8.1. В выражение

$$(**+*)(**+*)=****$$

вставьте цифры вместо звёздочек так, чтобы получилось верное равенство и было использовано не более 4-х различных цифр. (Число не может начинаться с нуля).

Решение. Например, $(90+9)(10+1)=1089$. Или: $(99+1)(10+9)=1900$.

Критерии.

(+.) Правильная левая часть.
(+) Правильный ответ.

8.2. Известно, что ни одно из чисел a, b, c не является целым. Может ли случиться так, что каждое из чисел ab, bc, ca, abc — целое?

Решение. Да, может. Например, выберем три различных простых числа p_1, p_2, p_3 и рассмотрим числа

$$a = \frac{p_1 p_2}{p_3}, b = \frac{p_1 p_3}{p_2}, c = \frac{p_2 p_3}{p_1},$$

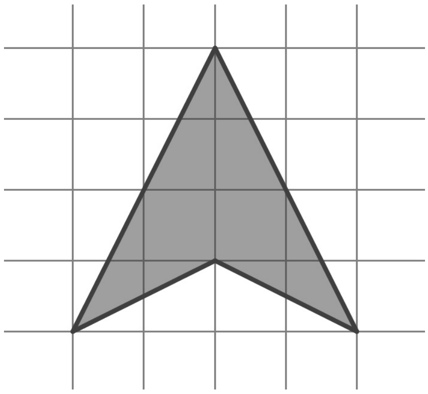
каждое из которых, очевидно, не является целым. Эта тройка удовлетворяет условиям задачи.

Критерии.

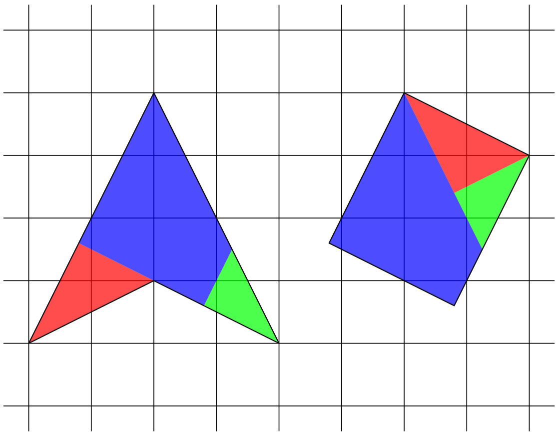
(−) Попытки доказать, что таких чисел не существует.

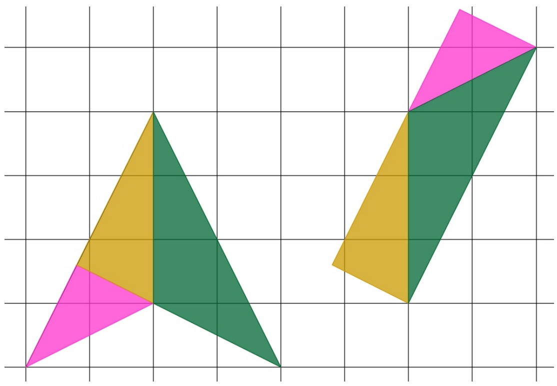
(+) Пример трёх чисел, удовлетворяющих условию.

8.3. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке ниже, на три части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник. Покажите, как именно сложить из них прямоугольник. Разрезы могут идти не по линиям сетки. Части можно переворачивать.



Решение. Ниже приведены два способа разрезания. Возможны и другие решения.



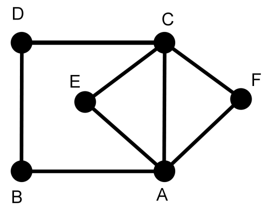


Критерии.

(−/+) Верно указаны линии разреза.

(+) Приведено отчётливое и правильное описание способа разрезания и складывания квадрата.

8.4. Двое играют в такую игру: на рисунке, изображённом ниже, в точке A стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединенную с нею отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон? Обоснуйте свой ответ.



Решение. Назовём степенью вершины число выходящих из неё отрезков. Заметим, что игра должна закончиться в вершине A. Действительно, степень вершины A в начале была 4, в конце стала 0, поэтому изменилась на чётное число, из чего немедленно вытекает, что мы должны закончить именно в ней. Докажем, что к концу игры все рёбра были пройдены. Действительно, из A никаких рёбер остаться не должно. Степени всех вершин были чётны, закончили мы там же, где и начали, поэтому степени всех вершин остались чётны. Ребра AB нет, поэтому степень вершины B 0, поэтому ребра BD нет, поэтому степень вершины D 0. Аналогично степени вершин E и F 0. Значит, рёбра из C никуда вести не могут, и её степень также 0. Так как всего рёбер чётно, закончит игру второй игрок и выиграет.

Критерии.

(−.) "Плохой" перебор и ничего не сказано про чётность числа рёбер.

