**Национальный исследовательский университет**

**Высшая школа экономики**

**Факультет экономики**

**Магистерская программа "Финансовые рынки и финансовые институты"**

**Специализация "Финансовые рынки"**

**Кафедра фондового рынка и рынка инвестиций**

##### МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

***«Ценообразование опционов с учетом фактора ликвидности»***

**Выполнил**

**Студент группы № 71ФРФИ(ФР-1)**

**Космодемьянский Р.А.**

**Научный руководитель**

**профессор, д.э.н. Теплова Т.В.**

**Москва 2014**

**Оглавление**

[**Введение** 3](#_Toc388920260)

[**Глава 1. Введение в проблематику ценообразования опционов с учетом ограниченной ликвидности акций** 7](#_Toc388920261)

[**1.1.** **Ликвидность как фактор влияющий на стоимость опциона** 7](#_Toc388920262)

[**1.2.** **Основные способы моделирования ликвидности актива в работах по ценообразованию опционов** 9](#_Toc388920263)

[**1.3.** **Обзор существующей литературы по тематике** 11](#_Toc388920264)

[**1.4.** **Место данного исследования в научном окружении** 23](#_Toc388920265)

[**Глава 2. Модель ценообразования опционов, учитывающая ликвидность базового актива** 27](#_Toc388920266)

[**2.1.** **Базовая модель Четина и Джарроу** 27](#_Toc388920267)

[**2.2.** **Дискретная модель ценообразования опционов с учетом фактора ликвидности** 31](#_Toc388920268)

[**Глава 3. Вопросы практического применения построенной дискретной модели ценообразования опционов** 40](#_Toc388920269)

 [**3.1.** **Изучение вопроса существования кривой предложения на российском рынке** 40](#_Toc388920270)

[**3.2.** **Метод решения задачи динамического программирования** 46](#_Toc388920271)

[**3.3.** **Обсуждение числового решения поставленной задачи** 50](#_Toc388920272)

[**Заключение** 53](#_Toc388920273)

[**Список литературы** 55](#_Toc388920274)

**Введение**

Понятие ликвидности является очень многогранным. Оно применяется к предприятиям реального и банковского сектора, рынкам и отдельным финансовым инструментам. Нередко по этой причине при использовании этого понятия возникает путаница, не позволяющая однозначно определить, что имеет в виду автор. В рамках данного исследования под ликвидностью будет пониматься ликвидность конкретных бумаг, являющихся базовыми активами производных контрактов.

Одной из общепринятых формулировок является представленная в работе Тепловой (Теплова, 2014). Согласно ней ликвидность актива – это *«возможность его трансформации в денежные средства за относительно короткий период времени без существенной потери стоимости»* [33, с.319]. В тоже время, автор указывает на существование альтернативного определения характерного в большей степени для микроструктурных финансов – *«вероятность совершения сделки по активу (покупки или продажи) установленного объема по установленной цене и в течение установленного времени»* [33, с.319]. С точки зрения дальнейшей работы именно вторая формулировка представляется более удобной и понятной для использования и построения теории.

Вопросы ликвидности значимы для инвесторов, осуществляющих сделки как с акциями, так и со срочными инструментами. В частности, следуя хеджирующей стратегии, в конце концов можно обнаружить, что полученный результат значительно отличается от теоретически рассчитанного: издержки ликвидности при определенных сценариях могут «съесть» значительную часть прибыли.

Стандартная теория ценообразования исходит из предпосылок, что рынки являются конкурентными и «без трений». То есть для них характерна абсолютная ликвидность торгуемых инструментов (как базовых, так и производных) и отсутствие трансакционных издержек. Как только данные предпосылки ослабляются и анализируемый рынок приближается к своему реальному аналогу, стандартная теория может перестать работать. Например, уже было немало исследований, показавших значимость фактора ликвидности на рынках акций и облигаций (Chou, 2011).

Также игнорирование данного вопроса может привести к неправильным оценкам рисков, связанных с приобретением или продажей финансовых активов. В частности, об этом говорит в своем обзоре Джарроу Р. (Jarrow, 2007). Автор указывает, что, среди прочего, игнорирование ограничений ликвидности ведет к занижению оценок VaR, широко использующихся для анализа рисков в банковском бизнесе и страховании, относительно действительных значений.

Эти примеры указывают на важность учета параметров ликвидности активов при построении моделей ценообразования. Однако, серьезное внимание данное направление научной деятельности привлекло лишь недавно, с начала 2000-х годов. Начиная с этого времени стали появляться теоретические работы, призванные определить справедливую цену производных финансовых инструментов с учетом ликвидности, а также эмпирические исследования, ставившие своей целью не только проверку уже выдвинутых гипотез, но и выявление конкретных показателей, влияющих на значения цен.

В рамках данной работы будет рассмотрено ценообразование опционов с учетом несовершенства рынка в смысле ограниченного уровня ликвидности базового актива. Тема представляется интересной по нескольким причинам. Во-первых, рынок деривативов является крупнейшим по объемам в мире[[1]](#footnote-1), соответственно ошибки, допущенные в этих условиях, как при оценке стоимости инструментов, так и рисков, могут привести к полномасштабному кризису, аналогичному тому, что мы уже наблюдали в 2008 году. Во-вторых, в силу своей специфики производные финансовые инструменты характеризуются не только собственной ликвидностью, но и ликвидностью базового актива. Изучение опционных контрактов в рамках данного исследования связано с тем, что они являются самым торгуемым видом производных инструментов на индексы и акции, для которых, в свою очередь, существует развитый спотовый рынок, в отличие от процентных ставок и товаров (Davydoff, 2009). Наконец, данная проблема в настоящее время остается, по моему мнению, все еще слабо изученной. Более подробно степень разработанности этой темы будет рассмотрена в следующей главе исследования в рамках обзора литературы. Все эти причины указывают на то, что работа является актуальной и представляет определенную научную ценность.

Объектом данного исследования являются опционные контракты на акции. Предмет представленной работы – ценообразование опционов с учетом факта ограниченной ликвидности базового актива.

Целью данного исследования является построение теоретической модели ценообразования опционов и изучение характера влияния параметров ликвидности базовых активов на цены опционов посредством кривой предложения.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1. Провести обзор и систематизацию существующей литературы по рассматриваемой тематике;
2. Выделить проекцию ликвидности, которая наилучшим образом может быть использована для изучения сформулированной проблемы;
3. Построить теоретическую модель, описывающую ценообразование опционов с учетом ликвидности в заданных предпосылках;
4. Проверить предпосылку о существовании кривых предложения для ряда российских ценных бумаг;
5. Сформулировать метод для определения стоимости опциона в рамках описанной модели;
6. Осуществить оценку стоимости европейского опциона колл для заданных параметров;
7. Сформулировать выводы, полученные в ходе исследования, и сравнить их с результатами других авторов.

Гипотеза, тестируемая в рамках исследования, заключается в том, что стоимость опциона зависит от ликвидности базового актива, а значит, инвесторы, должны учитывать этот фактор при определении стоимости данного производного инструмента и хеджировании позиций. Это утверждение предполагает, что на рынке существует негоризонтальная кривая предложения, описывающая зависимость цены акции от объема осуществляемой сделки. Это предположение будет протестировано на данных по ряду ценных бумаг, торгующихся на российском рынке в третьей части работы.

Для получения результатов в данном исследовании будут использованы логические методы, в их числе метод анализа и синтеза, индукции. В ходе построения модели и ее верификации будут использованы эконометрическая теория и метод динамического программирования.

К основным пунктам научной новизны данного исследования, среди прочего можно отнести модификацию существующих моделей, относящихся к сформулированному предмету исследования; применение уже известных методов к новой предметной области, позволяющее получить новые знания об исследуемом объекте.

Немаловажной является и практическая значимость данной работы. В исследовании представлен метод инкорпорирования определенных проекций ликвидности в биномиальную процедуру определения цены опциона, который может быть использован для базовых активов, для которых характерно выполнение заданных предпосылок, на различных фондовых рынках без значительных модификаций.

Структура работы соответствует поставленной цели и сформулированным задачам. В первой главе будет представлен обзор основных исследований по указанной тематике. Одна из частей данной главы будет посвящена обоснованию выбранного подхода включения ликвидности в модель. В следующей части будет описана теоретическая модель, которая будет проверена в третьей главе. Также в данной части работы будет изучен вопрос существования кривой предложения для некоторых ценных бумаг, торгующихся на российском фондовом рынке. В заключительной части будут сделаны окончательные выводы относительно влияния ликвидности на цены опционов.

**Глава 1. Введение в проблематику ценообразования опционов с учетом ограниченной ликвидности акций**

Следующий параграф будет посвящен подробному рассмотрению ликвидности и ее параметров. Ключевой задачей данной части работы является выбор характеристики ликвидности, которая будет использована в дальнейшем исследовании. Она должна достаточно хорошо отражать рыночную ситуацию и при этом быть относительно просто вычисляемой для конкретных условий. Это позволит учесть данную характеристику в процессе определения цены производного финансового инструмента.

* 1. **Ликвидность как фактор влияющий на стоимость опциона**

Риск ликвидности, связанный с отличной от единицы вероятностью быстрой трансформации актива в деньги без существенного влияния на цену, является одной из важных проблем, с которой вынужден столкнуться инвестор на фондовом рынке. Однако несмотря на это ему уделено значительно меньшее внимание по сравнению с кредитным риском, который также во многом определяет финансовые результаты операций. По мнению Роджерса и Сингха (Rogers, Singh, 2010) это отчасти связано с неопределенностью в терминологии, которая до сих пор характерна для исследований, касающихся вопросов ликвидности не только на рынке производных инструментов, но и базовых активов.

Чтобы понять каким образом влияет несовершенство рынка, выражающееся в форме ограниченной ликвидности, на процесс ценообразования опциона опишем небольшой пример. Пусть существует два одинаковых опциона различающихся лишь степенью ликвидности, базовыми активами для которых являются две акции, которые отличны также исключительно возможностью их обмена на денежные средства за относительно короткий временной интервал без осуществления значительного влияния на цену. В такой ситуации на стоимость опционов будут оказывать влияние следующие факторы:

* *косвенный* – ликвидность акции, которую можно рассматривать как дополнительный параметр наряду с волатильностью, безрисковой процентной ставкой и т.д., относящийся к базовому активу в текущих условиях и оказывающий влияние на справедливую оценку опциона;
* *прямой* – ликвидность самого опциона, влияние которой на стоимость данного производного инструмента полностью аналогично влиянию ограниченной ликвидности акций (облигаций) на стоимость акций (облигаций), выражающееся в форме скидок за низкую ликвидность.

Изучению влияния прямого фактора было посвящено немало статей, а общие выводы, полученные авторами этих исследований, представлены в работе Тепловой (Теплова, 2014). Основной результат заключается в том, что менее ликвидные инструменты несут большие риски для инвестора по сравнению с аналогичными активами, поэтому он готов платить за них меньшую цену, что выражается в существовании скидки за низкий уровень ликвидности. В то же время, косвенный фактор, по моему мнению, представляет особый интерес, поскольку он является специфичным для деривативов и мало изученным к текущему моменту. Поэтому в рамках данной работы основное внимание будет уделено вопросу несовершенной ликвидности акций как базовых активов опционных контрактов.

Опишем так называемые проекции ликвидности рынка, которые позволят охарактеризовать ликвидность актива (в нашем случае, акции), на нем торгующегося. Наиболее полно они представлены в работе Тепловой (Теплова, 2014). Всего, как указывает автор, существует пять проекций ликвидности рынка:

* Плотность;
* Частота совершения сделки/немедленность;
* Широта;
* Глубина;
* Упругость/эластичность.

Вслед за Тепловой дадим определения указанных проекций с целью их дальнейшего использования в исследовании. Первая проекция для котируемых контрактов определяется как отклонение цены спроса или предложения от равновесного значения и отражает величину переплаты (недоплаты) инвестора при покупке (продаже) актива. Меньшее значение данного показателя указывает на большую ликвидность инструмента. Частота совершения сделок отражает задержку по времени, с которой вынужден сталкиваться индивид, работающий на изучаемом рынке, желающий осуществить сделку с активом. Чем чаще проходят сделки, тем, очевидно, более ликвидным является контракт. Широта рынка определяется количеством актива, которое может быть предложено для продажи или покупки. Фактически, данный показатель показывает можно ли осуществить сделку определенного объема на изучаемом рынке. Очевидно, что чем больше показатель широты, тем более ликвидным является рынок актива. Характеристика глубины учитывает, как много присутствует на изучаемом рынке контрагентов относительно числа тех из них, кто предлагает лучшие котировки бид (аск), останется ли у других участников возможность заключать сделки после того, как инвестор осуществит свою. Большее значение данного показателя говорит о том, что рынок актива в меньшей степени отклоняется от предпосылки абсолютной ликвидности. Наконец, последняя проекция отражает насколько сильно отклоняется цена рассматриваемого инструмента от сложившегося значения под влиянием неких условий. Чем сильнее это изменение, тем менее ликвиден актив.

