ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ НЕДОМИНИРУЕМОСТЬ В ЗАДАЧАХ ВЫБОРА

при частичных отношениях предпочтения

Подиновский В.В. (НИУ ВШЭ)

Функция ценности и выбор

A – множество объектов, $|A| > l \geq 1$

- **Функция ценности** (полезности) v:

$v(a) \geq v(b) \Leftrightarrow$ объект a *не менее предпочтителен*, чем b;

$v(a) > v(b) \Leftrightarrow$ объект a *предпочтительнее* объекта b;

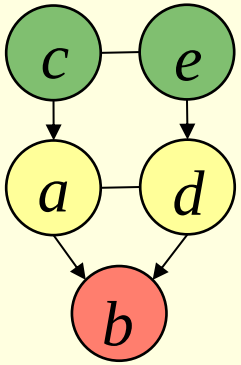
$v(a) = v(b) \Leftrightarrow$ объекты a и b *одинаковы по предпочтительности* (*безразличны*).

$v(c) = v(e) > v(a) = v(d) > v(b)$

$l = 1$: $A^* = \{c, e\}$

$l = 3$: $A^{3*} = \{c, e; a, d\}$

$\Rightarrow$



Оптимальные альтернативы для линейной свертки

X – множество альтернатив, $|X| > 1$

f_1, f_2 – критерии $X \to \mathrm{Re}$ $(\uparrow)$

$f = (f_1, f_2)$, $Y = f(X) = \{y = f(x) \mid x \in X\}$

$F(x \| w) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x)$ – функция ценности $(\uparrow)$

w_1, w_2 – веса критериев; $w_1, w_2 > 0$, $w_1 + w_2 = 1$

Веса заданы $\to$ оптимальная альтернатива

$$x^* \in X(w) = \mathrm{Arg}\max_{x \in X} F(x \| w)$$

Потенциально оптимальные альтернативы для линейной свертки

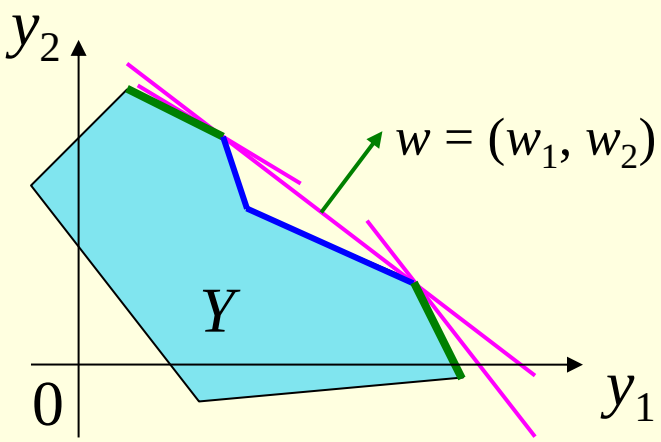
Веса точно не известны: $w \in W \rightarrow$

- *потенциально оптимальная* альтернатива

$$x^* \in X(W) = \cup_{w \in W} \operatorname{Arg\,max}_{x \in X} F(x \| w)$$

Пример. $W^0 = \{w \in \mathrm{Re}^2 | w_1, w_2 > 0, w_1 + w_2 = 1\}$

$W^> = \{w \in W^0 | w_1 > w_2\}$



Отношения предпочтения и безразличия

Бинарные отношения на A

- **нестрогого предпочтения**: $aRb \Leftrightarrow$ *a не менее предпочтителен*, чем b;
- **строгого предпочтения**: $aRb \Leftrightarrow$ *a предпочтительнее*, чем b;
- **безразличия**: $aIb \Leftrightarrow$ *a* и *b одинаковы по предпочтительности*, или *безразличны*;
- **несравнимости**: $aNb \Leftrightarrow$ *a* и *b несравнимы по предпочтительности*;

$$aPb \Leftrightarrow aRb \wedge \neg\, bRa; \quad aIb \Leftrightarrow aRb \wedge aRb$$

R – (*частичный*) *квазипорядок*

Отношение предпочтения и выбор

- Альтернатива x^* называется *оптимальной*, если x^*Rx верно для всякой альтернативы $x \in X$.
- Альтернатива x^* называется *недоминируемой*, если не существует альтернативы $x \in X$ такой, что верно xPx^*.

$X(R)$ – множество оптимальных альтернатив.

$X(\overline{P})$ – множество недоминируемых альтернатив.

$$X(R) \neq \varnothing \Rightarrow X(R) = X(\overline{P}).$$

- Множество называется *внешне устойчивым*, если для любой $x' \in X \setminus X(\overline{P})$ найдется $x'' \in X(\overline{P})$ такая, что верно $x''P\,x'$.

Если множество X конечно, то $X(\overline{P})$ внешне устойчиво.

Потенциально оптимальные альтернативы для семейства функций (White D.J., 1980)

X – множество* альтернатив,

R – частичный квазипорядок*.

v – ограниченная* функция $X \to \mathrm{Re}$,

возрастающая по R:

$\forall x, y \in X$: $xRy \Rightarrow v(x) \geq v(y)$, $xPy \Rightarrow v(x) > v(y)$.

V^0– множество всех таких функций; $V \subseteq V^0$, $V \neq \varnothing$.

