выпуклое множество. Нетрудно увидеть также, что исследование выпуклости допустимого множества для ограничений вида (2), где случайность присутствует и в левой, и в правой частях неравенств, сводится к исследованию выпуклости допустимого множества при ограничениях, где случайность присутствует только в левой части (подробнее см. в конце параграфа 2).

В настоящей работе делается предположение, что случайный вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ имеет непрерывное симметричное распределение. Тогда для функции плотности φ этого случайного вектора выполняется условие

$$\varphi(\eta) = \varphi(-\eta) \quad \text{при всех } \ \eta \in \mathbb{R}^m.$$

Кроме того, будем считать, что $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$.

Следующий пример показывает, что и при непрерывном симметричном распределении случайного вектора η множество точек x, задаваемых условием (3), может не быть выпуклым. Пусть $m = 2$ и ограничение (3) имеет вид

$$P(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 \geq -1) \geq 0.75.$$

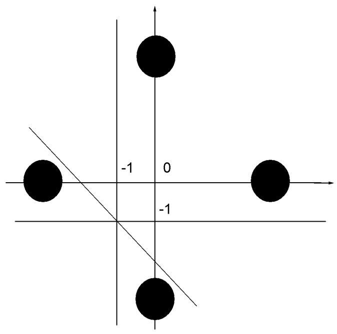

Рис. 1. Границы полупространств $\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 \geq -1$ при различных (x_1, x_2)

Функция φ принимает ненулевые значения только внутри четырех кругов радиуса 0.5 каждый с центрами в точках (3, 0), (0, 3), (−3, 0), (0, −3), см. рис. 1. Вероятность попадания в каждый круг равна 0.25, внутри любого из этих кругов распределение равномерное.

Точки (1, 0) и (0, 1) входят в допустимое множество. Но точка $(0.5, 0.5)$ в допустимое множество не входит,

$$P\left(\eta_1 \cdot 0.5 + \eta_2 \cdot 0.5 \geq -1\right) = 0.5,$$

то есть допустимое множество не является выпуклым.

Известно, что если случайный вектор η имеет невырожденное многомерное нормальное распределение или невырожденное многомерное распределение Коши, то допустимое множество, определяемое условием (3), является выпуклым (см., например, [5, с. 102, 110]).

В работе [6] показано, что при изучении выпуклости допустимого множества в задаче стохастического линейного программирования важную роль играет плавающее множество случайного вектора η.

Пусть S^{m-1} – единичная сфера пространства $\mathbb{R}^m$ (с координатами $\eta_1, \ldots, \eta_m$; в настоящей работе фактически рассматриваются два пространства $\mathbb{R}^m$, одно с координатами $x_1, \ldots, x_m$, другое – с координатами $\eta_1, \ldots, \eta_m$).

При каждом $u \in S^{m-1}$ через L_u обозначим замкнутое полупространство пространства $\mathbb{R}^m$ с границей ∂L_u такое, что

1. гиперплоскость ∂L_u ортогональна вектору u, при этом $\langle v, u \rangle > 0$ для любого $v \in \partial L_u$;

2. $P(\eta \in L_u) = 1 - \varepsilon$, и L_u – наименьшее из полупространств, удовлетворяющих условию 1, для которого выполняется данное равенство.

Из условия 2 и симметричности распределения случайного вектора η следует, что $0 \in L_u$ при любом $u \in S^{m-1}$.

Плавающее множество F_ε случайного вектора η определяется следующим образом:

$$F_\varepsilon = \bigcap_{u \in S^{m-1}} L_u.$$

Очевидно, что F_ε – замкнутое выпуклое множество, $0 \in F_\varepsilon$.

Рассмотренный выше пример случайного вектора η, равномерно распределенного внутри четырех кругов, показывает, что, вообще говоря, не любая из гиперплоскостей ∂L_u является опорной для множества F_ε.