В последней части данной главы, изучив методологии авторов исследований по схожей тематике, будет выбрана проекция ликвидности, которая, по моему мнению, является оптимальной для отражения возможности трансформации актива в денежные средства за относительно короткий промежуток времени без значительного влияния на сложившийся уровень цены и будет использоваться в дальнейшей работе. В рамках решения этой задачи следующий параграф посвящен обзору приемов учета ограниченной ликвидности базового актива в ключевых исследованиях по ценообразованию опционов в условиях существования указанного несовершенств рынка.

* 1. **Основные способы моделирования ликвидности актива в работах по ценообразованию опционов**

Существует два ключевых подхода, определяющих исследования по данной тематике. Один заключается в том, что проблема ограниченной ликвидности для инвестора состоит в том, что он не может купить (продать) большой объем актива, не оказав при этом влияния на его цену. То есть фактически, в данных предпосылках модель сводится к учету и изучению эффекта влияния проходящих сделок на ценовой процесс. Эти исследования предполагают, что влияние является постоянным и сохраняется на протяжении времени. У этой модели есть некоторые недостатки, нашедшие отражение в ряде работ. В частности, Шонбукер и Вилмотт (Schonbucher, Wilmott 2000) описывают ситуацию, при которой инвестор может за достаточно короткий промежуток времени сначала продать некий объем актива, опустив цену, а затем откупить его, вернув цену на прежний уровень, и не понести при этом убытков. По мнению авторов это свидетельствует о недостатках модели, поскольку в таких условиях индивид может продавать опцион колл с барьером типа «down-and-out», а затем проводить описанную выше процедуру. В результате барьер будет пробит и опцион потеряет свою стоимость, а инвестор в данном случае будет гарантированно получать премию, уплаченную контрагентом.

Другая проблема моделей данного типа следует из предпосылки о влиянии инвестора на рыночную цену. Фактически она означает, что ценовой процесс актива должен учитывать влияние сделок, проведенных всеми участниками рынка. В таком случае модель должна анализировать поведение всех индивидов на рынке, что делает ее чрезвычайно трудной как для изучения, так и для содержательной интерпретации в конкретных условиях. Кроме того, из подобных исследований следует, что инвесторы, осуществляющие покупку или продажу относительно небольших объемов актива не должны быть подвержены издержкам ликвидности, что противоречит ситуации, наблюдаемой на фондовых рынках различных стран.

Второй тип моделей, учитывающих влияние ликвидности на процесс ценообразования, исходит из схожей предпосылки о том, что цена, по которой осуществляется сделка зависит от ее объема. Фактически можно говорить о том, что в каждый конкретный момент времени существует некая кривая предложения, которая описывает зависимость цены от объема. В данных условиях участник рынка принимает определяемое указанным образом цену, поэтому после завершения сделки кривая не изменяется. Это означает, что эффект влияния объема на цену имеет место, но является временным в отличие от модели, описанной ранее. Именно данный подход и его модификация будут лежать в основе последующего исследования.

Оба способа базируются на нескольких проекциях ликвидности, которые тесно переплетаются между собой. Так, первый метод предполагает рынок актива абсолютно неупругим, поскольку фактически после совершения сделки не происходит возвращения цены к прежнему уровню, а второй, наоборот, исходит из его относительной эластичности: влияние на цену происходит только в момент торговой операции, затем значение возвращается к предыдущему уровню. Оба подхода стараются учесть также плотность, как одну из важных характеристик ликвидности, но в нестандартном ключе, рассматривая уровень переплаты (недоплаты) в прямой зависимости от объема осуществляемой сделки, а не в виде бид-аск спреда.

Следует заметить, что оба типа моделей изначально формулировались в предпосылке о непрерывности времени в том смысле, что задержка между осуществляемыми инвесторами сделками может отсутствовать при необходимости или быть сколь угодно малой. Затем стали появляться работы, ставившие целью ослабить данное положение и посмотреть каким образом оно повлияет на результаты предыдущих авторов. В данном исследовании также будет использована более близкая к реальному положению дел предпосылка о том, что на рынке существует ненулевая задержка между моментами времени, в которые можно осуществить сделку. Несмотря на то, что существуют компании, которые вкладывают немалые деньги в развитие своей компьютерной инфраструктуры, временной процесс, на мой взгляд, едва ли можно считать непрерывным (Adler, 2012).

В следующем параграфе будут рассмотрены ключевые исследования по изучаемой проблеме, которые, по моему мнению, оказали важное влияние на процесс ее изучения.

* 1. **Обзор существующей литературы по тематике**

В данной части будет представлен обзор основных работ по проблематике ценообразования опционных контрактов с учетом ограниченной ликвидности базовых активов. Стоит заметить, что активное развитие она получила лишь в начале 2000-х годов, когда стали появляться эмпирические исследования, призванные выявить зависимость рыночных цен на опционы от ликвидности.

Одной из основополагающих работ по данной тематике является исследование Четина У., Джарроу Р. и др. (çetin U., Jarrow R., Protter P., Warachka M., 2006)*.* Авторы одними из первых предприняли попытку описать теоретические аспекты ценообразования опционов в экономике, где базовый актив не является абсолютно ликвидным.

В рамках своей работы исследователи определяют риск ликвидности как возрастание изменчивости получаемых доходностей при формировании реплицирующего портфеля или хеджировании существующего опциона. Причиной является то, что при реализации хеджирующей стратегии зачастую нельзя купить (продать) большой объем базового актива не оказав влияния при этом на рыночную цену. Кроме того, в реальном мире инвестор действует на рынках с ненулевым бид-аск спредом. Это приводит к тому, что реализация двух разных хеджирующих стратегий с одинаковым теоретическим исходом на практике может привести к совершенно различным результатам.

Авторы выдвигают гипотезу о том, что существует нетривиальная кривая предложения для базового актива, то есть она является стохастической и негоризонтальной. Из этого предположения следует, что цена зависит не только от момента времени, но и от направления сделки (покупка или продажа) и ее величины. Трейдеры вынуждены принимать цены с данной кривой предложения и никак не могут повлиять на их величину. Очевидно, что чем более ликвидным является базовый актив, тем ближе кривая предложения акции к горизонтальному виду.

Теоретическая часть работы, занимающая первые две главы, посвящена описанию модели экономики с неабсолютной ликвидностью. В частности, для сформулированных предпосылок, более приближенных к реальности по сравнению с базовой моделью Блэка – Шоулза, заново определяется понятие торговой стратегии, самофинансируемой торговой стратегии, вводятся издержки, связанные с ограничением по уровню ликвидности. Также заново, с учетом ослабления базовых условий, формулируется первая фундаментальная теорема, которая является ключевым пунктом теории ценообразования производных активов в непрерывном времени. Данная глава содержит немало технических выкладок и положений, но, тем не менее, авторы не забывают и про содержательную интерпретацию. Главным выводом исследователей является то, что если инвестор может совершать сделки с бесконечно малыми объемами базового актива и при этом у него нет задержки по времени между сделками, то есть между двумя соседними сделками может быть сколь угодный малый временной интервал, то издержек ликвидности можно полностью избежать и цены опционов, получаемые в модели Блэка – Шоулза будут верными. При этом стратегия хеджирования, предлагаемая в рамках базовой модели ценообразования опционов, уже не будет оптимальной и будет сопряжена с ненулевыми издержками ликвидности. Авторы предлагают каким образом необходимо формировать реплицирующий портфель, чтобы избежать лишних затрат.

Продолжая ослабление предпосылок модели Блэка – Шоулза, авторы лишают инвестора возможности осуществлять торговлю бесконечно малыми объемами базового актива без задержки по времени. Это положение кажется весьма логичным, с учетом того, что на биржах существуют минимальные торговые лоты[[2]](#footnote-2). Для таких положений авторы формулируют понятие *дискретной* торговой стратегии, которым активно оперируют на протяжении оставшейся части работы. Исследователи указывают на то, что при хеджировании в таких условиях, инвестор сталкивается не только с издержками ликвидности, но и с издержками аппроксимации, которые возникают из-за того, что не получается захеджировать опцион полностью. В результате торговли при сформулированных предпосылках индивид либо «*недохеджирует»* свою позицию, либо, наоборот, «*перехеджирует»*.

Далее исследователи переходят к эмпирической проверке предположений о существовании стохастической кривой предложения для базового актива и ее влиянии на цены опционов. Для этого авторы используют данные по 5 акциям, которые отличаются степенью ликвидности: General Electric (GE), International Business Machines (IBM), Federal Express (FDX), Reebok (RBK), Barnes & Noble (BKS). Также используется информация по опционам на указанные акции. В работе используются дневные данные за период с 3 января 1995 года по 31 декабря 1998 года.

Третья часть работы полностью посвящена проверке факта существования нетривиальной кривой предложения для акций. Авторы используют процедуру, впервые описанную Ли Ч. (Lee C.) и Реди М. (Ready M.) в 1991 году, для определения направления сделки. Результаты, полученные исследователями, позволяют сделать вывод о том, что стохастическая кривая предложения с ненулевым наклоном действительно характерна для изученных акций. Кроме того, по мнению авторов, цена, по которой можно осуществить сделку в рамках данной кривой экспоненциально зависит от произведения объема сделки и параметра ликвидности. Анализируя имеющиеся данные, авторы делают вывод о том, что параметр ликвидности обратно пропорционален цене базового актива в условиях абсолютной ликвидности, которая является процессом геометрического броуновского движения, аналогично базовой теории. Исследователи делают вывод о том, что это косвенно указывает на факт, что маркет-мейкеры, выставляя котировки, стараются получать фиксированный в денежном выражении доход.

В заключительных частях работы авторы, предполагая изменение цены базового актива биномиальным процессом, определяют оптимальную хеджирующую торговую стратегию, решая конкретно сформулированную задачу динамического программирования. Результаты, полученные в ходе решения поставленной задачи, указывают на то, что цена опциона при отсутствии абсолютной ликвидности и невозможности совершать сделки с бесконечно малыми объемами без задержки по времени отличается от цены, рассчитанной по модели Блэка – Шоулза. Кроме того, при хеджировании инвестор сталкивается с ненулевыми издержками ликвидности и издержками аппроксимации.

Данная работа является наиболее фундаментальной из всех написанных по данной тематике к текущему моменту. Авторам удалось не только выстроить стройную теорию, учитывающую издержки, возникающие из-за ограниченной ликвидности, но и подтвердить ее эмпирическими данными. Именно поэтому работа считается базовой по данной теме и используется всеми другими исследователями, изучающими это направление, в качестве отправной точки.

Работа Блейса М. и Проттера Ф. (Blais M., Protter P., 2010) посвящена изучению вопроса существования стохастической кривой предложения для базовых активов. В качестве теоретической базы для своей статьи исследователи используют статью Четина У., Джарроу Р. и др. (Cetin U., Jarrow R., Protter P., Warachka M., 2006)*.*

Главной целью работы является эмпирическое доказательство существования кривой предложения, необходимой для подтверждения правильности гипотез, сформулированных в теоретической части. Для этого авторы используют не стандартный метод Ли и Реди, а данные по стаканам котировок, которые им были предоставлены сотрудниками Morgan Stanley за период с 1 июля по 19 декабря 2003 года. Этот метод позволяет более точно определить сторону сделки, то есть была ли она инициирована продавцом или покупателем. Процедура Ли-Реди делает вывод о стороне на основе лишь двух котировок: лучшей цены на покупку (best bid) и лучшей цены на продажу (best ask). Стаканы котировок, используемые авторами данного исследования, содержат до десяти цен на покупку и продажу для каждой анализируемой акции в каждый момент времени. Таким образом, обладая большей информацией о заявках, авторы могут точнее идентифицировать направление каждой сделки. Также на основе данных о наполненности стаканов котировок (доступны ли десять лучших цен на покупку и продажу постоянно, или только в наиболее активные часы торговли) было проведено начальное деление акций по степени ликвидности.

Используя полученные данные, исследователи тестируют гипотезу о том, что для наиболее ликвидных акций кривая предложения имеет линейный вид, но при этом не является горизонтальной, то есть имеет некий стохастический наклон. Оценка коэффициентов регрессий позволила сделать вывод, что на 1% уровне значимости данное утверждение справедливо для 1937 из 2066 (93,8%) анализируемых в этом пункте акций.

Далее отбирая самые ликвидные акции, авторам удалось обнаружить, что для 82,6% из выбранных ценных бумаг линейная форма кривой предложения оказывается наиболее подходящей. В частности, были отвергнуты функции с квадратичными и кубическими членами.