- $X(V) = \{x \in X \mid \exists\, v \in V \;\; \forall y \in X : v(x) \geq v(y)\}$

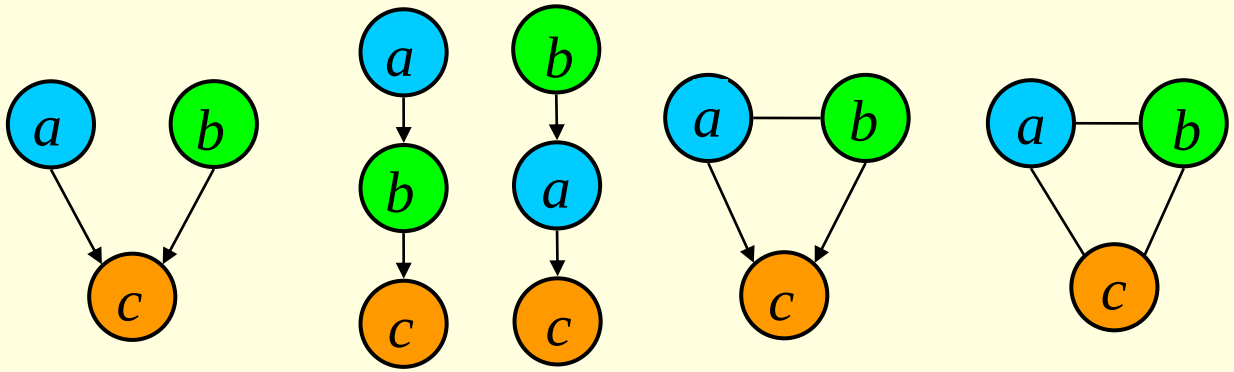
Справедливы соотношения:

$$X(V) \subseteq X(\overline{P}), \quad X(V^0) = X(\overline{P}).$$

Продолжение частичного квазипорядка

R, R' – квазипорядки на A.

- Квазипорядок R' *продолжает* частичный квазипорядок R ($R' \blacktriangleright R$), если $R' \supset R$ ($\Rightarrow I' \supseteq I$) и $P' \supseteq P$.



R R' R'' R'' $R^{\bullet}$

$\aleph$ – множество всех *полных* квазипорядков, продолжающих R; класс $\Re \subseteq \aleph$, $\Re \neq \varnothing$.

Потенциально оптимальные альтернативы для частичного квазипорядка

- Альтернатива x^* называется *потенциально оптимальной в классе* $\mathfrak{R}$, если существует $R' \in \mathfrak{R}$, для которого она является оптимальной.
- Альтернатива x^* называется *потенциально оптимальной,* если она потенциально оптимальна в классе $\aleph$.

$X(\aleph)$ $[X(\mathfrak{R})]$ – множество потенциально оптимальных [в классе $\mathfrak{R}$] альтернатив.

Любые две потенциально оптимальные для класса $\mathfrak{R}$ *альтернативы либо несравнимы, либо безразличны.*

Каждая потенциальная оптимальная для класса $\mathfrak{R}$ *альтернатива является недоминируемой:* $X(\mathfrak{R}) \subseteq X(\overline{P})$.

Альтернатива потенциально оптимальна тогда и только тогда, когда она недоминируема: $X(\aleph) = X(\overline{P})$.

Если $X(R) \neq \varnothing$, *то* $X(\mathfrak{R}) = X(R)$ *для любого* $\mathfrak{R}$.

.

Покрывающее множество потенциально оптимальных альтернатив

- Множество потенциально оптимальных для класса $\Re$ альтернатив называется *покрывающим* (множество X) (для этого класса), если $\forall x \notin X(\Re)\ \forall R' \in \Re\ \exists x^* \in X(\Re) : x^* P' x$.
  Множество потенциально оптимальных для класса $\aleph$ альтернатив, являющееся покрывающим для $\aleph$, называется *покрывающим*.

Если множество недоминируемых альтернатив $X(\overline{P})$ *внешне устойчиво, то множество потенциально оптимальных альтернатив* $X(\aleph)$ *является покрывающим.*

Внешняя устойчивость множества $X(\overline{P})$ *не гарантирует существования потенциально оптимальных для класса* $\Re$ *альтернатив.*

Множество $X(\Re)$ *может быть покрывающим, даже если множество* $X(\overline{P})$ *не является внешне устойчивым.*

Многокритериальная модель

X – множество альтернатив, $|X| > 1$

$f_1, f_2, \ldots, f_m$ – критерии $X \to Z_i \subseteq \mathrm{Re}$, $m \geq 2$ $(\uparrow)$