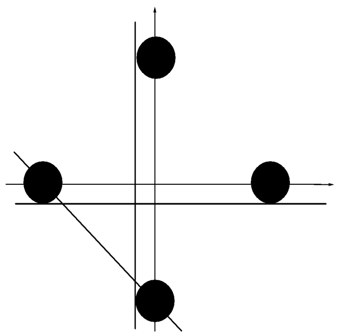

Рис. 2. Границы полупространств L_u, определяющих плавающее множество, при различных $u \in S^{m-1}$

На рис. 2 для $\varepsilon = 0.25$ показаны гиперплоскости (при $m = 2$ – прямые) ∂L_u для

$$u = (-1, 0), \quad u = (0, -1), \quad u = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Очевидно, что для третьего из этих векторов u прямая ∂L_u не пересекается с множеством F_ε, то есть не является опорной для данного множества.

В параграфе 2 настоящей работы, следуя известной схеме, но с некоторыми упрощениями, устанавливается, что если при любом $u \in S^{m-1}$ гиперплоскость ∂L_u является опорной для множества F_ε, то допустимое множество, определяемое условием (3), выпуклое. Показано также, что вероятностное ограничение (3) при этом может быть заменено на эквивалентное детерминированное ограничение.

В параграфе 3 содержится основной математический результат работы. Это доказательство того, что если функция плотности φ является α-вогнутой, $\alpha \geq -\dfrac{1}{m+1}$, то любая из гиперплоскостей ∂L_u, определяющих плавающее множество случайного вектора η, опорная для этого множества. В доказательстве не используются теория α-вогнутых мер и свойства нормированных пространств с нормой, не порожденной скалярным произведением, хотя оно и основано на тех же идеях, что и оригинальное доказательство. Оригинальное доказательство этого результата приводится в работах [7] (для $\alpha = 0$) и [3]. При этом, как указывается в работе [7], автором доказательства является Болл. Но существующие в работах [7] и [3] отсылки к теории α-вогнутых мер делают доказательство доступным лишь для узких специалистов. Доказательство, приводимое в настоящей работе, ориентировано на значительно более широкий круг математиков.

2. Выпуклость допустимого множества

Рассматриваемая задача стохастического линейного программирования при ограничении (3) состоит в минимизации

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

при условии

$$P(\eta \in Q(x)) \geq 1 - \varepsilon,$$

где

$$Q(x) = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^{m} (a_j + \eta_j) x_j \geq b \right\}.$$

При $x = 0$ либо $Q(x) = \mathbb{R}^m$, либо $Q(x) = \emptyset$ в зависимости от знака b. При $x \neq 0$ множество $Q(x)$ – это полупространство пространства $\mathbb{R}^m$.

Предположим, что при любом $u \in S^{m-1}$ гиперплоскость ∂L_u является опорной для множества F_ε.

Лемма. Пусть $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$P(\eta \in Q(x)) \geq 1 - \varepsilon$$

в том и только том случае, когда

$$F_\varepsilon \subseteq Q(x).$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно при $x = 0$. В этом случае либо $Q(x) = \mathbb{R}^m$ и $P(\eta \in Q(x)) = 1$, либо $Q(x) = \emptyset$ и $P(\eta \in Q(x)) = 0$.

Пусть $x \neq 0$ и

$$\sum_{j=1}^{m} a_j x_j = b.$$

Тогда граница полупространства $Q(x)$ содержит 0. В силу симметричности и непрерывности распределения случайного вектора η

$$P(\eta \in Q(x)) = 0.5.$$

Нетрудно показать, что в этом случае F_ε не является подмножеством $Q(x)$. Действительно, если $u \in S^{m-1}$ – вектор, ортогональный границе полупространства $Q(x)$, то гиперплоскости ∂L_u и ∂L_{-u} имеют общие точки с множеством F_ε, и эти точки лежат по разные стороны от границы полупространства $Q(x)$. То есть утверждение леммы верно и в этом случае.

Пусть $x \neq 0$ и

$$\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \neq b.$$

Тогда граница полупространства $Q(x)$ не содержит 0. Поэтому можно выбрать вектор $u \in S^{m-1}$ такой, что при некотором $r > 0$ любая точка границы полупространства $Q(x)$ представима в виде $\frac{1}{r}u + v$, где $\langle u, v \rangle = 0$.