Анализ менее ликвидных акций позволил обнаружить, что для описания кривой предложения лучше всего подходит кусочно-линейная функция с разрывом в нуле. Другими словами, для таких акций существует две различных кривых предложения: для покупки и продажи.

В заключительной части авторы строят комплексную меру ликвидности , которая учитывает:

* наполненность стакана за изучаемый промежуток времени;
* вид кривой предложения наиболее подходящий для описания информации, содержащейся в стакане;
* среднюю величину бид-аск спреда, характерную для данной бумаги.

С помощью построенного показателя исследователи делают вывод о том, что на периоде с 14 по 18 марта 2003 года лишь 12% акций из общей выборки, предоставленной сотрудниками Morgan Stanley, могут считаться ликвидными, то есть у них значение выше 0.5. Результаты анализа 1218 акций на указанном временном промежутке представлены в таблице 1.

**Таблица 1.** Распределение изучаемых акций в зависимости от значения меры ликвидности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Интервал  | Число акций | Процент от общего количества |
|  | 135 | 11.1 |
|  | 895 | 74.1 |
|  | 39 | 3.2 |
|  | 76 | 6.3 |
|  | 71 | 5.8 |

**Источник.** (Blais, Protter, 2010).

Также используя несложные неравенства, авторы показывают, что наличие нетривиальной кривой предложения действительно приводит к увеличению цен опционов из-за возникновения издержек ликвидности.

Основным итогом данной работы является эмпирическое доказательство существования стохастической кривой предложения для акций на американском рынке. Одной из заслуг исследователей, безусловно, можно считать использование более точного метода по сравнению с широко распространенной процедурой Ли-Реди. Авторы показали, что для описания кривой предложения наиболее ликвидных акций лучше всего подходит линейная функция, а менее ликвидных – кусочно-линейная. Полученные результаты позволили подтвердить на реальных данных основополагающую гипотезу теории ценообразования опционов в условиях ограниченной ликвидности базового актива, развитую в работе Четина У., Джарроу Р. и др. (çetin U., Jarrow R., Protter P., Warachka M., 2006)*.*

Авторы исследования *«Numerical Solutions of Option Pricing Model with Liquidity Risk»* Ли (Lee J.) и Ким (Kim S.) используют другую технику для введения ликвидности базового актива в модель ценообразования опционов. Ключевым пунктом в их работе является утверждение, что проводимые участниками рынка сделки оказывают непосредственное влияние на цену актива. Исследователи вводят параметр ликвидности, представляющий из себя величину обратную частной производной рыночной цены актива ( по объему торгов (:

Таким образом, уравнение, описывающее динамику цены базового актива, принимает следующий вид:

 – ожидаемая доходность базового актива, – случайная величина со стандартным нормальным распределением, – волатильность базового актива, – позиция в активе.

Исходя из данной формулировки и ряда других стандартных условий, авторы получают модифицированное уравнение Блэка-Шоулза для определения цены производного финансового инструмента:

 – стоимость дериватива, – безрисковая процентная ставка, Следует отметить, что одной из предпосылок авторов работы является возможность осуществления сделок в непрерывном времени.

Вторая часть исследования посвящена попытке оценить стоимость европейского колл опциона в реальных условиях. Для этого авторы вводят ряд упрощающих предпосылок, позволяющих найти решение указанного ранее уравнения с помощью численных методов.

Полученные результаты исследователи сравнивают с ценами опционов на индекс KOSPI200. В 50% случаев рассчитанная авторами цена оказалась в интервале между максимальным и минимальным значениями за день. Однако следует заметить, далеко не во все анализируемые дни, данные цены различаются. Это может косвенно свидетельствовать о том, что данные опционы сами по себе являются слабо торгуемыми. В связи с этим было бы интересно проверить представленный в исследовании метод на примере более «живых» инструментов.

Совместная работа Ку, Ли и Жу (Ku, Lee, Zhu, 2012) представляет особый интерес в связи с тем, что авторы предпринимают попытку изучить вопрос хеджирования европейских опционов с учетом издержек, возникающих из-за ограниченной ликвидности акций, и дискретности времени. Предполагается, что у инвестора существует ненулевая задержка между моментами осуществления соседних сделок.

Авторы используют в качестве базовой модель Четина и Джарроу 2006 года, корректируя основные положения с учетом дискретности времени. Вслед за авторами базовой модели исследователи рассматривают кривую предложения базового актива вида , где – объем сделки, а – гладкая возрастающая функция, такая, что . Далее они корректируют дифференциальное уравнение Блэка-Шоулза для определения цены европейского опциона колл в рамках сформулированных предпосылок. Безрисковая процентная ставка предполагается нулевой. В таких предпосылках уравнение принимает следующий вид:

все обозначения аналогичны использованным в работе Ли и Кима (Lee, Kim, 2008)*.*

 Затем авторы показывают, что при использовании обычной стратегии дельта-хеджа цены платежного обязательства, полученной при решении сформулированного уравнения, ошибка хеджирования, включающая в себя, в том числе и издержки ликвидности, стремится к нулю при увеличении частоты сделок. С помощью числовых примеров авторы указывают, что при осуществлении сделок ежедневно ошибка оказывается меньше, чем в случае хеджирования раз в неделю.

Кроме того, исследователи и при помощи численных методов, подобно авторам предыдущей работы, стараются определить приблизительное аналитическое решение. Дополнительная ценность исследования заключается в том, что аналогичные аргументы могут быть использованы при определении цен различных деривативов, а не только европейских опционов колл, изученных в работе.

Работа Четина (çetin U.), Сонера (Soner H.) и Таузи (Touzi N.) *«Option hedging for small investors under liquidity costs»* посвящена изучению влияния ликвидности через негоризонтальную кривую предложения базового актива на хеджирование опционов инвесторами, которые не способны оказать значительного влияния на цену.

Начальные предпосылки модели совпадают с сформулированными в исследовании Четина, Джарроу и др. (çetin U., Jarrow R., Protter P., Warachka M., 2006). Главными отличиями является измененный вид допустимых торговых стратегий, а также введение индекса ликвидности базового актива , где – кривая предложения. Процесс, описывающий количество акций у инвестора в момент времени задается сложной формой, которая позволяла бы учитывать скачки, сохраняя при этом конечность квадратичной вариации. Как указывают авторы, эти утверждения подтверждаются эмпирическими данными и работами других исследователей. В итоге, выводы работы Четина, Джарроу и др. (çetin U., Jarrow R., Protter P., Warachka M., 2006)относительно правильности цен опционов, рассчитываемых по формуле Блэка-Шоулза, в условиях непрерывного времени опровергаются. Исследователи показывают, что даже в таких предпосылках при правильно сформулированных торговых стратегиях издержки ликвидности неизбежны и оказывают влияние на цены производных инструментов.

Затем, используя метод динамического программирования, Четин и др. выводят уравнение для определения стоимости опциона в конкретный момент времени:

 – волатильность базового актива, – гамма опциона, а – цена на кривой предложения для нулевого объема сделки.

Также авторы сравнивают два вида хеджирующих стратегий в заданных моделью условиях с кривой предложения вида: «buy-and-hold» и динамическое хеджирование. Фактически у инвестора есть выбор между двумя альтернативами, предлагаемыми стратегиями:

* нести издержки из-за несоответствия хеджирования, но избежать издержек ограниченной ликвидности;
* реплицировать опцион динамически, но нести издержки из-за существования кривой предложения.

Результаты, полученные авторами позволяют утверждать, что в зависимости от рыночных условий, в первую очередь от уровня ликвидности, выгоднее использовать тот или иной метод хеджирования опционов, что кажется весьма логичным.

В своей работе Гекай С. (Gökay, 2011) систематизирует информацию по вопросам ценообразования и хеджирования опционов в дискретном времени на рынке с учетом ограниченной ликвидности базового актива.

Первая часть исследования посвящена обзору основных существующих моделей ликвидности. Основной упор сделан на двух подходах, описанных в параграфе 1.2 данной работы. Кроме того, анализируется вопрос оптимального исполнения некоторого приказа на рынке с ограниченным уровнем ликвидности за фиксированный промежуток времени. По каждой из рассматриваемых моделей авторы разбирают внушительный список публикаций, посвященных как изучению вопроса в непрерывном, так и в дискретном времени.

Во второй части работы исследуется вопрос ценообразования на биномиальном рынке с ограниченной ликвидностью в дискретном времени. Изначально вводится стандартная предпосылка о гладкой, неубывающей по параметру объема сделки кривой предложения на рисковый актив. Далее предполагается, что инвестор может осуществлять какие-либо сделки, изменяющие его портфель только через интервалы времени , причем , где – срок исполнения опциона. Также вводится вероятностное пространство вида , где .

Далее авторы занимаются изучением вопросов, возникающих при репликации обычных европейских и барьерных опционов колл. В частности, рассматривается существование решения, необходимые ограничения. Авторы формулируют задачу динамического программирования, которая должна быть решена для определения стоимости опциона. Она состоит в минимизации начальной стоимости портфеля, необходимого для репликации дериватива. Поскольку количество ограничений увеличивается с ростом числа анализируемых периодов до экспирации опциона (это связано с тем, что решение задачи, зависит от значения оптимизируемого параметра на предыдущем этапе), то авторы переформулируют задачу следующим образом: для некого периода задается стоимость портфеля и определяется какая минимальная позиция в акциях необходима, для того чтобы реплицировать стоимость производного инструмента. Эта процедура проводится для определенного числа значений стоимости портфеля, затем определяется минимальное значение, с помощью которого получается реплицирующая стоимость опциона. Авторы показывают, что в цене присутствует влияние фактора ликвидности.

Переходя к лимитам, авторы распространяют выводы на модель с непрерывным временем, показывая, что издержки ликвидности остаются и в данной формулировке. Это подтверждает результаты, полученные в частности Четином и др. (çetin, Soner, Touzi, 2010)*.* Далее, пользуюсь результатами данного исследования, Гекай (Gökay, 2011) изучает вопросы границ цены опциона в непрерывном времени.

В заключительной части автор приводит расчет стоимости репликации обычного европейского и барьерного опционов, основываясь на линейной кривой предложения на базовый актив с постоянным параметром неликвидности (отвечающим за уровень наклона) . Также исследователь описывает хеджирующие стратегии для двух указанных типов производных инструментов. Автор обнаруживает, что оптимальная стратегия репликации не всегда соответствует принципу дельта-хеджирования, который часто требует значительных изменений позиции в акциях при определенных рыночных колебаниях. Также анализируется зависимость стоимости опционов разных типов от параметра неликвидности. Автор находят подтверждение разумному выводу о том, что с увеличением данного показателя растут издержки инвестора, желающего захеджировать свою позицию. Другим важным выводом является результат, что издержки ликвидности для барьерного опциона колл выше, чем для обычного европейского опциона.

Работаавторов Чоу Р., Чанга С.-Л. и др. (Chou R.K., Chung S.-L., Hsiao Y.-J., Wang Y.-H., 2011) особенно интересна с точки зрения эмпирической проверки связи цен опционов с факторами, характеризующими ликвидность того или иного контракта. В статье рассматривается влияние ликвидности базовых активов и самих опционов на уровни подразумеваемой волатильности, а значит и на цены опционов.

Авторы используют данные по 30 акциям, использующимся при расчете промышленного индекса Доу-Джонса по состоянию на 31 декабря 2004 года, и по опционам на них. Данные собраны на дневной основе из базы Ivy DB OptionMetrics за период с 1 января 2001 по 31 декабря 2004 года. Авторы изучают влияние ликвидности и на всю кривую волатильности, поэтому в отличие от предыдущих исследований по данной тематике, используют не только опционы на деньгах, но и на других страйках.

В качестве факторов, отражающих уровень ликвидности акций и опционов, исследователи используют широкий набор характеристик, которые представлены в таблице 2.

