1. Решите в целых числах уравнение

$$x^2 - xy - 2y^2 = 13.$$

Решение. Запишем уравнение в виде $(x+y)(x-2y)=13$. Разлагая 13 в произведение двух целых чисел, получим четыре возможных случая:

$$1)\begin{cases}x+y=1\\x-2y=13\end{cases},\quad 2)\begin{cases}x+y=13\\x-2y=1\end{cases},\quad 3)\begin{cases}x+y=-1\\x-2y=-13\end{cases},\quad 4)\begin{cases}x+y=-13\\x-2y=-1\end{cases}.$$

Решая эти системы, получим четыре решения.

Ответ: $\begin{cases}x=5\\y=-4\end{cases}, \begin{cases}x=-5\\y=4\end{cases}, \begin{cases}x=9\\y=4\end{cases}, \begin{cases}x=-9\\y=-4\end{cases}$

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 10. Если найдена часть решений – 5 баллов. Если найдены все решения, но не доказано, что других решений нет – 6 баллов. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

2. Точки $A, B, C, D,$ принадлежащие координатной плоскости $xOy,$ расположены на параболе $y=-x^2+4x$ и имеют абсциссы $0, b$ (где $0<b<3$), 3, 4, соответственно. Найдите наибольшее возможное значение площади четырёхугольника $ABCD.$

Решение. Четырёхугольник $ABCD$ показан на рис. 1.

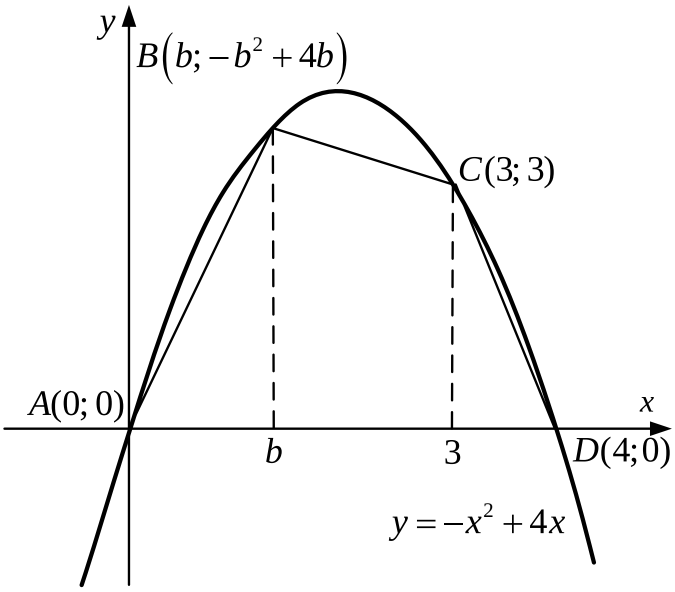

Рис. 1

Вычислим $S(b)$ – площадь четырёхугольника $ABCD.$

$$S(b)=\frac{b\left(-b^2+4b\right)}{2}+\frac{(3-b)\left(-b^2+4b+3\right)}{2}+\frac{3}{2}=\frac{-3b^2+9b+12}{2}$$

Найдём наибольшее значение $S(b)$. Оно достигается в вершине параболы $-3b^2+9b+12$ при $b=\frac{3}{2}$ и равно $S\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{75}{8}=9,375$.

Ответ: $\frac{75}{8}$

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Если ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – 12 баллов. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

3. Дано неравенство

$$\log_{a-2}(x-2) > \log_{a-2}(4a-2x).$$

Решите неравенство при $a = 2,5$ и найдите все значения $a,$ при которых это неравенство имеет только одно целочисленное решение.

Решение. При $a = 2,5$ неравенство принимает вид $\log_{0,5}(x-2) > \log_{0,5}(10-2x) \Leftrightarrow$ $0 < x-2 < 10-2x \Leftrightarrow 2 < x < 4$. Значит, при $a = 2,5$ $x \in (2;4)$. Перейдём к решению второй части задачи. Рассмотрим два случая в зависимости от величины основания логарифма:

1) $0 < a-2 < 1 \Leftrightarrow 2 < a < 3.$ Тогда $0 < x-2 < 4a-2x \Leftrightarrow 2 < x < \dfrac{4a+2}{3}$. Если неравенство имеет только одно целочисленное решение, то этим решением является $x = 3$ и выполняется условие

$$\begin{cases} 3 < \dfrac{4a+2}{3} \le 4 \\ 2 < a < 3 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$$