Если $P(\eta \in Q(x)) \geq 1 - \varepsilon$, то $L_u \subseteq Q(x)$, и, следовательно, $F_\varepsilon \subseteq Q(x)$.

Если $F_\varepsilon \subseteq Q(x)$, то можно воспользоваться тем, что гиперплоскость ∂L_u является опорной для множества F_ε. Это означает, что $L_u \subseteq Q(x)$. Но тогда

$$P(\eta \in Q(x)) \geq 1 - \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Из определения множества $Q(x)$ видно, что при любых $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$ и при любом λ, $0 < \lambda < 1$,

$$Q(x) \cap Q(y) \subseteq Q(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

Если $P(\eta \in Q(x)) \geq 1 - \varepsilon$, $P(\eta \in Q(y)) \geq 1 - \varepsilon$, то в силу леммы

$$F_\varepsilon \subseteq Q(x) \cap Q(y).$$

Следовательно,

$$F_\varepsilon \subseteq Q(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

Поэтому по лемме

$$P(\eta \in Q(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \geq 1 - \varepsilon.$$

Значит, множество допустимых значений в задаче стохастического линейного программирования с вероятностным ограничением выпуклое.

Из леммы следует, что ограничение (3) может быть заменено на эквивалентное детерминированное ограничение

$$\sum_{j=1}^{m}(a_j+\eta_j)x_j \geq b \quad \forall\, \eta \in F_\varepsilon,$$

которое также может быть записано в виде

$$\langle a, x\rangle + \inf_{\eta\in F_\varepsilon}\langle \eta, x\rangle \geq b,$$

где $a=(a_1,\ldots,a_m)$.

В качестве примера рассмотрим случайный вектор η равномерно распределенный внутри m-мерного шара с центром в 0. Тогда, очевидно, F_ε – это также m-мерный шар радиуса R_ε с центром в 0. Условие на вектор x принимает вид

$$\langle a, x\rangle + \inf_{\eta:\,||\eta||\leq R_\varepsilon}\langle \eta, x\rangle \geq b,$$

или

$$\langle a, x\rangle \geq b + R_\varepsilon ||x||.$$

Данное ограничение отличается от ограничения вида (1) лишь слагаемым $R_\varepsilon ||x||$. Такой же результат будет получен, если распределение случайного вектора η одинаково для всех направлений, выходящих из 0, и не обязательно является равномерным внутри шара с центром в 0.

Проверка выпуклости множества допустимых значений, когда правая часть в (3) имеет вид не b, а $b+\zeta$, где ζ – случайная величина, может быть сведена к рассмотренному случаю. Положим $a_{m+1}=b$, $\eta_{m+1}=\zeta$. Если установлено, что множество допустимых значений, лежащее в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$, для задачи минимизации

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

при условии
$$P(\eta \in Q(x)) \ge 1 - \varepsilon,$$
где
$$Q(x) = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^{m+1} : \sum_{j=1}^{m+1} (a_j + \eta_j) x_j \ge 0 \right\},$$
выпуклое, то выпукло и пересечение этого множества с гиперплоскостью $x_{m+1} = -1$, что и необходимо.

3. Плавающее множество для α-вогнутых функций плотности

Пусть $s \ge 0$, $t \ge 0$, $0 < \lambda < 1$ – действительные числа, $-\infty \le \alpha \le 0$. Положим
$$M_\alpha(s,t;\lambda) = \begin{cases} s^\lambda t^{1-\lambda} & \text{при} \quad \alpha = 0 \\ (\lambda s^\alpha + (1-\lambda) t^\alpha)^{1/\alpha} & \text{при} \quad -\infty < \alpha < 0, \\ & \quad\ \text{если} \quad s\,t > 0 \\ 0 & \text{при} \quad -\infty < \alpha < 0, \\ & \quad\ \text{если} \quad s\,t = 0 \\ \min(s,t) & \text{при} \quad \alpha = -\infty \end{cases}$$