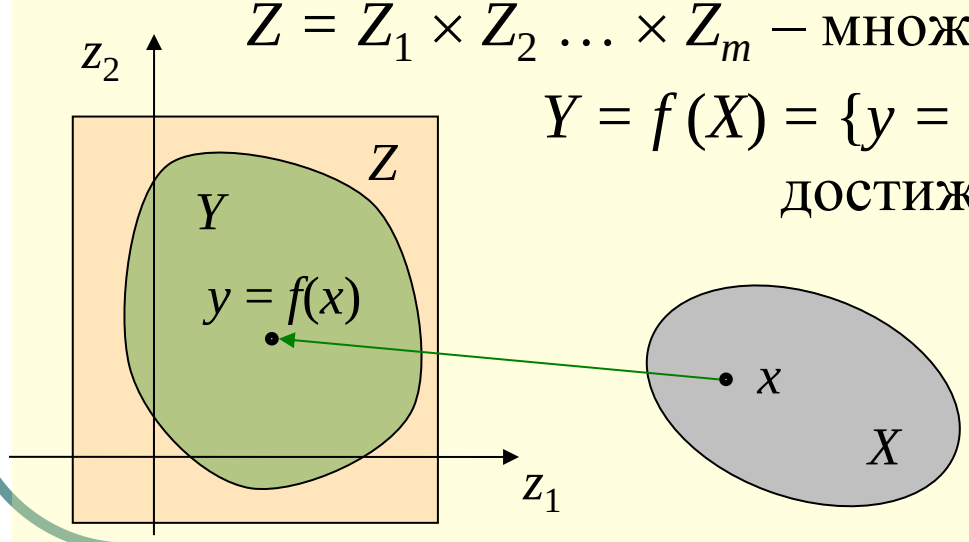
Z_i – шкала критерия f_i

$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ – векторный критерий

$f(x)$ – векторная оценки альтернативы x

$Z = Z_1 \times Z_2 \ldots \times Z_m$ – множество векторных оценок

$Y = f(X) = \{y = f(x) \mid x \in X\}$ – множество достижимых векторных оценок



R – квазипорядок на Z

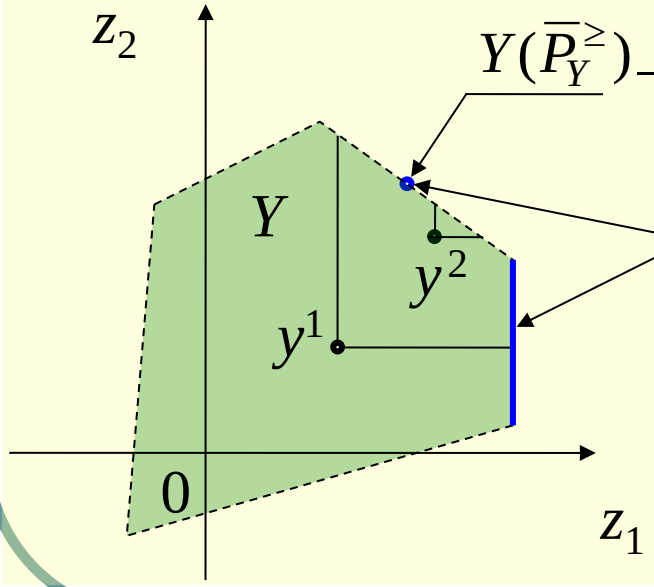
Отношения и оптимумы Парето

- (Сильное) отношение Парето на Z:

$$yP^{\geq}z \Leftrightarrow y_i \geq z_i\,,\ i = 1, \ldots, m,\ y \neq z; \quad R^{\geq} = P^{\geq} \cup E.$$

- (Слабое) отношение Парето, отношение Слейтера на Z:

$$yP^{>}z \Leftrightarrow y_i > z_i\,,\ i = 1, \ldots, m; \quad R^{>} = P^{>} \cup E.$$



$Y(\overline{P}_Y^{\geq})$ – множество оптимумов Парето

$Y(\overline{P}_Y^{>})$ – множество оптимумов Слейтера

Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации

$R_Y^{\geq}$ и $R_Y^{>}$ – сужения отношений $R^{\geq}$ и $R^{>}$ на множество допустимых векторных оценок Y соответственно.

$\Re_Y^{\geq}$ и $\Re_Y^{>}$ – классы всех полных квазипорядков на Y, продолжающих $R_Y^{\geq}$ и $R_Y^{>}$ соответственно.

- Функция $\varphi(z)$ называется *возрастающей по* $P^{\geq}$ (соответственно *по* $P^{>}$) на Z, если $z'P^{\geq}z'' \Rightarrow \varphi(z') > \varphi(z'')$ (соответственно $z'P^{>}z'' \Rightarrow \varphi(z') > \varphi(z'')$).

Каждая такая функция порождает на Z полный квазипорядок

$$R^{\varphi}\colon z'R^{\varphi}z'' \Leftrightarrow \varphi(z') \geq \varphi(z'').$$

$\Re_{\geq}^{\varphi}$ ($\Re_{>}^{\varphi}$) – класс полных квазипорядков, порождаемых на Y всеми функциями φ, непрерывными и возрастающими по $P^{\geq}$ (соответственно по $P^{>}$) на Z (а потому и на Y).

Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации

$Y(\Re_{\geq}^{\varphi})$ и $Y(\Re_{>}^{\varphi})$ – множества потенциально оптимальных векторных оценок для классов $\Re_{\geq}^{\varphi}$ и $\Re_{>}^{\varphi}$ соответственно.

Векторная оценка $y^0 \in Y$ является оптимальной по Слейтеру тогда и только тогда, когда она потенциально оптимальна для класса $\Re_{>}^{\varphi}$, т.е. справедливо равенство $Y(\Re_{>}^{\varphi}) = Y(\overline{P}_Y^{>})$.

Полный продолжающий $R^{\geq}$ квазипорядок $R^{lex}(b), b \in Z$:

$$z' R^{lex}(b) z'' \Leftrightarrow [\varphi_{\Pi}(z'|b) > \varphi_{\Pi}(z''|b)] \vee [(\varphi_{\Pi}(z'|b) = \varphi_{\Pi}(z''|b)) \wedge (\sum_{i=1}^{m} z_i' \geq \sum_{i=1}^{m} z_i'')]$$