**Таблица 2.** Показатели ликвидности акций и опционов, использованные для анализа в статье.

|  |  |
| --- | --- |
| **Показатель ликвидности** | **Описание** |
| *Акции* |  |
| Суммарный объем торгов (**VOL**) | Объем торгов акциями в течение дня. |
| Число сделок (**NT**) | Общее количество сделок за день. |
| Средний размер сделки (**ATS**) |  |
| Абсолютный дисбаланс заявок (**AOI**) | Разница между количество заявок на покупку и продажу в течение дня. |
| Средний пропорциональный котируемый спред (**AQS**) |  |
| Средний пропорциональный эффективный спред (**AES**) |  |
| *Опционы* |  |
| Объем торгов (**OVOL**) | Объем торгов опционами в течение дня. |
| Объем торгов в денежном выражении (**DVOL**) |  |
| Пропорциональный бид-аск спред (**OAQS**) |  |
| Открытый интерес (**OI**) | Величина открытого интереса по опционам. |

**Источник.** (Chou R.K., Chung S.-L., Hsiao Y.-J., Wang Y.-H., 2011).

Их можно разделить на две группы: основанные на сделках и заявках. Первая группа является мерой ликвидности *ex post,* поскольку отражает результаты уже совершенных сделок. При этом нет никаких причин утверждать, что в дальнейшем инвесторы будут продолжать вести себя схожим образом. С другой стороны, показатели, основанные на заявках, все чаще воспринимаются как более надежные оценки[[3]](#footnote-3). Первые три меры (**VOL**, **NT**, **ATS**) относятся к характеристикам, основанным на сделках, а последние три – к мерам, основанным на заявках. В качестве показателей, описывающих ликвидность опционов, выбраны объем торгов данным инструментом в абсолютном (**OVOL**) и денежном выражении (**DVOL**). Также используется показатель открытого интереса по опционам (**OI**), который показывает общее количество нереализованных длинных и коротких позиций в данном контракте в исследуемый момент времени. Его колебания позволяют судить о том, насколько часто происходят сделки с тем или иным опционом и связаны они с покупкой или продажей актива.

Также при проведении тестов авторы использовали ряд контрольных переменных, таких как размер фирмы, ее коэффициент рычага, долю систематического риска и другие.

Изначально исследователи строят регрессии, в которые в качестве объясняющих переменных включают контрольные переменные и один из показателей ликвидности. Используя значимость коэффициентов и как критерии были выбраны показатели ликвидности обладающие наибольшим влиянием на волатильность, а значит и на цены опционов: объем торгов (**VOL**), средний размер сделки (**ATS**), средний пропорциональный котируемый спред (**AQS**), объем торгов опционами в денежном выражении (**DVOL**), пропорциональный бид-аск спред для опционов (**OAQS**) и открытый интерес (**OI**). Затем была построены регрессии для разных лет, в которые наряду с контрольными переменными были одновременно включены все отобранные меры ликвидности. Благодарю этому авторам удалось обнаружить, что средний пропорциональный котируемый спред, рассчитываемый для базовых активов, оказывает наибольшее влияние на цены изучаемых производных контрактов. Анализ регрессий для опционов с разными сроками до исполнения позволил обнаружить, что наряду с данным показателем немаловажную роль в определении величины волатильности играет и дневной объем торгов акциями, открытый интерес и пропорциональный бид-аск спред опционов. Интересным является то, что коэффициент при последних двух мерах оказался отрицательным.

Отдельная часть работы посвящена изучению влияния ликвидности базового актива и опционов на кривую волатильности. В качестве мер ликвидности были отобраны пропорциональные спреды для базового актива и опционов как продемонстрировавшие наибольшее влияние на предыдущем этапе исследования. Авторам удалось обнаружить положительное влияние данного показателя базового актива на свободный член кривой волатильности, заданной в линейном виде. Влияние ликвидности опционов на этот показатель оказалось отрицательным и значимым для опционов с любыми сроками до исполнения. На наклон кривой волатильности значимо во всех случаях влияет только показатель, рассчитанный для опционов: чем ликвиднее опцион, тем более крутой будет кривая.

Таким образом, исследование, проведенное авторами, позволило получить ряд важных выводов, на основе существующих эмпирических данных.

1. Величина подразумеваемой волатильности объясняется как ликвидностью базового актива, так и самих опционов.
2. Чем более неликвидным является базовый актив, тем больше цена опциона, а значит выше его подразумеваемая волатильность. Это связано с тем, что инвестор вынужден сталкиваться с риском ликвидности и нести издержки. Полученный вывод согласуется с теоретическими и эмпирическими результатами, полученными в работе Четина и Джарроу (çetin U., Jarrow R., Protter P., Warachka M., 2006)*.*
3. Для менее ликвидных опционов характерны более низкие уровни подразумеваемой волатильности, а значит и цены. Это явление уже было описано другими авторами, в частности Амихудом и Мендельсоном (1986), и представляет собой скидку за низкий уровень ликвидности, который принимает инвестор, приобретающий данный инструмент.
4. Большая ликвидность опционов приводит к тому, что кривая подразумеваемой волатильности становится более крутой.

Работа Бреннера (Brenner M.), Элдора (Eldor R.) и Хозера (Hauser S.) *«The Price of Options Illiquidity»* является другим исследованием, в котором изучается вопрос зависимости цены опционов от его же показателей ликвидности. Авторы использовали данные по валютным опционам, выпущенным Центральным Банком Израиля, торговля которыми не осуществлялась на рынке. Авторы сравнили цены данных производных инструментов с аналогичными рыночными опционами и обнаружили, что они дешевле на 21%. Это наблюдение также можно рассматривать как пример скидки за отсутствующую ликвидность, то есть за то, что инвестор не имеет возможности продать описанный контракт.

* 1. **Место данного исследования в научном окружении**

В этом параграфе мы систематизируем описанные ранее статьи и определим нишу, которую должна заполнить данная работа.

**Таблица 3.** Сравнение основных работ по тематике исследования.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Работа** | **Ликвидность актива** | **Проекция ликвидности** | **Подход к построению модели** | **Тип модели ценообразования** |
| **(çetin, Jarrow)** | Акция | П2, У | 2 | Стохастическая, дискретная |
| **(Blais, Protter)** | Акция | П1, П2, У | 2 | - |
| **(Lee, Kim)** | Акция | У | 1 | Стохастическая |
| **(Ku, Lee, Zhu)** | Акция | П2, У | 2 | Стохастическая, дискретная |
| **(çetin, Soner)** | Акция | П2, У | 2 | Стохастическая |
| **(Gökay)** | Акция | П2, У | 1, 2 | Стохастическая, Дискретная |
| **(Chou, Chung)** | Акция, Опцион | П1 | 2 | - |

**Источник.** Составлено автором.

Главные параметры проанализированных статей представлены в таблице 3. В первом столбце представлены авторы соответствующей работы. Вторая колонка таблицы отражает для каких активов в указанном исследовании вводилась предпосылка ограниченного уровня ликвидности. Как видно, в подавляющем количестве работ указанное несовершенство рынка рассматривалось для базового актива опциона, что соответствует заявленной цели данного исследования и косвенно подтверждает мысль о том, что именно данная ситуация представляет особенный интерес. Третий столбец указывает какие проекции ликвидности изучались в соответствующей научной статье. Здесь У – упругость, П1 – плотность в стандартном понимании, рассчитанная как бид-аск спред, П2 – плотность, представляющая из себя переплату (недоплату) инвестора при осуществлении сделки, которая определяется исходя из существования кривой предложения для акции в каждый момент времени и отличной от горизонтальной формы. Большинство исследований акцентирует свое внимание именно на упругости и нестандартном показателе плотности. Последняя представленная в таблице работа ставит своей целью проверку ряда теоретических положений, сформулированных в предыдущих статьях, и поэтому старается определить какие показатели могут быть использованы для учета влияния ограниченной ликвидности акции и (или) опциона на волатильность рассматриваемого производного инструмента. Результат, полученный авторами, указывает, что с этой задачей лучше всего справляется пропорциональный бид-аск спред.

В целом такой выбор проекций ликвидности в исследованиях по тематике связан, на мой взгляд, в первую очередь с тем, что их относительно просто определить численно для конкретного рынка и достаточно просто учесть их влияние в ценовом процессе базового актива, который играет ключевую роль в определении стоимости опциона. Как отмечает, Теплова в своей работе (Теплова, 2014), широта и глубина рынка определяются на основе биржевого стакана для данной бумаги и при этом меняются как в течение дня, так и по дням. Фактически это означает, что исследователь, который захочет использовать указанные показатели в качестве отправной точки анализа ликвидности будет вынужден собрать большой объем данных по внутридневным котировкам изучаемого актива, что представляется трудоемкой и сложно реализуемой задачей. Другой проблемой, с которой столкнется автор в такой ситуации, будет описание метода, позволяющего однозначно определить влияние изменения широты или глубины рынка на цену осуществления конкретной сделки с рассматриваемым активом в изучаемый момент времени. Аналогичные трудности возникнут и в случае построения теории на основе частоты совершения сделок. В этом смысле показатели плотности и упругости являются идеальными, поскольку при определенных предпосылках их можно определить без использования стакана по бумаге и можно однозначно задать влияние данных проекций на цену осуществления хеджирующей сделки с акцией в каждый момент времени. Однако, на мой взгляд, проанализированные исследования по изучаемой тематике незаслуженно обходят стороной стандартный показатель плотности рынка, который был учтен лишь в 2 из 7 работ, приведенных в таблице 3. Это тем более удивительно с учетом результатов, полученных Блейсом и Проттером (Blais, Protter, 2010) в своей статье относительно доли акций, который могут считаться ликвидными на американском рынке.

Четвертый столбец таблицы 3 отражает какой подход из представленных в части 1.2 использовали авторы исследования для включения ограничений по уровню ликвидности базового актива в модель ценообразования опционных контрактов. Большинство работ, представленных в рамках обзора литературы выбрали метод, согласно которому влияние сделки на цену носит лишь кратковременный характер, однако, это не означает, что он намного популярнее. Так, в обзоре Гекая (Gökay, 2011) представлен целый список работ, основывающихся на первом подходе. В то же время перечень недостатков этого пути, представленный ранее в этой главе, позволяет сделать предположение о предпочтительности выбора именно второго подхода для данного исследования.

Наконец последняя колонка таблицы, представленной ранее, показывает какой тип модели ценообразования реализуется в соответствующей работе. Стохастический подход базируется на предпосылке о непрерывности времени, использует первую и вторую фундаментальные теоремы финансовой математики для того, чтобы переформулировать стандартное уравнение ценообразования условного платежного обязательства (производного инструмента) Блэка-Шоулза для учета ограниченного уровня ликвидности базового актива. Результаты исследователей, производящих моделирование таким образом, отличаются. Ряд авторов говорит о том, что издержки ограниченной ликвидности могут быть сведены на нет даже в таких условиях, другие вводя дополнительные условия опровергают данный вывод. Результаты дискретных моделей более однозначны: издержки, возникающее вследствие нарушения предпосылки абсолютной ликвидности акций, являющихся базовыми активами для опционов, ведут к тому, что цена этих деривативов отличается от значений, рассчитанных в стандартных условиях.

Анализ литературы по тематике данной работы позволяет утверждать, что несмотря на относительно недавно возникший интерес к проблеме влияния ликвидности на процесс ценообразования производных финансовых инструментов, а именно опционов, существует определенное количество исследований, в которых авторы ставят целью изучение этой проблемы. Однако, по моему мнению, данный вопрос изучен не до конца, в частности ряд предпосылок предыдущих работ представляются весьма строгими и зачастую не соответствующими реальному положению дел на фондовых рынках. Поэтому в следующей главе будет представлена модель, целью которой является изучение вопроса ценообразования опционов в дискретном времени с учетом кривой предложения на базовый актив (акции), характеризующейся существованием бид-аск спреда. По моему мнению, данная формулировка позволит изучить влияние ликвидности на цены опционов в условиях, с которыми сталкиваются индивиды, осуществляющие торговлю на рынках.

**Глава 2. Модель ценообразования опционов, учитывающая ликвидность базового актива**

* 1. **Базовая модель Четина и Джарроу**

В данной части будет рассмотрена основная модель, представленная Четином, Джарроу и др. в работе (çetin U., Jarrow R., Protter P., Warachka M., 2006)*.* Данная теория использует ряд предпосылок в качестве базы для дальнейшего анализа. Предварительно обсудим их, а затем рассмотрим полученные авторами результаты.

На рынке существует два вида активов: безрисковый (облигация или депозит), приносящий гарантированный процент и рисковый (акция, в рамках данной формулировки). Одним из основных предположений модели является утверждение о том, что существует непрерывная и дважды дифференцируемая () кривая предложения для рискового актива. Инвесторы при осуществлении сделок вынуждены принимать цены, описываемые данной функцией. Получается, что в каждый конкретный момент вместо единственного значения, индивид, работающий на рынке, имеет кривую, ставящую в зависимость цену от объема сделки. Как уже обсуждалось ранее, такое построение модели предполагает временное влияние величины торговой операции на изменение стоимости акций, поскольку внутри одного момента времени не происходит изменения кривой вне зависимости от объема и количества прошедших сделок.

Другой важной предпосылкой является утверждение о непрерывности времени. Благодаря ей авторы показывают, что можно полностью исключить влияние издержек ограниченной ликвидности, реализуя непрерывную стратегию хеджирования с конечной дисперсией.