Пусть $B \subseteq \mathbb{R}^m$ – выпуклое множество. Функция $F : B \to \mathbb{R}$ называется α-вогнутой, если при любых $x, y \in B$ и при любом λ, $0 < \lambda < 1$, выполняется неравенство
$$F(\lambda x + (1-\lambda) y) \ge M_\alpha(F(x), F(y); \lambda).$$
Отметим, что 0-вогнутые функции называются также логарифмически вогнутыми функциями. Для краткости мы исключили из рассмотрения случай $0 < \alpha \le \infty$. Однако, если положить
$$M_1(s,t;\lambda) = \lambda s + (1-\lambda) t,$$
то 1-вогнутые функции – это обычные вогнутые функции.

Отметим, что если $-\infty \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \infty$, то при любых $s \geq 0$, $t \geq 0$, $0 < \lambda < 1$

$$M_{\alpha_1}(s, t; \lambda) \leq M_{\alpha_2}(s, t; \lambda),$$

см., например, [1, с. 250 – 251]. Поэтому любая α_2-вогнутая функция является также α_1-вогнутой функцией.

В данном параграфе доказывается утверждение, что если функция плотности φ является α-вогнутой при $\alpha \geq -\dfrac{1}{m+1}$, то при любом $u \in S^{m-1}$ гиперплоскость ∂L_u – опорная для множества F_ε.

Напомним, что если $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda < 1$, то через

$$\lambda\, A + (1-\lambda) B$$

обозначается множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые представимы в виде $\lambda\, x + (1-\lambda) y$, где $x \in A$, $y \in B$.

Для доказательства основного утверждения параграфа нужна следующая теорема (см., например, [4, теорема 2]).

Теорема. Пусть f и g – неотрицательные, измеримые и интегрируемые функции на $\mathbb{R}^n$ с носителями A и B, соответственно; $0 < \lambda < 1$, $-\dfrac{1}{n} \leq \alpha \leq 0$. Пусть h – неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$h(\lambda\, x + (1-\lambda) y) \geq M_\alpha(f(x), g(y); \lambda)$$

при любых $x \in A$, $y \in B$. Тогда

$$\int\limits_{\lambda\, A + (1-\lambda) B} h(x) dx \geq M_\beta \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) dx, \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) dx; \lambda \right),$$

где

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1+n\,\alpha} & \text{при} \quad -\dfrac{1}{n} < \alpha \le 0, \\ -\infty & \text{при} \quad \alpha = -\dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Переходим к доказательству основного утверждения этого параграфа.

Пусть при $u \in S^{m-1}$ положительное число r_u определяется условием

$$\partial L_u = \left\{ v \in \mathbb{R}^m : \langle v, u\rangle = \frac{1}{r_u} \right\},$$

то есть $v \in \partial L_u$ тогда и только тогда, когда $v = \dfrac{1}{r_u}\, u + w$, где $\langle w, u\rangle = 0$.

Через K обозначим множество элементов $x \in \mathbb{R}^m$, которые могут быть представлены в виде $x = r\,u$, при некотором $u \in S^{m-1}$ и $0 \le r \le r_u$.

Предположение 1. Предположим, что множество K выпуклое.

Из этого предположения следует, что множество K замкнутое. Замкнутость множества K очевидна, если известно, что точка 0 входит в множество K вместе с некоторой окрестностью. Существование такой окрестности точки 0 также несложно показать. Выберем шар B_R в $\mathbb{R}^m$ радиуса $R > 0$ такой, что

$$P\,(\eta \in B_R) > 1 - \varepsilon.$$

Условие $\dfrac{1}{r_u} > R$ противоречило бы тому, что L_u – наименьшее из полупространств с границей ортогональной u, для которых

$$P\,(\eta \in L_u) = 1 - \varepsilon.$$

Поэтому при каждом $u \in S^{m-1}$ должно выполняться неравенство $\dfrac{1}{r_u} \leq R$. Но данное неравенство может быть записано в виде $r_u \geq \dfrac{1}{R}$, что и означает существование требуемой окрестности.