$$\varphi_{\Pi}(z|b) = \min_{i \in M}(z_i - b_i).$$

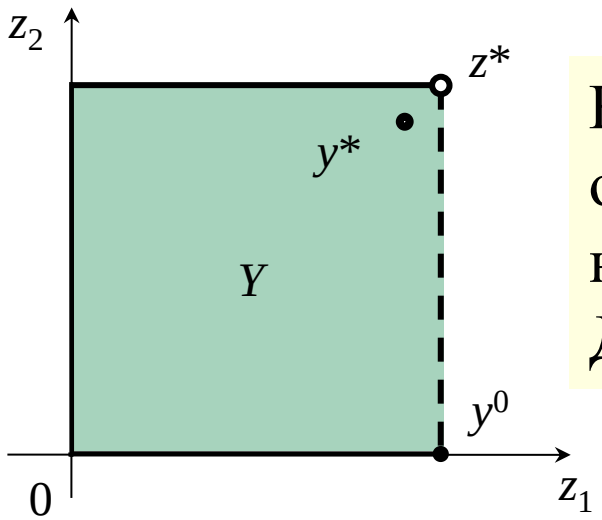
Оптимальная по Парето векторная оценка $y^0 \in Y$ является оптимальной по квазипорядку $R_Y^{lex}(y^0)$.

.

Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации

Оптимальная по Парето векторная оценка может не быть потенциально оптимальной для класса $\Re^{\varphi}$, *т.е. вложение* $Y(\Re^{\varphi}) \subseteq Y(\overline{P}_Y^{\geq})$ *может быть строгим.*

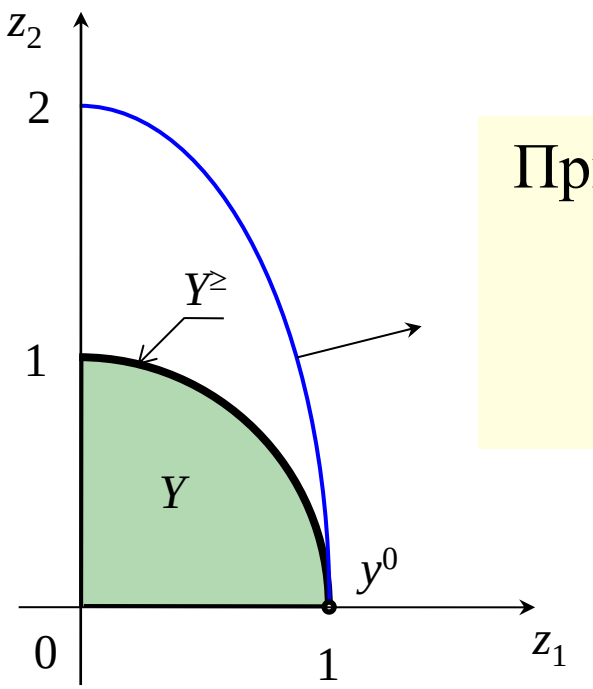
Пример. $m = 2$, $Z = \mathrm{Re}^2$ и множество Y представлено на рис. Здесь $y^0 \in Y$, $z^* \notin Y$ и $z^* P^{\geq} y^0$.



В рассмотренном примере векторная оценка y^0 оптимальна по Парето, но не является оптимальной по Джоффриону. И это не случайно.

Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации

Оптимальная по Джоффриону векторная оценка является потенциально оптимальной для класса $\Re_{\geq}^{\varphi}$ *, т.е. верно вложение* $Y^*(P_Y^{\geq}) \subseteq Y(\Re_{\geq}^{\varphi})$ *. Оно может быть строгим.*



Пример. $m = 2$, $Z = \{z \in \mathrm{Re}^2 \,|\, z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0\}$,

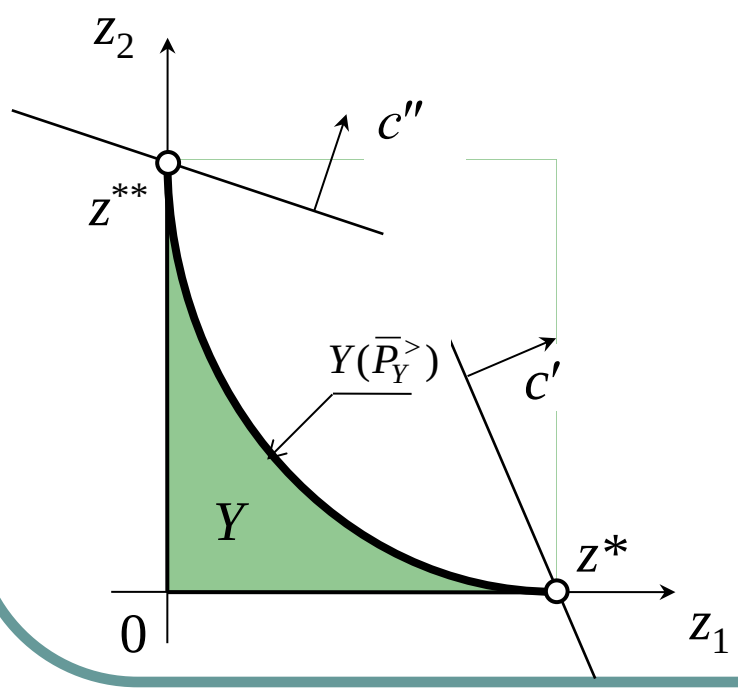
$$Y = \{z \in \mathrm{Re}^2 \,|\, z_1^2 + z_2^2 \leq 1\},$$