(−/+) Перебор с небольшим количеством пропущеннных случаев, или сказано о том, что число рёбер чётно.

(+/2) Сказано о чётности числа рёбер в графе и сказано (но не доказано), что у второго есть ход.

(+/−) Сказано о чётности вершин и объяснено, почему у второго всегда есть ход.

(+) Полное решение, (включая полный перебор).

8.5. Вдоль берега круглого озера растут яблони. Петя и Вася начинают идти из точки A на берегу в противоположных направлениях вдоль берега и считают все яблони, встретившиеся им на пути, а также все яблоки, растущие на яблонях. Встретившись в некоторой точке B, они сверили результаты. Оказалось, что Петя насчитал вдвое больше яблонь чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивил этот результат, и они решили повторить эксперимент. Они отправились из точки B в тех же направлениях, что изначально, и встретились снова в точке C. Оказалось, что на пути от B до C Петя опять насчитал вдвое больше яблонь чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивление стало ещё больше, и они опять решили повторить эксперимент. Отправившись из C в тех же направлениях, они встретились в точке D. Оказалось, что Петя опять насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася. Кто из них на пути от C до D насчитал больше яблок и во сколько раз?

Ответ. На пути от C до D Вася насчитал в 3 раза больше яблок, чем Петя.

Решение. Пусть всего вдоль берега росло n яблонь. На пути от A до B Вася насчитал вдвое меньше яблонь, чем Петя, а вместе они сосчитали все яблони, растущие на берегу. Значит Вася насчитал $\frac{n}{3}$, а Петя — $\frac{2n}{3}$ яблонь. Аналогично на пути от B до C Вася также насчитал $\frac{n}{3}$, и от C до D — тоже $\frac{n}{3}$ яблонь. Значит всего он насчитал ровно $\frac{n}{3} + \frac{n}{3} + \frac{n}{3} = n$ яблонь. Таким образом пройдя путь от A до D, Вася встретил по одному разу все яблони, растущие на берегу.

Далее, пусть всего на яблонях росло m яблок. На пути от A до B Вася насчитал в семь раз меньше яблок, чем Петя, а вместе они насчитали m яблок. Значит Вася насчитал $\frac{m}{8}$, а Петя — $\frac{7m}{8}$ яблок. Аналогично на пути от B до C Вася также насчитал $\frac{m}{8}$ яблок. Но всего на пути от A до D Вася насчитал m яблок (поскольку встретил по одному разу все яблони). Значит на пути от C до D он насчитал $m - \frac{m}{8} - \frac{m}{8} = \frac{3m}{4}$ яблок. Тогда Петя на пути от C до D насчитал $m - \frac{3m}{4} = \frac{m}{4}$ яблок, т.е. в 3 раза меньше, чем Вася.

Критерии.

(−.) Доказано, что на отрезках AB, BC, CD Вася насчитал одинаковое количество яблок.

(−/+) Правильный ответ, обоснование отсутствует или очень неполное.

(+/−) Решено в предположении, что скорости мальчиков постоянны, или что деревья растут на равных расстояниях.

(+.) Мелкие недочёты в верном решении (например сказано, что точки A и D обязательно совпадают, или указано расположение точек A, B, C, D без обоснования).

8.6. Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке H. I — центр *вписанной* окружности треугольника ABC, O — центр *описанной* окружности треугольника BHC. Известно, что точка I лежит на отрезке OA. Найдите угол BAC.

Ответ. 60°

Решение. Заметим, что точка O лежит на серединном перпендикуляре отрезка BC. С другой стороны, точка O лежит на биссектрисе угла A. Но две эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности, описанной вокруг треугольника ABC, и делящей дугу BC пополам. Итак, точка O лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Углы при вершинах треугольника ABC мы будем обозначать той же буквой. Рассмотрим равнобедренный треугольник OHC, $OH = OC$. Тогда из замечания о расположении точки O и свойств вписанных углов, сразу получаем, что углы при основании этого равнобедренного треугольника равны $90^\circ - B + A/2$. Аналогично, угол при основании равнобедренного треугольника OHB ($OH = OB$) равен $90^\circ - C + A/2$. Но сумма этих двух углов равна углу BHC, который, в свою очередь, равен углу $180^\circ - A$ (по теореме о вертикальных углах). Следовательно, $180^\circ - B - C + A = 180^\circ - A$, или $3A = 180$.

Критерии.

(−.) Ответ неверный и полного решения нет, но есть существенные продвижения в решении.

(−/+) Правильный ответ получен, но в решении используется без доказательства, что точка O принадлежит описанной окружности $\triangle ABC$.

(+/−) Доказано, что точка O лежит на описанной окружности $\triangle ABC$.

(+.) Ответ неверный изза арифметической ошибки.

(+) Правильный ответ + полное обоснование.