Рассмотрим поляру множества K:

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^m : \langle y, x\rangle \leq 1 \quad \forall\, x \in K\}\,.$$

Очевидно, что

$$K^* = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \langle y, u\rangle \leq \frac{1}{r_u} \quad \forall\, u \in S^{m-1}\right\},$$

то есть $K^* = F_\varepsilon$.

Рассмотрим также поляру множества K^*:

$$K^{**} = \{z \in \mathbb{R}^m : \langle z, y\rangle \leq 1 \quad \forall\, y \in K^*\}\,.$$

Поскольку множество K выпуклое, замкнутое и содержит 0, должно выполняться $K^{**} = K$ (см. [1, теорема 6.4]).

Предположим, что при некотором $u_0 \in S^{m-1}$ опорной для множества F_ε является не гиперплоскость ∂L_{u_0}, а гиперплоскость $\langle y, u_0\rangle = \gamma$, $0 \leq \gamma < \dfrac{1}{r_{u_0}}$. Это означает, что для любого $y \in F_\varepsilon$

$$\langle y, u_0\rangle \leq \gamma.$$

Без ограничения общности в последнем неравенстве можно считать, что $\gamma > 0$. Тогда $\dfrac{u_0}{\gamma} \in K^{**}$. Но это противоречит определению множества K, поскольку $\dfrac{1}{\gamma} > r_{u_0}$.

Таким образом, если будет доказано, что множество K является выпуклым, то будет доказано и то, что при любом

$u \in S^{m-1}$ гиперплоскость ∂L_u является опорной для множества F_ε.

Переходим к доказательству выпуклости множества K.

При $x \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим слой

$$\Lambda(x) = \{v \in \mathbb{R}^m : |\langle v, x\rangle| \leq 1\}$$

и определим вероятность

$$G(x) = P\left(\eta \in \Lambda(x)\right).$$

Пусть $x = ru$, где $u \in S^{m-1}$, $r \geq 0$. Тогда при $x \neq 0$ границы слоя $\Lambda(x)$ параллельны гиперплоскости ∂L_u. Рассмотрим границу слоя $\Lambda(x)$

$$\left\{v \in \mathbb{R}^m : \langle v, u\rangle = \frac{1}{r}\right\}. \tag{4}$$

Если $x \in K$, то $0 \leq r \leq r_u$ и гиперплоскость (4) либо лежит вне полупространства L_u, либо совпадает с гиперплоскостью ∂L_u. В этом случае $G(x) \geq 1 - 2\varepsilon$.

Если $x \notin K$, то $r > r_u$ и гиперплоскость (4) лежит внутри полупространства L_u. В этом случае $G(x) < 1 - 2\varepsilon$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$. Функция

$$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

называется квазивогнутой на отрезке $[x, y]$, если при любом λ, $0 < \lambda < 1$,

$$F(\lambda\, x + (1-\lambda)y) \geq \min(F(x), F(y)).$$

Функция F называется квазивогнутой на $\mathbb{R}^m$, если при любых $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$. функция F квазивогнута на отрезке

$[x, y]$. (Согласно определению средних M_α, данному в начале параграфа, квазивогнутость является $(-\infty)$-вогнутостью.)

Предположение 2. Предположим, что функция G квазивогнута на $\mathbb{R}^m$.

Если $x, y \in K$, то $G(x) \geq 1 - 2\varepsilon$, $G(y) \geq 1 - 2\varepsilon$. Тогда при любом λ, $0 < \lambda < 1$,

$$G(\lambda\, x + (1 - \lambda) y) \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Это означает, что $(\lambda\, x + (1 - \lambda) y) \in K$, то есть множество K выпуклое.

Таким образом, если будет доказано, что функция G квазивогнута на $\mathbb{R}^m$, то будет доказано и то, что множество K является выпуклым.