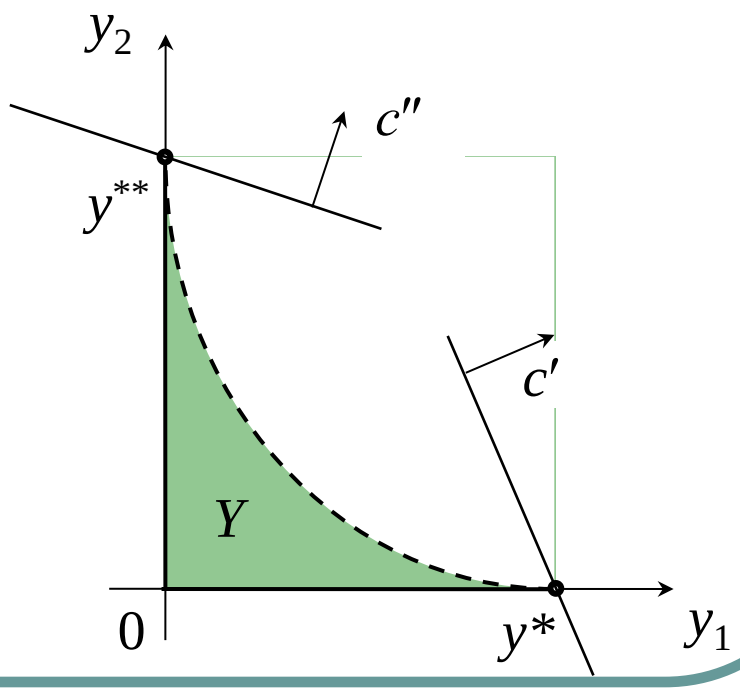
$$\varphi(z) = 4z_1^2 + z_2^2 \ , \ \varphi \in \Re_{\geq}^{\varphi} .$$

Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации

Пусть $\Re^L_{>0}$ – класс полных квазипорядков $R^L_{>0}$, порождаемых на Z функциями $L(z|c)=\sum_{i=1}^m c_i z_i$, где все $c_i > 0$:

$$z' R^L_{>0} z'' \Leftrightarrow L(z'|c) \geq L(z''|c)$$





Пример для мотивации определения потенциальной недоминируемости (1)

В трехкритериальной задаче шкала критериев f_1, f_2 и f_3 содержит три градации 1, 2 и 3. Имеется три альтернативы x^1, x^2 и x^3 с такими векторными оценками:

$$y^1 = f(x^1) = (2, 1, 3),\ y^2 = f(x^2) = (3, 2, 1),\ y^3 = f(x^3) = (1, 2, 3).$$

Полученная качественная информация о важности критериев состоит из единственного сообщения: «Второй критерий важнее третьего»: $\Omega = \{2 \succ 3\}$.

Любые две альтернативы несравнимы по отношению R_Ω, порождаемому этой информацией.

Пример для мотивации определения потенциальной недоминируемости (2)

За счет получения дополнительной качественной информации о важности критериев, согласованной с информацией $\Omega = \{2 \succ 3\}$, можно получить одну из пяти ранжировок – упорядочений всех критериев по важности:

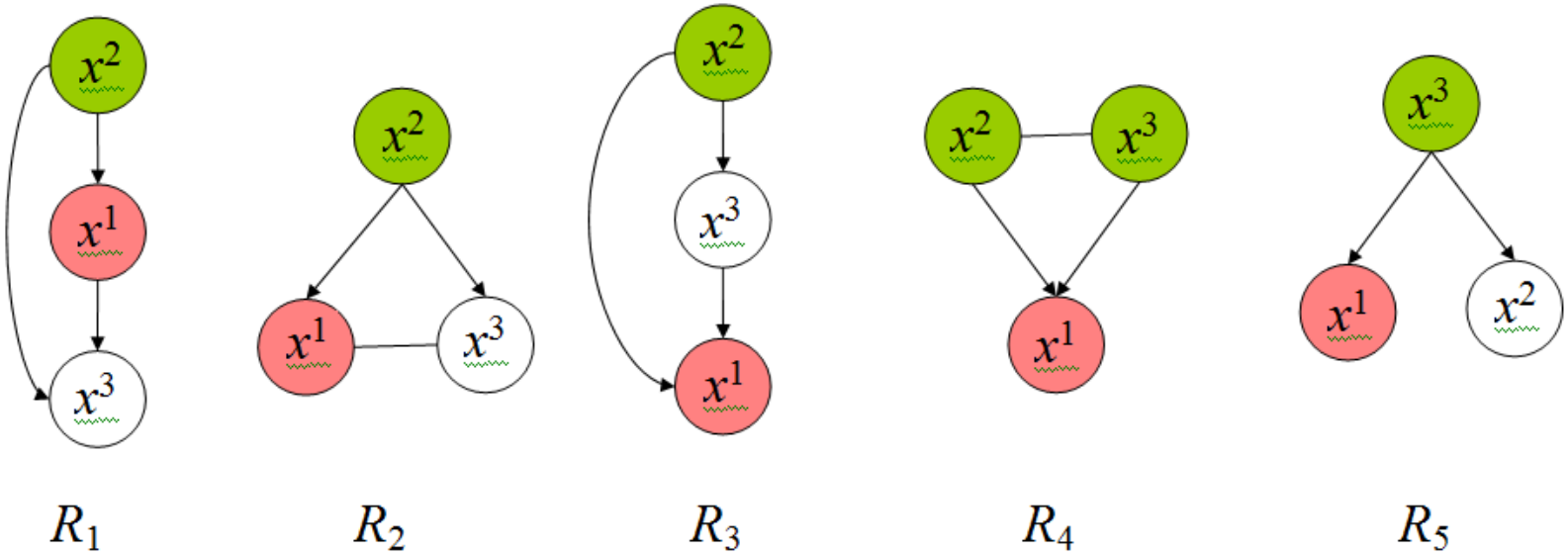
$$\Omega^1 = \{1 \succ 2 \succ 3\},\ \Omega^2 = \{1 \approx 2 \succ 3\},\ \Omega^3 = \{2 \succ 1 \succ 3\},$$

$$\Omega^4 = \{2 \succ 1 \approx 3\},\ \Omega^5 = \{2 \succ 3 \succ 1\}.$$

Каждая возможная информация $\Omega^1, \ldots, \Omega^5$ порождает на множестве альтернатив соответствующее отношение нестрогого предпочтения $R_1, \ldots, R_5$. Графы этих отношений представлены на рисунке на следующем слайде.