В качестве отправной точки авторы используют вероятностное пространство с фильтрацией, удовлетворяющее стандартным условиям: , где – фиксированный момент времени, – вероятностная мера. Как обычно считается, что Также предполагается, что акция не платит дивидендов, а безрисковая процентная ставка нулевая на протяжении всего периода времени

Рассмотрим случайного инвестора. В каждый момент времени он может осуществить сделку с акциями по цене в состоянии При этом означает покупку, а – продажу.

Авторы вводят ряд дополнительных предпосылок относительно кривой предложения, необходимых для дальнейшего анализа:

1. -измерима и неотрицательна;
2. Для почти наверное верно, что почти везде в ;
3. и непрерывны в , кривая является непрерывной по второму аргументу;
4. является семимартингалом;
5. имеет непрерывные траектории, включая нулевой момент времени, для всех значений

Все условия представляются весьма очевидными, в частности второй пункт указывает, что большие объемы акций будут приобретены по более высокой цене. То есть объем торговой операции влияет на величину переплаты (недоплаты) при ее осуществлении.

Далее определяются торговые стратегии, доступные инвестору на рынке. Пусть – количество акций у инвестора в момент времени , – позиция на денежном рынке (то есть стоимость приобретенных облигаций, обеспечивающих безрисковую процентную ставку, или сумма денежных средств, размещенных на депозите). Дополнительно обозначим как момент времени, в который происходит полная ликвидация позиции в базовом активе. Тогда торговая стратегия может быть записана в виде , причем и такие -измеримые процессы, что и , а

Поскольку одной из целей исследователей является проверка справедливости первой и второй фундаментальных теорем финансовой математики в сформулированных условиях для дальнейшего перехода к вопросу ценообразования, то необходимо определить понятие самофинансируемой стратегии. Стратегия называется самофинансируемой, если выполнены следующие условия:

1. процесс непрерывный справа и имеющий лимит слева (*càdlàg*) для всех значений , если . Иначе, процесс непрерывный справа и имеющий лимит слева (*càdlàg*) с конечной квадратичной вариацией ;
2. ;
3. Для любых значений справедливо,

Условие (а) необходимо для того, чтобы выражение, записанное в пункте (в), было определено. Дело в том, что последние два члена данного выражения всегда неположительные, однако, при определенных спецификациях процесса могут быть равны минус бесконечности. Классическая теория не требует введения данных ограничений, поскольку рынки считаются конкурентными и не подразумевают наличия каких-либо издержек. В качестве примера процесса позиции в акциях, который допустим в базовой теории и не допустим в сформулированной теории, можно представить для некой константы , динамика описывается броуновским движением. В данном случае, каждый раз, когда значение превышает происходит прыжок значения с 0 до 1. Таких моментов может быть неограниченное количество, это ведет к тому, что квадратичная вариация, а значит и издержки ограниченной ликвидности, реализующиеся при изменении позиции в акциях, становятся бесконечностью.

Условие (б) требует нулевых инвестиций в момент времени , что, представляется логичным, в силу того, что стратегия должна быть самофинансируемой.

Условие (в) задает стоимость стратегии в произвольный момент . Остановимся на данном пункте подробнее. Сумма первых двух членов, как уже отмечалось ранее, представляет стоимость портфеля в начальный период времени. Третий член представляет из себя накопленные торговые прибыли (убытки) позиции в акциях к моменту , рассчитанные по цене нулевого объема. Четвертый элемент отвечает за стоимость поддержания позиции в базовом активе. Последние два члена показывает какие издержки несет инвестор из-за отсутствия горизонтальной кривой предложения на акции при осуществлении дискретных и непрерывных изменений позиции, соответственно. Нетрудно догадаться, что именно эти элементы улавливают издержки ликвидности, с которыми вынужден столкнуться работающий на рынке индивид:

Очевидно, что . Кроме того, и является неубывающей по функцией, это прямо следует из второй предпосылки ценового процесса.

Важным представляется вопрос определения рыночной стоимости портфеля, сформированного при следовании стратегии, в конкретный момент времени, а именно цены базового актива, которая должна использоваться для этой процедуры. Можно определить, как минимум три экономически обоснованных значения:

1. Немедленная ликвидационная стоимость стратегии будет ;
2. Аккумулированная стоимость создания портфеля для стратегии: ;
3. Стоимость портфеля, рассчитанная по цене нулевого объема:

Последнее значение используется авторами в дальнейшем описании модели в качестве рыночной переоценки торговой стратегии . Оно отражает стоимость портфеля в рамках базовой теории Блэка-Шоулза, поскольку используется значение цены для нулевого объема сделки.

Дальше Четин и Джарроу переходят к непосредственному анализу модели в заданных предпосылках. На основе полученных выводов авторы формулируют первую и вторую фундаментальные теоремы, необходимые для определения цены производного финансового инструмента в непрерывном времени.

**Первая фундаментальная теорема.**

Рынок безарбитражный тогда и только тогда, когда существует такая вероятностная мера , что является -локальным мартингалом.

**Вторая фундаментальная теорема.**

Если существует единственная эквивалентная вероятностная мера , такая, что является -локальным мартингалом, то рынок является аппроксимировано полным.

На основе этих теорем авторы показывают, что цены опционных контрактов не отличаются от значений, предлагаемых базовой теории. К примеру, если существует некий опцион , то его цена в текущий момент является математическим ожиданием по мере В противном случае, можно создать арбитражную стратегию в зависимости от отклонения от данного значения.

Полученный авторами вывод базируется на возможности репликации рассматриваемого финансового инструмента с помощью стратегии с непрерывной торговлей акциями и конечной вариацией. Применяя данную стратегию инвестор сформирует портфель, стоимость которого по вероятности будет сходиться к значению Это автоматически означает, что в предельном случае указанный метод позволит полностью избежать издержек ликвидности.

У описанной модели есть ряд недостатков. Один из них, на который обратили внимание сами авторы, заключается в том, что фактически предполагается существование кривой предложения только на базовый актив, но не на опционы. Это связано с тем, что для любого рассматриваемого в этом подходе дериватива существует единственная цена, определяемая как математическое ожидание по уникальной мартингальной мере, иначе будут возникать арбитражные возможности. Причиной такого результата является возможность осуществлять непрерывную торговлю акциями (то есть без задержки по времени между сделками). Благодаря этому издержки ограниченной ликвидности существуют, но, используя стратегию с конечной вариацией, их можно свести к нулю (в пределе). Это обращает внимание на другой недостаток – возможность существования в рамках модели непрерывных стратегий. Как отмечают Четин и Джарроу, на практике такие подходы к торговле базовым активом нереализуемы, инвесторы аппроксимируют их более простыми, дискретными аналогами. Кроме того, отдельного обсуждения требует вид кривой предложения базового актива, который играет определенную роль в процессе ценообразования опционов.

Модель, которая будет представлена в следующей части исследования, призвана ослабить излишне жесткие или неправдоподобные, по моему мнению, предпосылки теории, описанной выше. В качестве отправной точки будет использоваться работа Четина и Джарроу (çetin U., Jarrow R., Protter P., Warachka M., 2006), которая за небольшое время со своего появления приобрела огромную популярность среди людей занимающихся изучением данной проблемы.

* 1. **Дискретная модель ценообразования опционов с учетом фактора ликвидности**

Будем рассматривать рынок, на котором существует два типа активов: безрисковый, приносящий некую гарантированную ставку (без нарушения общности выводов далее будем считать, что ), и рисковый (в данной формулировке будем полагать, что это акции некой компании, торгующиеся на фондовой бирже). В рамках модели изучается фиксированный промежуток времени Инвесторы могут осуществлять какие-либо действия, в том числе покупку (продажу) активов только через определенные интервалы причем . Дискретный подход к рассмотрению временного процесса, на мой взгляд, является более правильным, поскольку именно в таких условиях инвесторы осуществляют операции на финансовых рынках.

Также введем стандартное вероятностное пространство с фильтрацией , Вслед за работой Гекая будем рассматривать биномиальный рынок для рискового актива, тогда пространство элементарных событий будет иметь следующий вид:

В таком случае -алгебра может быть записана как , а для вероятностной меры справедливо

Ключевым для формулируемой модели является учет ограниченной ликвидности базового актива, характерной для рассматриваемого рынка. Как обсуждалось ранее, наиболее удобным способом для отражения проекций эластичности рынка и его плотности является построение кривой предложения для базового актива. При этом авторы подавляющего большинства теоретических работ предпочитают концентрироваться на изучении плотности рынка исключительно с позиций влияния объема и направления сделки на величину переплаты (недоплаты), игнорируя рассмотрение данного параметра в самой стандартной формулировке – бид-аск спреда. На мой взгляд, этот фактор является существенным, поэтому будет отражен в формулируемой модели.

Осуществляя сделку с акциями, инвестор в каждый момент времени сталкивается с негоризонтальной кривой предложения следующего вида:

 *(1)*

Предполагается, что означает продажу, а покупку базового актива. Коэффициенты и отвечают за наклоны каждой из частей кривой и могут изменяться с течением времени. Величина может трактоваться как бид-аск спред, с которым сталкивается инвестор торгующий на финансовом рынке.



**Рисунок 1.** Вид кривой предложения для .

Так, выводы, полученные Блейсом и Проттером (Blais, Protter, 2010) позволяют утверждать, что на американском рынке у акций существуют кривые предложения (для 93,8% бумаг из числа изученных в исследовании). С другой стороны 88% из 1218 использованных для данного этапа анализа акций, как признают сами авторы, могут считаться неликвидными в смысле плотности рынка для них, а значит для них логичнее представлять эту зависимость в виде двух линейных функций с разными наклонами и разрывом в точке Представляется, что поскольку на американском, развитом финансовом рынке для большинства акций характерна кусочно-линейная кривая предложения, то логично в модели использовать именно данный вид для описания зависимости цены сделки от ее объема. Кроме того, устанавливая , а , кусочно-линейная функция может быть легко трансформирована в обычную линейную функцию, которая, по мнению исследователей*,* отлично подходит для описания кривой предложения ликвидных бумаг.

Теперь рассмотрим вопрос динамики цены акций. Как было указано ранее, рынок для рискового актива является биномиальным. Если считать, что существуют параметры изменения цены , такие что , то динамика цен акций может быть представлена в виде:

Будем считать, что и . Однако, использование именно таких значений не является строгим условием, можно установить другие параметры для биномиальной модели.

Введем следующие обозначения для описания торговых стратегий инвестора: – процесс, отражающий количество акций, находящихся во владении у индивида в момент времени ; – процесс, описывающий позицию инвестора в безрисковом активе в момент времени . Данные процессы измеримы относительно фильтрации и неизменны на временном промежутке Это условие подтверждает дискретность времени, а именно невозможность изменения позиции с некой частотой . Также предполагается, что перед началом осуществления торговых операций у инвестора нет позиции ни в одном из активов: , а в последний момент времени он закрывает позицию в акциях целиком, поскольку ему больше нет необходимости хеджироваться: .

Процесс, описывающий стоимость портфеля активов индивида на рынке, представлен следующей зависимостью Вслед за Четином, Джарроу и некоторыми другими исследователями будем использовать цену нулевого объема для переоценки сформированного инвестором портфеля. Это кажется логичным, поскольку, как упоминалось ранее, данное условие позволит удобно производить сравнение с результатами стандартных моделей ценообразования опционов.

Торговая стратегия может считаться самофинансируемой, если дополнительно выполнены следующие условия:

Первое из указанных утверждений показывает, что формирование стратегии не требует средств. Второе описывает зависимость денежных средств, размещенных в момент времени в безрисковый актив. Третье слагаемое данного выражения представляет накопленные торговые прибыли (убытки) позиции в акциях к моменту , рассчитанные по цене нулевого объема. Четвертый элемент показывает переоценку располагаемого количества базового актива. Последний член характеризует убытки, с которыми сталкивается инвестор из-за того, что на рынке существует негоризонтальная кривая предложения.

Таким образом, издержки ликвидности в момент времени характеризуются выражением:

Теперь перейдем к рассмотрению непосредственно производных финансовых инструментов. Пусть задан некий европейский опцион колл со страйком и временем до экспирации . Тогда, если обозначить через стоимость данного финансового инструмента в начальный момент времени, то ошибка хеджирования опциона, включающая издержки ликвидности, может быть записана в форме:

В сформулированных условиях, как отмечают Четин и Джарроу в своей работе 2006 годарынок больше не является полным, а значит стоимость репликации условного платежного обязательства зависит от стратегий хеджирования. В этом свете важно вспомнить принципы определения цен деривативов. Одним из них является следующее утверждение: если существует такой портфель , что с вероятностью 1 выполняется равенство , то данный портфель является хеджирующим или реплицирующим портфелем. Исходя из соображений отсутствия арбитража разумно предположить, что для . Поскольку рынок не полный, то такой портфель необязательно существует. Задача состоит в том, чтобы найти торговую стратегию, которая наилучшим образом будет реплицировать европейский опцион колл, который требуется оценить. Тогда стоимость портфеля, формируемого в рамках данного процесса, можно будет считать ценой данного условного платежного обязательства.