Покажем, что если функция плотности $\varphi(\eta)$ является $\left(-\dfrac{1}{m+1}\right)$-вогнутой функцией на $\mathbb{R}^m$, то $G(x)$ – квазивогнутая функция на $\mathbb{R}^m$.

Отметим, что если x и y коллинеарны, то квазивогнутость функции G на отрезке $[x, y]$ очевидна, поскольку в этом случае один из слоев $\Lambda(x)$ или $\Lambda(y)$ содержится в другом.

Пусть x и y не коллинеарны. Положим (ср. [7, с. 150 – 151])

$$\rho = \Big(|x|^2 |y|^2 - \langle x, y\rangle^2\Big)^{1/2},$$

$$a = \frac{1}{\rho}\, \Big(\langle x, y\rangle\, x - |x|^2 y\Big), \quad b = \frac{1}{\rho}\, \Big(|y|^2 x - \langle x, y\rangle\, y\Big).$$

Очевидно, что

$$\langle x, a\rangle = 0, \quad \langle y, b\rangle = 0.$$

Также легко убедиться, что

$$|a|^2 = |x|^2, \quad |b|^2 = |y|^2, \quad \langle a, b\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Из выражений для a, b, ρ следует, что

$$\langle a, y\rangle = -\rho, \quad \langle b, x\rangle = \rho.$$

Отсюда вытекает, что

$$\langle a, x-y\rangle = \langle b, x-y\rangle = \rho. \tag{5}$$

Пусть $0 < \mu < 1$. Положим

$$z = \mu x + (1-\mu)y, \quad c = \mu a + (1-\mu)b.$$

Тогда, как нетрудно увидеть,

$$\langle z, c\rangle = 0, \quad |c|^2 = |z|^2, \quad \langle c, x-y\rangle = \rho.$$

Рассмотрим гиперплоскость

$$H = \{v \in \mathbb{R}^m : \langle v, x-y\rangle = 0\}.$$

Пусть

$$D = \{v \in H : |\langle v, x\rangle| \le 1\}.$$

Очевидно, что можно определить D и по-другому

$$D = \{v \in H : |\langle v, y\rangle| \le 1\}.$$

Из условия, что для $v \in H$

$$\langle v, z\rangle = \mu\langle v, x\rangle + (1-\mu)\langle v, y\rangle = \langle v, x\rangle = \langle v, y\rangle,$$

следует, что множество D можно определить и так

$$D = \{v \in H : |\langle v, z\rangle| \le 1\}.$$

Таким образом, D является сечением слоев $\Lambda(x)$, $\Lambda(y)$ и $\Lambda(z)$ гиперплоскостью H.

Согласно сделанным определениям

$$G(x) = \int\limits_{\Lambda(x)} \varphi(\nu) d\nu.$$

$\dfrac{x-y}{|x-y|}$ – единичная нормаль к гиперплоскости H.

С учетом (5) высота среза, расположенного в слое $\Lambda(x)$ между $D + ta$ и $D + (t + \Delta t)a$, $t \in \mathbb{R}$, $\Delta t > 0$, равняется

$$\Delta t \left\langle a, \frac{x-y}{|x-y|} \right\rangle = \Delta t \frac{\rho}{|x-y|}.$$

В силу симметричности распределения

$$G(x) = \frac{2\rho}{|x-y|} \int\limits_0^\infty \int\limits_D \varphi(v + ta) dv dt. \tag{6}$$

Аналогично

$$G(y) = \frac{2\rho}{|x-y|} \int\limits_0^\infty \int\limits_D \varphi(v + tb) dv dt, \tag{7}$$

$$G(z) = \frac{2\rho}{|x-y|} \int\limits_0^\infty \int\limits_D \varphi(v + tc) dv dt. \tag{8}$$

Введем обозначения для внутренних интегралов

$$I_a(s) = \int\limits_D \varphi(v + sa) dv, \quad I_b(t) = \int\limits_D \varphi(w + tb) dw,$$

$$I_c(q) = \int\limits_D \varphi(\xi + qc) d\xi,$$

где $s > 0$, $t > 0$ фиксированы, $q = \dfrac{st}{\mu t + (1-\mu)s}$.