Пример для мотивации определения потенциальной недоминируемости (3)

Графы без петель



Альтернатива x^1 является заведомо доминируемой.

Альтернативы x^2 и x^3 потенциально недоминируемы.

Потенциальная недоминируемость

Пусть $\mathfrak{R}$ – класс частичных квазипорядков, определённых на множестве альтернатив X и продолжающих частичный квазипорядок R_0 (вырожденный случай, когда этот квазипорядок есть отношение равенства, не исключается). Множество строгих частичных порядков P, порождаемых квазипорядками R из $\mathfrak{R}$, обозначим через $\mathfrak{I}$.

- Альтернатива x^* называется *потенциально недоминируемой* (для класса $\mathfrak{I}$), если найдется такое $P \in \mathfrak{I}$, что x^* является недоминируемой (по P), т.е. xPx^* неверно для любого $x \in X$.

  В противном случае x^* – *заведомо доминируемая*.

Потенциальная недоминируемость

Всякая потенциально недоминируемая для $\Im$ альтернатива является недоминируемой по P_0.

Пусть $X(\Im)$ – множество потенциально недоминируемых альтернатив. Согласно определению справедливо равенство:

$$X(\Im) = \bigcup_{P \in \Im} X(P).$$

- Множество $X(\Im)$ называется *покрывающим* (*множество* X), если для любой альтернативы $x \notin X(\Im)$ и любого порядка $P \in \Im$ найдется альтернатива $x^* \in X(\Im)$ такая, что выполнено $x^* P x$.

Если множество X конечно, то множество $X(\Im)$ является покрывающим.

Потенциальная недоминируемость

- Отношение *слабого доминирования* на X – отношение предпочтения $P^w(\mathfrak{I})$: $x' P^w(\mathfrak{I}) x'' \Leftrightarrow \forall P \in \mathfrak{I}$: $x' P x''$.

Справедливо вложение $X(P^w(\mathfrak{I})) \supseteq X(\mathfrak{I})$.

В примере: $P^w(\mathfrak{I}) = \varnothing \Rightarrow X(P^w(\mathfrak{I})) = X \supset X(\mathfrak{I}) = \{x^2, x^3\}$

- Отношение *сильного доминирования* на X – отношение предпочтения $P^s(\mathfrak{R})$:

$$x' P^s(\mathfrak{R}) x'' \Leftrightarrow \forall R \in \mathfrak{R}: x' R x'' \wedge \exists R \in \mathfrak{R}: x' P x''.$$

Справедливо вложение $X(P^w(\mathfrak{I})) \supseteq X(P^s(\mathfrak{I}))$ *и могут выполняться вложения* $X^s(\mathfrak{R}) \supseteq X(\mathfrak{I})$ или $X^s(\mathfrak{R}) \subseteq X(\mathfrak{I})$.

Пусть множество $X^s(\mathfrak{R})$ *внешне устойчиво (по* $P^s(\mathfrak{R})$*).*

Если $x^j \in X^w(\mathfrak{I}) \setminus X^s(\mathfrak{R})$, *то существуют* $R \in \mathfrak{R}$ и $x^t \in X(P^s(\mathfrak{I}))$ *такие, что верно* $x^t I x^j$.

Параметрический класс $\mathfrak{R}$

Класс $\mathfrak{R}$ – параметрическое семейство $\mathfrak{R}(\mathrm{A}) = \{R(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$, элементами которого являются частичные квазипорядки $R(\alpha)$, определенные на X и продолжающие R_0.

- Альтернатива x^* называется *потенциально недоминируемой* (для $P(\mathrm{A})$), если найдется такое значение $\alpha \in \mathrm{A}$, что x^* является недоминируемой по $P(\alpha)$.

Пусть множество альтернатив X конечно.

Пусть x^j – проверяемая альтернатива. Решающее правило, задающее отношения $P(\alpha)$, для каждого варианта x^t, $t \neq j$, в области А определяет подобласть $\mathrm{A}^{tj} \subseteq \mathrm{A}$, такую, что для каждого $\alpha \in \mathrm{A}^{tj}$ верно $x^t P(\alpha) x^j$.