2) $a-2 > 1 \Leftrightarrow a > 3.$ Тогда исходное неравенство сводится к двойному неравенству

$$x-2 > 4a-2x > 0 \Leftrightarrow \frac{4a+2}{3} < x < 2a$$

Осталось выяснить, при каких значениях a в интервале решений $\left(\dfrac{4a+2}{3}; 2a\right)$ содержится лишь одно целое число. Если длина этого интервала больше 2, то в нём обязательно найдутся два целых числа. Итак, если $2a - \dfrac{4a+2}{3} > 2 \Leftrightarrow a > 4,$ то неравенство имеет, по крайней мере, два целочисленных решения, т.е. $a > 4$ не подходит. Осталось рассмотреть возможность $3 < a \le 4$. При $a = 4$ интервал решений примет вид $(6;8)$. Он содержит только одно целочисленное решение $x = 7$. Значит, $a = 4$ подходит. Если же $3 < a < 4$, то $\dfrac{4a+2}{3} < 6 < 2a$. Отсюда следует, интервал решений содержит $x = 6$. Тогда, чтобы в этом интервале не содержалось других целых чисел, нужно потребовать выполнение условий:

$$\begin{cases} 5 \le \dfrac{4a+2}{3} \\ 2a \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{13}{4} \le a \le \frac{7}{2}.$$

Окончательно имеем $a \in \left(2; \dfrac{5}{2}\right] \cup \left[\dfrac{13}{4}; \dfrac{7}{2}\right] \cup \{4\}$.

Ответ: $a \in \left(2; \dfrac{5}{2}\right] \cup \left[\dfrac{13}{4}; \dfrac{7}{2}\right] \cup \{4\}$

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Если задача решена при $a = 2,5$ – 4 балла. Если найдена част значений параметра a во второй части задачи, то оценка – 5 баллов. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

4. По координатной плоскости движутся две точки. Траектория первой точки описывается уравнением $y = \sqrt{x-A}$, а второй точки – уравнением $y = x - B$. Траектории зависят от параметров A и B. Напишите программу, которая по введённым значениям параметров A и B определяет, сколько раз пересекаются траектории этих точек. Если количество пересечений бесконечно, то ответом является отрицательное число -1.

Пример.

Вход	Выход
1.0 0.84	2

Решение. Сначала решим математическую задачу: найдём число решений уравнения

$$\sqrt{x-A}=x-B \qquad (1)$$

в зависимости от значений параметров A и B. Сделаем замену $t=\sqrt{x-A}\ge 0$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$t^2-t+A-B=0 \qquad (2)$$

Каждому корню $t\ge 0$ уравнения (2) соответствует корень уравнения (1). Значит, число решений уравнения (1) равно числу неотрицательных корней квадратного уравнения (2). Рассмотрим следующие случаи.

1) $D<0 \Leftrightarrow B<A-\frac{1}{4}$. Тогда уравнение (2) и, соответственно, уравнение (1) не имеет решений.

2) $D=0 \Leftrightarrow B=A-\frac{1}{4}$. Тогда $t=\frac{1}{2}$ – единственный корень уравнения (2), и уравнение (1) имеет одно решение.

3) $D>0 \Leftrightarrow B>A-\frac{1}{4}$. Найдём t_1,t_2 – корни уравнения (2). Заметим, что $t_1=\frac{1}{2}+\sqrt{B-A+\frac{1}{4}}$ – положительный корень. Пусть $t_2=\frac{1}{2}-\sqrt{B-A+\frac{1}{4}}\ge 0 \Rightarrow A\ge B$. Значит, если $A-\frac{1}{4}<B\le A$, то уравнение (2) имеет два неотрицательных корня, следовательно, уравнение (1) имеет два корня. Пусть теперь $t_2=\frac{1}{2}-\sqrt{B-A+\frac{1}{4}}<0 \Rightarrow A<B$. Значит, если $A<B$, то уравнение (2) имеет один неотрицательный корень, следовательно, уравнение (1) имеет только одно решение.

В итоге имеем:

1) Уравнение (1) не имеет решений $\Leftrightarrow B<A-\frac{1}{4}$.