Допустим, что существует самофинансируемая торговая стратегия стоимостью в момент времени . Она генерирует процесс, описывающий ее стоимость на протяжении последующего существования . Подход, представленный в работе Гекая (Gökay, 2011), заключается в определении стоимости супер-репликации опциона , где . Указанный метод является, на мой взгляд, справедливым для применения к проблеме определения цены заданного условного платежного обязательства, поскольку позволит определить стоимость портфеля, который гарантированно реплицирует опцион в каждый момент времени. Сформулируем для данного подхода задачу динамического программирования, которую требуется решить.

Так как процесс зависит от прошлых значений, то количество ограничений, возникающих при супер-репликации опциона, увеличивается с течением времени. Поэтому задача становится слишком сложной, особенно, если параметр небольшой. Идея, представленная в исследовании (Gökay, 2011), заключается в том, чтобы возвращаться от конца к началу, при этом в каждый рассматриваемый момент времени задается значение позиции инвестора в акциях и для указанных условий вычисляется, сколько минимум должен стоить портфель активов, чтобы выполнялось условие репликации платежного обязательства:

*(2)*

Задача динамического программирования состоит в определении значения данного выражения для каждого рассматриваемого этапа эволюции биномиального дерева цены. Эта процедура проводится большое количество раз для разных условий объема позиции в акциях инвестора в начале изучаемого периода времени, и затем определяется стоимость супер-репликации опциона на конкретном этапе, путем минимизации по параметру :

 *(3)*

Данный метод предполагает введение дополнительной переменной, отсутствующей в стандартных моделях ценообразования, не учитывающих влияние фактора ликвидности. Она отражает количество акций в портфеле в момент времени . Преимуществом указанного метода является то, что он может быть применен для биномиальной модели с большим количеством шагов. К недостаткам стоит отнести необходимость большого количества вычислений для каждого этапа и метода в целом, что делает его достаточно трудоемким в применении.

Теперь обсудим некоторые теоретические вопросы, возникающие при использовании данного подхода.

**Утверждение 1.** Существует оптимальный портфель такой, что он служит решением рассматриваемой задачи динамического программирования. Для удобства введем .

**Доказательство:** Будем рассматривать изначально сформулированную задачу. Для второй проблемы доказательство проводится аналогичным образом. Обозначим , пусть также. Покажем, что. Легко заметить, что монотонно по , то есть можно утверждать, что , если выполняется . Получается, что множество является непустым для Задача заключается в том, чтобы показать также является непустым. Рассмотрим любую убывающую последовательность такую, что Тогда верно утверждение, что:

Одна часть равенства следует из свойства монотонности по параметру и факта, что для . С другой стороны, если для любых , тогда в силу непрерывности по параметру получается, что при условии, что . Получается, что непустое замкнутое множество, докажем, что оно также является ограниченным. Рассмотрим для этого эквивалентную мартингальную меру для ценового процесса акции. Покажем, что процесс ограниченный. Рассмотрим момент времени и фильтрацию :

Последняя часть утверждения справедлива в силу того, что существуют неотрицательные издержки ликвидности. С учетом биномиальной динамики изменения цены акции:

В силу того, что и неотрицательности выражения получается, что величина ограниченная. Используя индукцию можно показать, что в целом процесс является ограниченным. Из этого следует, что поскольку множества вида для являются компактными, то и множество , являющееся их пересечением, также удовлетворяет этим условиям. Напомним, что согласно предпосылке . Поскольку является замкнутым и ограниченным, можно утверждать, что существует такая стратегия , которая позволяет произвести супер-репликацию опциона.

Инвестор, осуществляя сделки с акциями в таких условиях, сталкивается с ненулевыми издержками ликвидности, которые отсутствуют в базовой модели Блэка-Шоулза. Введем функцию убытков индивида следующей формы:

Тогда функция, описывающая абсолютные убытки от проведения сделки с акциями в момент времени будет иметь вид:

Легко заметить, что данная функция представляет параболу с несимметричными ветвями (Рисунок 2), то есть она является выпуклой и непрерывной.



**Рисунок 2.** Вид функции абсолютных убытков для .

**Утверждение 2.** Функция стоимости супер-репликации опциона для заданной позиции в акциях является выпуклой по параметру .

**Доказательство:** Пусть существует параметр и . Задача состоит в том, чтобы показать, что справедливо выражение:

Обозначим Из Утверждения 1 следует, что существуют такие значения , что для :

Введем стратегию . Она принадлежит -алгебре , также как и , . Выпуклость означает, что

Стоимость самофинансируемой стратегии в момент времени можно переписать в виде зависимости от ее предыдущей стоимости:

Поэтому получается, что:

Получается, что портфель стоимостью позволяет произвести супер-репликацию опциона. Из этого следует, что функция является выпуклой по параметру .

Данное утверждение позволяет говорить о том, что решение задачи динамического программирования на каждом рассматриваемом этапе не только существует, но и является единственным, поскольку мы ищем минимальную стоимость портфеля, необходимого для репликации опциона.

В каждый момент времени стоит задача определения . Исходя из допущения, что в позиция инвестора в акциях станет в случае роста стоимости в противном случае, задача динамического программирования может быть сформулирована в следующем, явном виде:

Затем варьируя значения начальной позиции в базовом активе можно определить стоимость опциона в конкретный момент времени: .

В следующей главе вопрос решения задачи динамического программирования будет рассмотрен более подробно, будет представлен метод нахождения значения, отвечающего указанной формулировке. Планируется произвести расчет для некоего стандартного случая, который позволит лучше понять логику процесса. Отдельное внимание будет уделено анализу влияния различных факторов на стоимость супер-репликации опциона. Кроме того, будут проанализированы вопросы существования кривой предложения и ее формы для ряда российских акций.

**Глава 3. Вопросы практического применения построенной дискретной модели ценообразования опционов**

* 1. **Изучение вопроса существования кривой предложения на российском рынке**

Эта часть будет посвящена проверке предпосылки о наличии кривых предложения для некоторых акций российского рынка. Сначала обсудим процедуру, которую необходимо реализовать для обсуждения данного вопроса.

Для того чтобы решить данную задачу, необходимо изучить зависимость цены сделки от ее объема. В самом простом виде это можно сделать оценив коэффициенты регрессии вида:

*(4)*

 – цена, которую необходимо заплатить за каждую акцию в момент времени , чтобы осуществить торговую операцию по покупке (продаже) бумаг; – цена нулевого объема, может рассматриваться как стоимость актива в указанный момент времени в рамках стандартных моделей, предполагающих абсолютную ликвидность; – показатель, характеризующий наклон кривой предложения. Фактически, параметр отражает насколько изменится цена операции при изменении ее объема на величину . Ненулевое значение данного показателя говорит о том, что инвестор вынужден переплачивать при покупке акций и недополучать денежные средства при их продаже, относительно равновесной величины.

**Гипотеза.** Необходимо рассматривать кривую предложения для акций в отличном виде, который может быть выражен следующим образом:

Это связано с тем, что переплата (недоплата) возникает не только от объема сделки, но и от существования на рынке бид-аск спреда, накладывающего ограничения на ликвидность актива. Кроме того, другие авторы при изучении рынков акций других стран отмечали, что указанный вид более характерен для кривых предложения этих активов.

Для проверки выдвинутой гипотезы о существовании и виде кривой предложения для акций, торгующихся на российском рынке, предлагается следующий план:

1. Оценить регрессию в виде представленном в формуле *(4)* для заявок на покупку;
2. Протестировать регрессию в виде представленном в формуле *(4)* для заявок на продажу актива;
3. Провести оценивание коэффициентов регрессии вида *(4)* для стакана заявок в целом;
4. Проанализировать качество полученных оценок и их значимость для первых трех пунктов;
5. Провести тест Чоу для проверки гипотезы о кусочно-линейном виде кривой предложения акций российского рынка.

В качестве данных для тестирования гипотезы будут использованы поминутные стаканы заявок в период с 10:00 до 18:39 (максимальным размером – 20 заявок на покупку и 20 заявок на продажу) по обыкновенным акциям компаний ОАО «Газпром», ОАО «Сбербанк России» и НК «Роснефть» с 22 по 25 апреля 2014 года. В таблицах 4-6 приведены основные показатели итогов торгов по указанным инструментам в режиме торгов Т+2 в рассматриваемый промежуток времени.

**Таблица 4.** Итоги торгов обыкновенными акциями ОАО «Сбербанк России» с 22 по 25 апреля 2014 года.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Дата торгов** | **Сделок, шт.** | **Объем, руб.** | **Минимум, руб.** | **Максимум, руб.** | **Последняя, руб.** | **Срвзв.цена, руб.** |
| 25.04.2014 | 219457 | 21,073,635,940.90 | 69.56 | 73.1 | 69.91 | 70.93 |
| 24.04.2014 | 209132 | 18,512,448,292.70 | 71.81 | 76.11 | 73.21 | 73.68 |
| 23.04.2014 | 130342 | 10,096,596,348.40 | 75.12 | 76.51 | 75.56 | 75.75 |
| 22.04.2014 | 120981 | 10,366,817,228.30 | 75.6 | 77.5 | 76.3 | 76.62 |

**Источник.** СайтМосковской Биржи.

**Таблица 5.** Итоги торгов обыкновенными акциями ОАО «Газпром» с 22 по 25 апреля 2014 года.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Дата торгов** | **Сделок, шт.** | **Объем, руб.** | **Минимум, руб.** | **Максимум, руб.** | **Последняя, руб.** | **Срвзв.цена, руб.** |
| 25.04.2014 | 167920 |  8,176,942,684.60  | 124.38 | 127.3 | 125.4 | 125.69 |
| 24.04.2014 | 162939 |  8,926,425,029.30  | 125.04 | 131.28 | 126.69 | 127.92 |
| 23.04.2014 | 108895 |  6,198,138,933.90  | 129.6 | 131.7 | 130.5 | 130.35 |
| 22.04.2014 | 106337 |  7,306,910,664.90  | 130.62 | 132.92 | 131.7 | 131.77 |

**Источник.** СайтМосковской Биржи.

**Таблица 6.** Итоги торгов обыкновенными акциями НК «Роснефть» с 22 по 25 апреля 2014 года.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Дата торгов** | **Сделок, шт.** | **Объем, руб.** | **Минимум, руб.** | **Максимум, руб.** | **Последняя, руб.** | **Срвзв.цена, руб.** |
| 25.04.2014 | 12433 |  759,365,223.40  | 221.4 | 225.92 | 223.62 | 223.84 |
| 24.04.2014 | 13940 |  1,052,451,509.90  | 223.71 | 229.19 | 225.98 | 225.64 |
| 23.04.2014 | 10090 |  701,637,612.90  | 228.08 | 230.34 | 228.17 | 228.87 |
| 22.04.2014 | 14643 |  1,332,810,891.40  | 229.28 | 231.77 | 230 | 230.39 |

**Источник.** СайтМосковской Биржи.

Эти данные позволяют утверждать, что акции ОАО «Сбербанк России» являются наиболее ликвидными среди рассматриваемых инструментов, как с точки зрения количества сделок, так и с позиции объема торгов в денежном выражении. По величине относительного объема торгов за указанный период также лидируют обыкновенные акции ОАО «Сбербанк России». Наконец, величина бид-аск спреда в абсолютном выражении на закрытие торгов у бумаг НК «Роснефть» была значительно выше, чем у акций ОАО «Сбербанк России» и ОАО «Газпром», у которых она стабильно на изучаемом интервале не превышала 2-3 копеек. В силу того, что цена обыкновенных бумаг последней выше, можно утверждать, что именно акции ОАО «Газпром» имели наименьший относительный бид-аск спред на закрытии торгов в период с 22 по 25 апреля 2014 года.

Проведя предварительный анализ указанных инструментов, перейдем к изучению вопроса существования и вида кривых предложения для данных бумаг. Для тестирования сформулированной гипотезы были оценены регрессии вида *(4)*, при этом зависимая переменная была взята в логарифмической форме. Это связано с тем, что в большинстве исследований предполагается, что цена подчиняется логнормальному распределению, не позволяющему принимать ей отрицательные значения.

В таблице 7 указаны средние значения коэффициента детерминации для протестированных регрессий: отдельно для заявок на покупку, продажу и стакана целиком. Как видим, наибольшие значения характерны для обыкновенных акций ОАО «Сбербанк России». Коэффициенты протестированных регрессий значимы для подавляющего количества рассмотренных периодов на 1% уровне значимости. Таким образом есть основания заявлять, что для указанных инструментов характерно существование кривой предложения формы отличной от горизонтальной. Это подтверждает, что они не являются абсолютно ликвидными, а значит необходимо учитывать данный факт при оценивании опционов на данные базовые активы.