Параметрический класс $\mathfrak{R}$

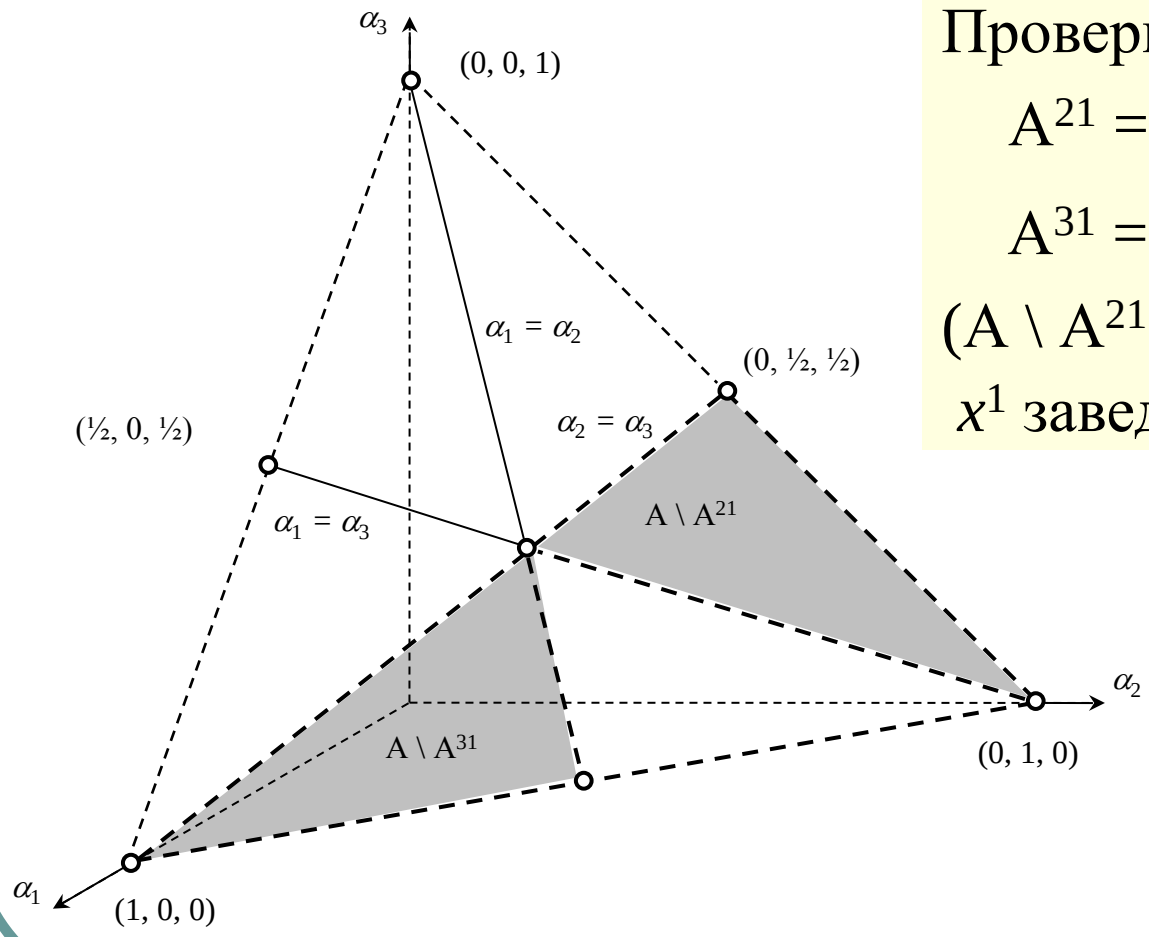
Альтернатива x^j заведомо доминируема (потенциально недоминируема), если и только если

$$\bigcup_{t \neq j} A^{tj} = A \qquad \left(\bigcap_{t \neq j} (A \setminus A^{tj}) \neq \varnothing \right).$$

Пример. В задаче из предыдущего примера примем допущение, что предпочтения описываются отношением $R(\alpha)$, причем о количественных величинах важности α_1, α_2 и α_3 известно лишь, что они согласованы с информацией Ω, т.е. $\alpha_2 > \alpha_3$. Таким образом, имеем:

$$A = \{\alpha \in \mathrm{Re}^3 \mid \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0,\ \alpha_2 > \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1\}.$$

Параметрический класс $\mathfrak{R}$



Проверка альтернативы x^1.

$$A^{21} = \{\alpha \in A \mid \alpha_1 \geq \alpha_3\},$$

$$A^{31} = \{\alpha \in A \mid \alpha_1 < \alpha_2\}.$$

$(A \setminus A^{21}) \cap (A \setminus A^{31}) = \varnothing \Rightarrow$

x^1 заведомо доминируема.

Или, иначе:

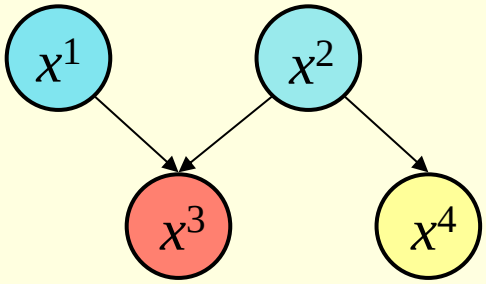
$A^{21} \cup A^{31} = A \Rightarrow$

x^1 заведомо доминируема.

Выбор нескольких лучших альтернатив

Требуется выбрать l¤2 лучших альтернатив из конечного множества X (число вариантов n в X больше, чем l). Предпочтения описываются частичным квазипорядком R.

Пример. $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$, упорядочение альтернатив согласно R представлено на рис., $l = 2$.



l-Оптимальные альтернативы

- Альтернатива x^* называется *строго l-оптимальной*, если x^*Px верно для всех альтернатив x, отличных от x^*, кроме, быть может, некоторого их числа, меньшего, чем l.
- Альтернатива x^* называется *l-оптимальной*, если x^*Rx верно для всех альтернатив x, кроме, быть может, некоторого их числа, меньшего, чем l.
- Альтернатива x^* называется *строго l-недоминируемой*, если число альтернатив, для которых верно xP^*x, меньше, чем l.