Определим функции

$$f(v) = \varphi(v + sa), \quad g(w) = \varphi(w + tb), \quad h(\xi) = \varphi(\xi + qc)$$

при $v \in D$, $w \in D$, $\xi \in D$. Вне множества D функции f и g равны 0.

При $\lambda = \dfrac{\mu t}{\mu t + (1-\mu)s}$ имеем

$$h(\lambda v + (1-\lambda)w) = \varphi(\lambda v + (1-\lambda)w + qc) =$$

$$= \varphi\left(\lambda v + (1-\lambda)w + \frac{st}{\mu t + (1-\mu)s}(\mu a + (1-\mu)b)\right) =$$

$$= \varphi\left(\lambda v + (1-\lambda)w + \frac{\mu t}{\mu t + (1-\mu)s} sa + \frac{(1-\mu)s}{\mu t + (1-\mu)s} tb\right) =$$

$$= \varphi\left(\lambda(v + sa) + (1-\lambda)(w + tb)\right) \geq$$

$$\geq M_\alpha\left(\varphi\left(v + sa\right), \varphi\left(w + tb\right); \lambda\right) = M_\alpha\left(f(v), g(w); \lambda\right)$$

при $\alpha = -\dfrac{1}{m+1}$.

Применяя теорему, сформулированную в начале параграфа, при $n = m - 1$, получаем

$$I_c(q) \geq M_\beta\left(I_a(s), I_b(t); \lambda\right)$$

при $\beta = -\dfrac{1}{2}$.

Определим функции

$$f(s) = I_a(s), \quad g(t) = I_b(t), \quad h(q) = I_c(q).$$

Тогда доказанное неравенство записывается в виде

$$h(\lambda\, s + (1-\lambda)t) \geq M_\alpha(f(s), g(t); \lambda), \quad \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Заметим, что в последнем неравенстве λ зависит от s и t. Чтобы уйти от этого, используется следующая замена переменных из работ [2, с. 74 – 76], [3 , с. 309 – 310].

Если ввести новые переменные $\sigma = \dfrac{1}{s}$, $\tau = \dfrac{1}{t}$, то

$$\lambda = \frac{\mu\sigma}{\mu\sigma + (1-\mu)\tau},$$

$\lambda\, s + (1-\lambda)t = 1/(\mu\sigma + (1-\mu)\tau)$. Поэтому доказанное неравенство записывается в виде

$$h\left(\frac{1}{\mu\sigma + (1-\mu)\tau}\right) \geq M_\alpha\left(f\left(\frac{1}{\sigma}\right), g\left(\frac{1}{\tau}\right); \lambda\right)$$

при $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Используя определение среднего M_α, последнее неравенство можно записать в виде

$$h\left(\frac{1}{\mu\sigma + (1-\mu)\tau}\right) \geq$$

$$\geq \left(\frac{\mu\sigma}{\mu\sigma + (1-\mu)\tau}\, f\left(\frac{1}{\sigma}\right)^\alpha + \frac{(1-\mu)\tau}{\mu\sigma + (1-\mu)\tau}\, g\left(\frac{1}{\tau}\right)^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

при $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Считается, что правая часть равна 0, если $f\left(\dfrac{1}{\sigma}\right) \cdot g\left(\dfrac{1}{\tau}\right) = 0$. Неравенство можно записать в следующем виде

$$(\mu\sigma + (1-\mu)\tau)^{1/\alpha}\, h\left(\frac{1}{\mu\sigma + (1-\mu)\tau}\right) \geq$$

$$\geq \left(\mu\left(\sigma^{1/\alpha} f\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)^\alpha + (1-\mu)\left(\tau^{1/\alpha} g\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^\alpha\right)^{1/\alpha}, \quad \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Если ввести функции

$$f^*(\sigma) = \sigma^{1/\alpha} f\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad g^*(\tau) = \tau^{1/\alpha} g\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad h^*(\zeta) = \zeta^{1/\alpha} h\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