**Таблица 7.** Результаты тестирования регрессий для отобранных бумаг.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **22 апреля** | **23 апреля** | **24 апреля** | **25 апреля** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| «Сбербанк» | 0.912 | 0.907 | 0.903 | 0.910 | 0.915 | 0.900 | 0.908 | 0.904 | 0.901 | 0.914 | 0.900 | 0.894 |
| «Газпром» | 0.899 | 0.878 | 0.905 | 0.890 | 0.881 | 0.896 | 0.896 | 0.903 | 0.891 | 0.885 | 0.902 | 0.913 |
| «Роснефть» | 0.857 | 0.835 | 0.898 | 0.895 | 0.821 | 0.911 | 0.872 | 0.827 | 0.904 | 0.876 | 0.822 | 0.908 |

**Источник.** Расчеты автора.

Рассмотрим конкретный момент времени (25 апреля 2014 года 16:27) и результаты, полученные для наблюдений по акциям ОАО «Сбербанк России», зафиксированных в данный период. В таблице 8 приведена часть стакана, отражающая 5 лучших котировок на покупку и продажу в этот момент времени. В верхней части отражена информация по заявкам на продажу, а в нижней – на покупку.

**Таблица 8.** Часть стакана по акциям ОАО «Сбербанк России» с лучшими заявками по состоянию на 25 апреля 2014 года 16:27.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Цена** | **Объем** | **Сумма лучших** |
| 70.80 | 659 | 5462 |
| 70.79 | 332 | 4803 |
| 70.78 | 1280 | 4471 |
| 70.77 | 3188 | 3191 |
| 70.76 | 3 | 3 |
| 70.75 | 3672 | 3672 |
| 70.73 | 1500 | 5172 |
| 70.71 | 2904 | 8076 |
| 70.70 | 1473 | 9549 |
| 70.69 | 1500 | 11049 |

**Источник.** Информационно-торговый терминал Quik.

Оценки регрессий для рассматриваемого момента времени отражены в таблице 9. Из них видно, что оценки параметра для раздельного изучения котировок на продажу и покупку отличаются, что косвенно дает подтверждение выдвинутой в начале данной части гипотезы.

**Таблица 9.** Результаты оценивания регрессий по стакану заявок.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Коэффициент | Оценка | Значимость |
| Покупка | Продажа | Совместная | Покупка | Продажа | Совместная |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | - | - | - |

**Источник.** Расчеты автора.

**Рисунок 3.** Вид кривой предложения для указанного момента времени.



С этой целью для каждого стакана заявок был проведен тест Чоу, позволяющий проверить, могут ли быть две анализируемые выборки объединены в одну. Итоги, полученные при проведении теста для каждого периода приведены в следующей таблице. В столбце для конкретного дня указано количество внутридневных периодов всего и количество тех, когда отвергается гипотеза о том, что выборки, состоящие из заявок на покупку и продажу, можно объединить.

**Таблица 10.** Результаты теста Чоу (5% уровень значимости) для набора наблюдений по акциям.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **22 апреля** | **23 апреля** | **24 апреля** | **25 апреля** |
| Всего |  | Всего |  | Всего |  | Всего |  |
| «Сбербанк» | 518 | 425 | 519 | 445 | 519 | 414 | 518 | 407 |
| «Газпром» | 518 | 359 | 519 | 387 | 519 | 406 | 518 | 338 |
| «Роснефть» | 518 | 362 | 519 | 319 | 519 | 282 | 518 | 258 |

**Источник.** Расчеты автора.

Полученные данные указывают на то, что практически в каждый из рассмотренных дней в более, чем 50% случаев гипотеза о возможности объединения выборок отвергается. Наиболее наглядно это продемонстрировано для обыкновенных акций ОАО «Сбербанк России», для которых эта гипотеза отвергается в 78-85% случаев. В наименьшем количестве случаев утверждение о возможности объединения наборов наблюдений опровергается для акций НК «Роснефть». Тем не менее, даже для данных ценных бумаг это происходит в более, чем 50% случаев (в 3 из 4 проанализированных дней).

Из полученных результатов теста Чоу можно сделать вывод о том, что для описания зависимости цен выбранных для изучения активов от объема наиболее подходит кусочно-линейная функция предложения с точкой разрыва в нуле. Это позволяет утверждать, что гипотеза, выдвинутая автором, нашла подтверждение. Стоит заметить, что рассмотренные ценные бумаги относятся к активно торгуемом на российском рынке, поэтому справедливость выдвинутого предположения для них, скорее всего, указывает на то, что и для других акций оно будет справедливым. Однако, безусловно, данный факт требует отдельной дополнительной проверки.

Кроме того, отдельно стоит уделить внимание тому факту, что предварительный анализ указывал на то, что акции ОАО «Сбербанк России» по большому количеству показателей выглядит более ликвидной акции, чем две другие. А результаты, полученные при изучении стаканов заявок, говорят о том, что для акций крупнейшего банка РФ в подавляющем большинстве случаев характерна кусочно-линейная функция предложения. Факт, который Блейс и Проттер в своем исследовании (Blais, Protter, 2010) называли как показатель значительных ограничений по уровню ликвидности для актива. На мой взгляд, изучение этого явления и, вообще, связи между значениями стандартных проекций ликвидности и наличием (видом) кривой предложения актива может служить хорошим развитием данной тематики.

Другим фактом, на который стоит обратить внимание, является отличие российского срочного рынка на акции от большинства его зарубежных аналогов. Оно заключается в том, что в нашей стране базовыми активами рыночных опционов являются не сами акции, а фьючерсные контракты на данные бумаги. В этом свете представляется интересным вопрос существования и вида кривой предложения для фьючерсов.

Для подобных контрактов со сроком истечения в июне на обыкновенные акции ОАО «Газпром» и ОАО «Сбербанк России» автором был проведен аналогичный анализ. В целом выводы практически полностью совпадают с полученными для базовых активов, в частности, подтверждается предположение о существовании негоризонтальной кривой предложения для этих производных инструментов. В таблице 11 приведены результаты теста Чоу, проведенного для проверки гипотезы о возможности объединения двух выборок, состоящих из заявок на продажу и покупку, соответственно.

**Таблица 11.** Результаты теста Чоу (5% уровень значимости) для набора наблюдений по фьючерсным контрактам.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **22 апреля** | **23 апреля** | **24 апреля** | **25 апреля** |
| Всего |  | Всего |  | Всего |  | Всего |  |
| Ф «Сбербанк» | 518 | 321 | 519 | 302 | 519 | 331 | 518 | 240 |
| Ф «Газпром» | 518 | 507 | 519 | 504 | 519 | 499 | 518 | 479 |

**Источник.** Расчеты автора.

Отсюда видно, что для указанных фьючерсов на акции также может быть сделан вывод о том, что кусочно-линейная функция лучше всего подходит для описания зависимости цены от объема. Таким образом, выдвинутая гипотеза справедлива и применительно к этим типам производных инструментов, которые выступают в качестве базовых для опционов на российском рынке.

В следующей части данного исследования будет подробно описан метод решения задачи динамического программирования, представленной в рамках модели, сформулированной в главе 2. Это позволит затем определить стоимость опциона с учетом ограниченной ликвидности для заданных начальных условий и обсудить вопрос чувствительности этой величины к изменению параметров.

* 1. **Метод решения задачи динамического программирования**

В рамках модели, представленной в предыдущей главе, требуется определить значение стоимости супер-репликации указанного европейского условного платежного обязательства в сформулированных предпосылках, которое может считаться его ценой в рассматриваемый момент времени. Как было показано в главе 2 этого исследования:

Соответственно, для решения задачи на каждом изучаемом этапе необходимо реализовать следующие шаги:

1. Произвести минимизацию выражения, представляющего из себя разницу между стоимостью реплицирующего портфеля в следующий момент времени и изменением стоимости позиции в акциях инвестора, скорректированной на издержки ограниченной ликвидности, реализующиеся при изменении количества располагаемого базового актива, если цена акции в следующей момент времени увеличится;
2. Повторить процедуру, указанную в предыдущем пункте для случая, если цена акции в следующей момент времени уменьшится;
3. Определить наибольшее из значений, найденных на первых двух шагах. Таким образом, можно гарантированно реплицировать опцион на изучаемом промежутке;
4. Изменяя параметр начальной позиции в базовом активе, установить минимальную стоимость реплицирующего портфеля в рассматриваемый момент времени.

Для определения решения данной задачи будем в соответствие со стандартным методом биномиальной модели идти от конечного момента времени к начальному, вычисляя значение на каждом этапе. Согласно *(3)* . В свою очередь, . Это означает, что данная функция зависит от начальной позиции в акциях в каждый момент времени. В этой связи изначально необходимо определить .

**Определение.** Портфель доминирует , если справедливо выражение:

В конечный момент времени у инвестора есть некий портфель , который с учетом необходимости ликвидации всех позиций в соответствие с предпосылками модели, должен реплицировать опцион. Для этого необходимо доминирование портфеля индивида над портфелем вида:

Поскольку , то с учетом сформулированного ранее выражение может быть определено как:

Теперь задав стоимость портфеля для конечного момента, перейдем к остальным этапам временного процесса. В соответствии с планом для определения стоимости опциона в рамках общей задачи, на всех этапах кроме последнего сначала необходимо решить две схожие задачи на минимизацию вида:

Обозначим через функцию, которую требуется минимизировать, если цена акции в следующий момент увеличилась, то есть :

Поскольку мы движемся в обратном направлении, то в момент времени мы знаем величину . Заметим, что функция является выпуклой по параметру , поскольку и , как было показано в утверждении 2 предыдущей главы, и , в силу своего определения являются выпуклыми по указанной переменной. Это позволяет утверждать, что существует единственное значение , минимизирующее значение рассматриваемой функции. Так как непрерывна по параметру количества акций в реплицирующем портфеле, то можем записать условие первого порядка:

С учетом вида функции абсолютных убытков, возникающих из-за ограниченной ликвидности, сформулированное выше условие может быть переписано в виде:

Поскольку нам известно значение в рассматриваемый момент времени, то задача минимизации функции сводится к определению такого значения , для которого справедливо:

Отметим, что выпуклость стоимости реплицирующего портфеля по параметру, описывающему позицию в акциях, указывает на то, что вторая производная функции является положительной величиной, а значит выражения, записанные слева являются неубывающими по .

Для того, чтобы было проще решить задачу будем считать, что параметр может принимать значения в фиксированном интервале с определенным шагом . Данный параметр можно рассматривать как некий стандартный лот, и инвестор лишен возможности приобрести количество акций меньшее указанной величины. Тогда для решения сформулированной задачи на минимизацию будем перебирать с шагом до тех пор, пока не будем найдено такое , для которого верно следующее:

Таким образом, мы получаем значение , минимизирующее величину функции для заданного .

Затем эта процедура повторяется для следующего значения . При этом, поскольку выражения, стоящие в левой части указанных неравенств, являются неубывающими по , то поиск можно начинать не с величины , а сразу с . Это значительно сокращает количество вычислений, происходящих при обсчете теоретической модели в практических условиях.

Аналогичная процедура проводится для случая, когда цена акции в момент времени снижается, для функции . Затем в рамках плана по решению задачи на фиксированном этапе производится отдельно минимизация полученных наборов величин функций и для случаев роста и падения цены базового актива по параметру . Таким образом определяется портфель какой минимальной стоимости необходим в момент времени , для того, чтобы он позволял наиболее точно (с наименьшим отклонением) реплицировать опцион при росте (падении) цены акции. После этого выбирается максимальное из этих двух значений, показывающее портфель какой стоимости необходимо иметь на рассматриваемом этапе с целью гарантированной репликации анализируемого платежного обязательства вне зависимости от динамика цены в следующий момент времени. Наконец, происходит минимизация по параметру начальной позиции акций в портфеле, позволяющая определить искомую величину, которую можно считать стоимостью опциона в рассматриваемый момент времени. Затем процедура в точности повторяется для предыдущего шага биномиального дерева.

Теперь сформулировав метод решения задачи динамического программирования произведем расчет для конкретных значений и проверим, действительно ли издержки ограниченной ликвидности базового актива являются неустранимыми в данной формулировке и обеспечивают существование премии для цены опциона.

* 1. **Обсуждение числового решения поставленной задачи**

В данной части мы посчитаем стоимость опциона в рамках сформулированной модели ценообразования и сравним ее с результатом обычного биномиального подхода, не учитывающего отсутствие абсолютной ликвидности базового актива.