Пусть $X_l(P)$, $X_l(R)$, $X_l(\overline{P})$ – множества строго l-оптимальных, l-оптимальных и l-недоминируемых стратегий соответственно. $X_l(P) \subseteq X_l(R) \subseteq X_l(\overline{P})$

l-Оптимальные наборы

Пусть L – множество наборов – множеств, содержащих по l альтернатив. Наборы обозначаются $A = \{a^1, \ldots, a^l\}$, $B = \{b^1, \ldots, b^l\}$, … Пусть Π^l – множество всех перестановок множества $\{1, \ldots, l\}$. Для перестановки $\pi \in \Pi^l$ и набора $A = \{a^1, \ldots, a^l\}$ определим соответствующее упорядоченное множество $\pi(A) = < a^{\pi(1)}, \ldots, a^{\pi(l)} >$. На L определим отношение нестрогого предпочтения – частичный квазипорядок R_l :

$$aR^l b \Leftrightarrow \forall \pi, \sigma \in \Pi^l: a^{\pi(i)} R b^{\sigma(i)}, \; i = 1, \ldots, l.$$

Пусть $L(P)$, $L(R)$ и $L(\overline{P}_l)$ – множества строго оптимальных, оптимальных и недоминируемых наборов соответственно.

l-Оптимальные альтернативы и наборы

a) *число строго l-оптимальных альтернатив не может превосходить l; строго оптимальный набор может состоять только из строго l-оптимальных альтернатив и существует тогда и только тогда, когда таких альтернатив ровно l ;*

b) *в оптимальный набор могут входить только l-оптимальные альтернативы; он включает все строго l-оптимальные альтернативы;*

c) *каждый недоминируемый набор состоит только из l-недоминируемых альтернатив и включает все строго l-оптимальные альтернативы; множество недоминируемых наборов внешне устойчиво.*

d) *множество l-недоминируемых альтернатив внешне l-устойчиво;*

e) *если квазипорядок R полный, то* $X_l(R) = X_l(\overline{P})$.

Потенциальная l-оптимальность

Пусть $\Re_l$ – класс квазипорядков R_l на множестве наборов L, порождаемых полными квазипорядками R из класса $\Re$, и $\aleph_l$ – класс квазипорядков R_l на множестве наборов L, порождаемых полными квазипорядками R из класса $\aleph$.

- Набор A^* называется *потенциально оптимальным* для класса $\Re_l$, если в этом классе существует квазипорядок R_l, по которому A^* оптимален. Набор A^* называется *потенциально оптимальным*, если он потенциально оптимален для класса $\aleph_l$.
- Альтернатива x^* называется *потенциально l-оптимальной* для класса $\Re$, если существует квазипорядок $R \in \Re$ такой, что x^* является l-оптимальным по R.

Потенциально *l*-оптимальные альтернативы и наборы

Всякая потенциально l-оптимальная для класса $\mathfrak{R}$ альтернатива является l-недоминируемой;

Всякая l-недоминируемая альтернатива является потенциально l-оптимальной:

Альтернатива l-недоминируема тогда и только тогда, когда она потенциально l-оптимальна;

Потенциально оптимальный для класса $\mathfrak{R}_l$ набор может содержать только потенциально l-оптимальные для класса $\mathfrak{R}$ альтернативы; в частности, потенциально оптимальный набор может содержать только потенциально l-оптимальные альтернативы.

Всякий l-оптимальная альтернатива является потенциально l-оптимальной для любого класса $\mathfrak{R}$.

Заключение

Понятия **потенциальной оптимальности** и **потенциальной недоминируемости** – обобщения понятий оптимальности и недоминируемости на случаи, когда предпочтения моделируются с использованием семейств полных или только частичных отношений предпочтения соответственно.

Использование потенциальной **оптимальности** и **потенциальной** недоминируемости представляется эффективным в интерактивных процедурах решения задач выбора, особенно с иерархической структурой, в частности с использованием теории важности критериев.

Публикации (1)

- *Подиновский В.В.* О взаимосвязи понятий потенциальной оптимальности и недоминируемости // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 184 – 187. *Английский перевод*: Podinovski V.V. On the relation of the notions of potential optimality and non-dominance // Automation and Remote Control. 2012. V. 73. No 1. P. 167 – 170
- *Podinovski V.V.* Non-dominance and potential optimality for partial preference relations // European Journal of Operational Research. 2013. V. 229. P. 482 – 486.
- *Podinovski V.V.* Potential optimality of Pareto optima // Procedia Computer Science. 2013. V. 17. P. 1107 – 1112.
- *Подиновский В.В., Нелюбин А.П.* Потенциальная недоминируемость в задачах выбора // Материалы XLI Международной конференции «Информационные технологии в науке, социологии и бизнесе (IT + SE`13) (Украина, Крым, Ялта – Гурзуф, 2 – 10 октября 2013 г.). Приложение к журналу «Открытое образование». 2013. С. 31 – 34.

Публикации (2)

- *Подиновский В.В.* Потенциальная недоминируемость в задачах выбора нескольких лучших вариантов // Вестник Московского университета им. С.Ю. Витте. Серия 1: Экономика и управление. 2013. № 3 (5). С. 63 – 69.
- *Подиновский В.В.* Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 3. С. 44 – 45. *Английский перевод*: Podinovski V.V. Potential optimality in multicriterial optimization. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. V. 54, No. 1. P. 429 – 438.

Исследование осуществлено частично в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2011 г ., частично – в рамках Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2013 г. (проект № 12-01-0059).

Благодарю за внимание!