то полученное неравенство можно записать в виде

$$h^*(\mu\,\sigma + (1-\mu)\tau) \geq M_\alpha(f^*(\sigma), g^*(\tau); \mu), \quad \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Применяя теорему, сформулированную в начале параграфа, при $n = 1$, получаем

$$\int\limits_0^\infty h^*(\zeta)d\zeta \geq M_\beta\left(\int\limits_0^\infty f^*(\sigma)d\sigma, \int\limits_0^\infty g^*(\tau)d\tau; \mu\right)$$

при $\beta = -1$. Заметим, что выполняется равенство

$$\int\limits_0^\infty f^*(\sigma)d\sigma = \int\limits_0^\infty \sigma^{-2} f\left(\frac{1}{\sigma}\right)d\sigma = \int\limits_0^\infty f(s)ds,$$

и аналогичные равенства для двух других интегралов. Воспользовавшись определением среднего M_{-1}, получаем

$$\int\limits_0^\infty h(q)dq \geq \left(\mu\,\left(\int\limits_0^\infty f(s)ds\right)^{-1} + (1-\mu)\,\left(\int\limits_0^\infty g(t)dt\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

С учетом (6), (7), (8) это означает, что

$$\frac{1}{G(z)} \leq \mu\,\frac{1}{G(x)} + (1-\mu)\,\frac{1}{G(y)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{G(z)} \leq \max\left(\frac{1}{G(x)}, \frac{1}{G(y)}\right)$$

и $G(z) \geq \min(G(x), G(y))$.

Квазивогнутость функции $G(x)$ на $\mathbb{R}^m$ установлена. Таким образом, выполняется предположение 2. Следовательно, выполняется и предположение 1, и основное утверждение параграфа доказано.

В заключение остановимся еще на одном свойстве множества F_ε. Покажем сначала, что множество K является ограниченным. Предположим, что это не так. Тогда существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in S^{m-1}$, такая, что

$$r_{u_n} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из этой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке $u_0 \in S^{m-1}$. Выше было показано, что множество K содержит шар радиуса $\dfrac{1}{R}$ с центром в 0. Из сделанного предположения следует, что существует точка

$$3r_{u_0}u_0 + v \in K,$$

где $||\,v|| < \dfrac{1}{R}$. Воспользовавшись выпуклостью множества K и тем, что $(-v) \in K$, получаем $\dfrac{3}{2}\,r_{u_0}u_0 \in K$. Но это противоречит определению r_{u_0}. Ограниченность множества K доказана. Если K – компактное выпуклое множество, внутренности которого принадлежит 0, то по следствию из теоремы 6.6 из [1] и K^* – компактное выпуклое множество, внутренности которого принадлежит 0. Выше установлено, что $K^* = F_\varepsilon$.

Библиографический список

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

2. Ball K. Logarithmically concave functions and sections of convex sets in R^n // Studia Mathematica, 88 (1988), 69 – 84.

3. Bobkov S.G. Convex bodies and norms associated to convex measures // Probab. Theory Relat. Fields, 147 (2010), 303 – 332.

4. DasGupta S. Brunn-Minkowski inequality and its aftermath // J. of Multivariate Analysis, 10 (1980), 296 – 318.

5. Kall P., Mayer J. Stochastic linear programming: Models, theory and computation. N.Y.: Springer, 2011.

6. Lagoa C.M., Li X., Sznaier M. Probabilistically constrained linear programs and risk-adjusted controller design // SIAM J. Optim., 15 (2005), 938 – 951.

7. Meyer M., Reisner S. Characterization of affinely-rotation-invariant log-concave measures by section-centroid location // in: Geometric Aspects of Functional Analysis (1989 – 90). Lecture Notes in Math., 1469. Berlin: Springer, 1991, 145 – 152.

Препринт WP2/2014/01
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Шведов Алексей Сергеевич

О выпуклости допустимого множества в задаче стохастического линейного программирования