2) Уравнение (1) имеет одно решение $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=A-\frac{1}{4} \\ A<B \end{array}\right.$.

3) Уравнение (1) имеет два решения $\Leftrightarrow A-\frac{1}{4}<B\le A$.

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 10. Задача оценивалась по результатам прогона тестов. Для проверки программы использовались 5 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	1 1	2	2
2	3 2	0	2
3	2 6	1	2
4	5 4,8	2	2
5	2,5 2,25	1	2

5. Напишите программу, которая по введённому натуральному числу N ($\mathrm{N}\le 500$) выдаёт наименьшее число M, произведение цифр которого (в десятичной записи) равно N, или 0, если такого числа M не существует.

Пример.

Вход	Выход
12	26
13	0

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Задача оценивалась по результатам прогона тестов. Для проверки программы использовались 5 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	30	56	3
2	34	0	3
3	216	389	3
4	343	777	3
5	500	4555	3

6. При подготовке космического корабля к полёту требуется перевести из института в ангар большое количество грузов, в том числе и дорогостоящие приборы. Для этих целей выделен контейнер размером L×W×H, где L, W и H – длина, ширина и высота контейнера в метрах (величины целочисленные). Имеется N одинаковых коробок размером X×Y×Z, где Z – это высота коробки, а X и Y – размеры её прямоугольного дна в метрах (все значения целочисленные). Все коробки маркированы знаком, запрещающим переворачивать коробки кверху дном или ставить коробки на бок. Разрешено ставить коробки друг на друга. Напишите программу, которая будет вычислять минимальное количество «этажей» коробок в контейнере. Если все коробки не поместятся в один контейнер, то вывести 0.

Порядок ввода:
в первой строке размеры контейнера L W H;
во второй строке количество коробок N;
в третьей строке размеры коробок X Y Z.

Вход	Выход
10 8 4 11 3 4 1	2

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Задача оценивалась по результатам прогона тестов. Для проверки программы использовались 5 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	13 9 5 10 4 5 2	2	3
2	12 8 11 18 3 5 2	3	3
3	10 6 5 10 5 3 1	3	3
4	12 6 4 6 4 3 3	1	3
5	12 6 4 13 4 3 2	0	3

7. Луноход перемещается по прямой линии, вдоль которой от точки старта проложена ось OX. Луноход пересекает кратеры, имеющие форму кругов. Для каждого кратера луноход фиксирует x-координату центра кратера Xi и длину хорды Di – отрезок линии пересечения трассы лунохода и кратера. Величина Di положительна, т.е. луноход не распознаёт кратеры, граница которых только касается трассы. Сопоставим каждой точке трассы её «кратность» – количество кратеров, которым принадлежит эта точка. Например, если точка касания двух кратеров лежит на трассе лунохода (и другим кратерам эта точка не принадлежит), то «кратность» этой точки равна двум. Накопленная информация передается на Землю в следующем формате: N – количество кратеров, определённых за время движения ($0 < N \leq 100$), а далее N строк, в каждой строке два вещественных числа Xi и Di, разделённые пробелом. Написать программу, которая по полученным от лунохода данным вычисляет максимальную «кратность» точек трассы лунохода.

Пример.

Вход	Выход
6 1 1 9 2 3.0 4 3.5 1 6 2 3 1	3
3 20 1 2 6 8 2	1

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 20. Задача оценивалась по результатам прогона тестов. Для проверки программы использовались 5 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	6 22 8 5 6 3 4 11 8 15 10 12 2	3	4
2	2 13 8 18 6	2	4
3	5 23 22 11 8 20 10 6 8 10 18	4	4
4	3 10 4 5 5 20 1	1	4
5	100 78 2 76 6 50 3 55 5 38 7	11	4

	90 11 86 7 66 3 61 10 76 6 61 4 71 2 42 4 47 7 72 7 63 10 64 7 77 5 32 4 30 1 66 2 17 8 29 3 30 2 20 3 64 7 66 11 11 5 109 7 89 11 30 2 87 6 16 3 15 9 53 2 82 7 18 9 64 1 84 9 15 8 83 6 42 3 68 1 49 1 81 9 101 2 27 9 99 7 91 8 37 7 57 7 90 10 23 9 61 7 17 3 76 7		