Также как и в самой модели будем полагать, что безрисковая ставка нулевая: . Для удобства будем работать с нормированными величинами. Зададим характеристики рынка базового актива: . Для простоты подсчетов будем полагать, что показатели, описывающие кривую предложения акции неизменны с течением времени и определены следующим образом: В заданных условиях рассматривается платежное обязательство – европейский опцион колл со страйком и временем до исполнения . В данных условиях параметры, описывающие динамику ценового процесса, следующие: . Также необходимо ввести дополнительные ограничения, касающиеся портфеля акций. Будем считать, что инвестор может иметь количество акций, лежащее в интервале . Минимальный лот составляет 0.005.

Цена опциона, посчитанная в рамках стандартной биномиальной модели, в таких условиях равна . Значение, полученное при использовании модели с ограниченной ликвидностью . Как видим, разница между ценами составляет порядка 0,4%. Эта величина кажется незначительной, однако, анализ влияния показателей , призванных уловить ограниченную ликвидность базового актива, приведенный в таблицах 12-14, показывает, что их рост сопровождается опережающим ростом величины премии к стандартной цене опциона.

**Таблица 12.** Чувствительность цены опциона к изменению параметра наклона кривой предложения для сделок по покупке базового актива.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Премия |
| 0.0001 | 0.1002499 | 0.094% |
| 0.0005 | 0.1005361 | 0.380% |
| 0.0010 | 0.1010112 | 0.854% |
| 0.0050 | 0.1045500 | 4.387% |

**Источник.** Расчеты автора.

**Таблица 13.** Чувствительность цены опциона к изменению параметра наклона кривой предложения для сделок по продаже базового актива.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Премия |
| 0.00004 | 0.1002465 | 0.090% |
| 0.0002 | 0.1005361 | 0.380% |
| 0.0004 | 0.1009466 | 0.789% |
| 0.0020 | 0.1041090 | 3.947% |

**Источник.** Расчеты автора.

**Таблица 14.** Чувствительность цены опциона к изменению бид-аск спреда базового актива.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Премия |
| 0.00001 | 0.1002320 | 0.076% |
| 0.00005 | 0.1005361 | 0.380% |
| 0.00010 | 0.1008592 | 0.702% |
| 0.00050 | 0.1034439 | 3.283% |

**Источник.** Расчеты автора.

Полученные результаты позволяют утверждать, что, начиная с определенных значений параметров кривой предложения, влияние этих показателей на величину премии опциона становится достаточно серьезным. Так увеличение наклона кривой предложения базового актива для сделок по покупке акций в 10 раз приводит к росту надбавки относительно стандартной цены в 11.56 раза и делает ее 4.387%, что составляет уже весьма значительную величину для любого инвестора, работающего на фондовом рынке. Аналогичная тенденция наблюдается и для двух других параметров, хотя влияние бид-аск спреда увеличивается несколько меньшими темпами.

Таким образом, можно утверждать, что влияние ограниченной ликвидности базового актива через кривую предложения является существенным фактором, влияющим на цену опционов наравне с другими признанными показателями. Это было показано с практической точки зрения в данной главе работы. В заключительной части будут подведены основные итоги проведенного исследования, сформулированы достигнутые результаты. Отдельно будет обсужден вопрос дальнейшего изучения проблемы и смежных направлений экономической теории.

**Заключение**

Данное исследование посвящено изучению вопроса влияния фактора ограниченной ликвидности базовых активов на цены опционов. Эта проблема все еще остается слабо изученной к текущему моменту. Автором был предложена модель определения стоимости опциона на актив, ликвидность которого не является абсолютной, в отличие от предпосылок базовых моделей. Данное условие было учтено посредством формулировки так называемой кривой предложения – функции, описывающей в каждый момент времени зависимость цены базового актива, акции в рамках данной работы, от объема сделки, которую намерен совершить инвестор. Этот подход был до этого использован несколькими авторами и призван учесть плотность и упругость рынка как наиболее значимые проекции ликвидности для процесса оценивания производных финансовых инструментов. Однако, в данном исследовании была предпринята попытка модифицировать сложившийся метод путем включения в него параметра, отражающего бид-аск спред, характерный для анализируемого базового актива. Необходимость такого изменения кроется не только в том, что эта характеристика позволяет лучше отражать плотность рынка, но и в том, что исследование Блейса и Проттера, посвященное изучению вопроса существования кривых предложения на американском рынке, выявило, что для большинства из рассмотренных ценных бумаг наиболее подходит кусочно-линейная форма, фактически предполагающая стабильное существование отличного от нуля спреда между ценами покупки и продажи. Исходя из указанного вида кривой зависимости цены сделки от ее объема была выведена теоретическая модель, позволяющая определить для заданных параметров стоимость портфеля необходимого для репликации рассматриваемого условного платежного обязательства (европейского опциона колл), которая может считаться ценой опциона. К преимуществам сформулированного подхода стоит отнести возможность его несложной модификации для определения стоимости более экзотичных производных инструментов, а также возможность относительно просто реализовать применение модели на практике посредством использования методов динамического программирования. Также стоит заметить, что построенная модель предполагает, что инвестор работает на рынке с дискретным временем, дополнительно, хоть и косвенно вводится понятие минимального торгового лота, с которым может осуществлять сделки индивид. Все это приближает изучаемый рынок к его реальному аналогу, что в свою очередь позволяет более правильно оценить стоимость изучаемых инструментов. С другой стороны, сформулированный подход требует большого количества вычислений, что делает проблематичным вопрос его масштабирования. К тому же он не отражает влияние других проекций ликвидности на процесс ценообразования. Тем не менее, сложно отрицать факт, что указанный метод позволяет дать более верные оценки премий опционов относительно значений, предлагаемых стандартными моделями.

Определенная работа была выполнена в направлении практической верификации предложенной модели. Так, была оценена стоимость обычного европейского опциона с ее помощью и проанализирован вопрос чувствительности результатов к изменению параметров, характеризующих кривую предложения базового актива. Значительная часть посвящена вопросу проверки существования подобных зависимостей цены сделки от ее объема на российском рынке ценных бумаг. С этой целью были проанализированы большие массивы данных, которые позволили утверждать, что для отобранных бумаг (обыкновенные акции ОАО «Сбербанк России», ОАО «Газпром» и НК «Роснефть») существуют кривые предложения, причем для них скорее характерен кусочно-линейный вид с разрывом в нуле, указывающим на существование бид-аск спреда. Аналогичные выводы справедливы и для фьючерсных контрактов на акции ОАО «Сбербанк России» и ОАО «Газпром», которые в силу специфики российского срочного рынка являются базовыми активами рыночных опционов.

Однако, несмотря на проделанную работу представляется, что еще остались вопросы в рамках данной темы, требующие дальнейшего, более пристального изучения. Среди прочего, это анализ согласованности вида кривой предложения актива с общепринятыми показателями его ликвидности (неликвидности), необходимость более детального обсуждения вопроса о обоснованности или отсутствии такой в включении прочих проекций ликвидности в модель и характере их влияния на цены производных инструментов. Не менее интересным представляется, и проблема оптимизации предложенного метода оценивания с целью упрощения его применения на практике.

Подытоживая проведенное исследование хотелось бы еще раз обратить внимание на актуальности этой проблемы. Несмотря на последствия последнего финансового кризиса деривативы не утратили свои позиции и рынки, связанные с ними, продолжают активно развиваться. Наблюдается стабильный интерес и частных инвесторов к этим инструментам и основанным на них финансовым продуктам. В этой связи правильный подход к определению стоимости производных контрактов является залогом успешной работы на финансовом рынке.

# **Список литературы**

1. *2012 WFE Market Highlights.* WFE.

2. Adler J. (08 Март 2012 г.). *Raging Bulls: How Wall Street Got Addicted to Light-Speed Trading.* Получено из Wired: http://www.wired.com/2012/08/ff\_wallstreet\_trading/all/

3. Aitken M., & Comerton-Forde C. (2003). How should liquidity be measured? *Pacific-Basin Finance Journal*(11), 45-59.

4. Amihud Y., & Mendelson H. (1986). Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of Financial Economics*(17), 223-249.

5. Bank P., & Baum D. (2002). Hedging and Portfolio Optimization in Illiquid Financial Markets with a Large Trader. *Mathematical Finance*.

6. Black F., & Scholes M. (1973). The Pricing of Options & Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*(81), 637-654.

7. Blais M., & Protter P. (2010). An Analysis of the Supply Curve for Liquidity Risk Through Book Data. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*(13), 821-838. doi:10.1142/S0219024910006017

8. Brenner M., Eldor R., & Hauser S. (2001). The Price of Options Illiquidity. *Journal of Finance*(46), 789-805.

9. Broadie M., Cvitanic J., & Soner H. (1998). Optimal Replication of Contingent Claims under Portfolio Constraints. *The Review of Financial Studies*(11), 59-79.

10. Cetin U., & Rogers L. (2007). Modelling liquidity effects in discrete time. *Mathematical Finance*(17), 15-29.

11. Cetin U., Jarrow R., & Protter P. (2004). Liquidity Risk and Arbitrage Pricing Theory. *Finance Stochastics*(8), 311-341.

12. Cetin U., Jarrow R., Protter P., & Warachka M. (2006). Pricing Options in an Extended Black Scholes Economy with Illiquidity: Theory and Empirical Evidence. *Review of Financial Studies*(19), 493-529.

13. Cetin U., Soner H., & Touzi N. (2010). Option hedging for small investors under liquidity costs. *Finance and Stochastics*(14), 317-341. doi:10.1007/s00780-009-0116-x

14. Chou R., Chung S.-L., Hsiao Y.-J., & Wang Y.-H. (2011). The Impact of Liquidity on Option Prices. *Journal of Futures Markets*(31), 1116-1141.

15. Davydoff D., & Naacke G. (2009). *IOMA Derivative trading: trends since 1998.* WFE.

16. Duffie D., & Protter P. (1988). From Discrete to Continuous Time Finance: Weak Convergence of the Financial Gain Process. *Mathematical Finance*(2), 1-16.

17. Gokay S. (2011). *Pricing and Hedging in a Discrete-Time Illiquid Market.* Brown University.

18. Gokay S., & Soner H. (2010). Liquidity in a binomial market. *Mathematical Finance*, 1-27.

19. Gokay S., Roch A., & Soner H. (2011). Liquidity models in continuous and discrete time. *Advanced Mathematical Methods for Finance*, 333-365.

20. Grossman S., & Miller M. (1987). Liquidity and Market Structure. *The Journal of Finance*(43), 617-633.

21. Harr M. (2010). *Option Pricing in the Presence of Liquidity Risk.* Umea.

22. Hull J.C. (2009). *Options, Futures and other Derivatives* (изд. 7th). New Jersey: Pearson Prentice Hall.

23. Jarrow R., & Protter P. (2007). Liquidity Risk and Option Pricing Theory. В *Handbook in Operation Research and Management Science: Financial Engineering.*

24. Jiang G., & Tian Y. (2005). The Model-Free Implied Volatility and Its Information Content. *The Review of Financial Studies*(18), 1305-1342.

25. Ku H., Lee K., & Zhu H. (2012). Discrete time hedging with liquidity risk. *Finance Research Letters*(9), 135-143. doi:10.1016/j.frl.2012.02.002

26. Lee C., & Ready M. (1991). Inferring trade direction from intraday data. *Journal of Finance*(46), 733-746.

27. Lee J., & Kim S. (2008). Numerical Solutions of Option Pricing Model with Liquidity Risk. *Communications of the Korean Mathematical Society*(23), 141-151.

28. Leland H. (1985). Option Pricing and Replication with Transaction Costs. *Journal of Finance*(40), 1283-1301.

29. Roch A. (12 Декабрь 2008 г.). *Liquidity Risk, Price Impacts and the Replication Problem.* Получено из arXiv.org: http://arxiv.org/abs/0812.2440

30. Rogers L., & Singh S. (2010). The Cost of Illiquidity and its Effects on Hedging. *Mathematical Finance*(20), 597-615.

31. Schonbucher P., & Wilmott P. (2000). The feedback effect of hedging in illiquid markets. *SIAM Journal on Applied Mathematics*(61), 232-272.

32. Wyss R. (2004). *Measuring and Predicting Liquidity in the Stock Market.* St. Gallen.

33. Теплова Т.В. (2014). *Инвестиции: Теория и практика.* Москва: Юрайт.

1. *2012 WFE Market Highlights*, стр. 5 [↑](#footnote-ref-1)
2. На практике возможно осуществление сделок с неполными лотами, но это сопряжено с немалыми издержками. В частности, на ОАО «Московская биржа» торговлю неполными лотами можно проводить только в определенное время и, как правило, ликвидность для них оказывается на порядок хуже полных лотов. [↑](#footnote-ref-2)
3. (Aitken, 2003), с.54 [↑](#footnote-ref-3)