Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет экономики

Программа дисциплины Линейная алгебра для направления 38.03.01 «Экономика» подготовки бакалавра

Автор программы: Лобанов С.Г., доктор физико-математических наук, профессор, lobanov@hse.ru

Одобрена на заседании кафедры высшей математики на факультете экономики

«28» августа 2014 г.

Зав. кафедрой Ф.Т. Алескеров

Рекомендована секцией УМС «___»____________ 201 г.

Председатель

Утверждена УС факультета экономики «___»_____________201 г.

Ученый секретарь

Москва, 2014

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.

1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов для направления 38.03.01 «Экономика» подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Линейная алгебра».

Программа разработана в соответствии с:

- ФГОС ;
- Образовательной программой 38.03.01 «Экономика» подготовки бакалавра.
- Рабочим учебным планом университета по направлению 38.03.01 «Экономика» подготовки бакалавра, утвержденным в 2014 г.

2. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины Линейная алгебра .

- Добиться усвоения студентами теоретических основ, базовых результатов и теорем аналитической геометрии и линейной алгебры, а также основных математических приемов и правил формального анализа и решения различных математических задач на основе полученных теоретических знаний.
- Подготовить слушателей к чтению современных текстов по экономической теории, насыщенных векторными, матричными и операторными обозначениями;
- Обеспечить запросы других разделов математики, использующих возникающие в линейной алгебре конструкции;
- Научить слушателей давать геометрическую интерпретацию многомерным объектам и строить аналитическое описание геометрическим соотношениям.
- Продемонстрировать возможность бескоординатного описания линейных и квадратичных функций, подготавливая переход к изучению функционального анализа;
- Выработать у слушателей навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также задач, способствующих развитию начальных навыков научного исследования;
- Развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих профессиональных компетенций:

- (ПК-2) способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономическипоказатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов;
- (ПК-3) способен выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами;
- (ПК-5) способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы;
- (ПК-14) способен преподавать экономические дисциплины в образовательных учреждениях различного уровня, используя существующие программы и учебно-методические материалы;
- (ПК-15) способен принять участие в совершенствовании и разработке учебно-методического обеспечения экономических дисциплин;

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- точные формулировки основных понятий, уметь интерпретировать их на простых модельных примерах; в том числе, свободно использовать координатный, векторный, матричный или операторный способ записи математических соотношений;
- общие теоремы о структуре множества решений систем линейных, уметь применять специальные методы построения таких решений;
- свойства основных числовых характеристик матриц: определитель, ранг, размерность пространства строк и столбцов;

Уметь:

- формулировать и доказывать основные результаты этих разделов; представлять математические утверждения и их доказательства, проблемы и их решения ясно и точно в терминах, понятных для профессиональной аудитории, как в письменной, так и устной формах.
- понимать разделы учебной и научной литературы, связанные с применением линейных пространств, линейных отображений, линейных, билинейных и квадратичных форм

Владеть: навыками решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала; решения математические задач, аналогичные ранее изученным;

4. Место дисциплины в структуре ООП:

- учебная дисциплина «Линейная алгебра» входит в цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин;
- требования к входным знаниям и умениям студентов — не требуется какой бы то ни было предварительной математической подготовки сверх обычной программы средней школы.
- данная дисциплина является предшествующей для следующих дисциплин: Эконометрика, Математический анализ, Микроэкономика, Макроэкономика, Дифференциальные и разностные уравнения, Дискретные математические модели, Методы оптимальных решений.

Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	Эконометрика	+	+		+	+		+	+	+	+	+	+
2.	Математический анализ	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3.	Макроэкономика		+	+	+		+	+	+	+	+		
4.	Микроэкономика			+	+		+	+	+	+	+		
5.	Дифференциальные и разностные уравнения		+	+	+	+	+	+		+		+	+
6.	Дискретные математические модели	+	+		+	+							
7.	Методы оптимальных	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

	решений												

5. Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоя-тельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Преобразования матриц и системы линейных уравнений.	7	2	2		3
2.	Определитель.	10	3	3		4
3.	Линейные пространства.	11	3	3		5
4.	Алгебра матриц.	10	3	3		4
5.	Ранг матрицы.	9	3	3		3
6.	Структура множества решений системы линейных уравнений.	7	2	2		3
7.	Линейные операторы.	12	3	3		6
8.	Линейные, билинейные и квадратичные формы.	14	4	4		6
9.	Элементы аналитической геометрии.	13	3	3		7
10.	Евклидовы пространства.	7	2	2		3
11.	Самосопряженные операторы.	4	1	1		2
12.	Аффинные пространства	4	1	1		2
	Итого:	108	30	30		48

6. Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год		Параметры **
		1	2	
Текущий (неделя)	Контрольная работа	8		Письменная работа 160 минут
	Домашнее задание №1	1		Срок 6-я неделя
	Домашнее задание №2	9		Срок 12-я неделя
Итоговый	Экзамен			Письменный экзамен 160 минут

6.1.Критерии оценки знаний, навыков

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольных работ и домашних заданий, количество которых зависит от форм контроля по другим учебным дисциплинам.

Контрольная работа №1 проводится в конце первого модуля, домашнее задание №1 должно быть сдано до контрольной работы. Продолжительность контрольной работы и экзаменационной работы — 160 минут. Если предусмотрены контрольная работа №2 и (или) домашнее задание №2, то проводятся они в середине второго модуля.

Итоговый контроль осуществляется в виде письменного экзамена. Полный ответ на каждый из десяти вопросов экзамена приносит одно очко. В случае неполного решения оценка ответа на вопрос может принимать значения между нулем и единицей. Например, арифметическая ошибка, не изменившая верного плана решения задачи, приводит к штрафу 0,1. Отсутствие примеров при ответе на вопрос теории приводит к штрафу 0,2. Приступая к проверке, преподаватели согласовывают оценки и для многих других типичных погрешностей.

В зависимости от набранной суммы очков определяется оценка за экзамен по десятибалльной системе. Пороговые значения следующие

Сумма	0	1.5	3	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9	9.5
Оценка по 10-балльной системе	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Для расчета оценки за весь курс вычисляется взвешенная сумма по всем формам контроля с весом экзамена 0.8. Оценка определяется по тем же пороговым значениям с учетом условия: если набранная на экзамене сумма меньше 4.5, то оценка за весь курс не может быть выше оценки за экзамен.

6.2.Порядок формирования оценок по дисциплине

Накопленная оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом: $О_{накопленная} = 0{,}5 \cdot О_{дз1} + 0{,}5 \cdot О_{дз2}$.

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом: $О_{результ} = 0{,}2 * О_{накопл} + 0{,}8 * \cdot О_{экз.}$

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме зачета арифметический.

7. Содержание дисциплины

Раздел 1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений

Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений. Элементарные преобразования матриц. Обратимость элементарных преобразований. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений со ступенчатой матрицей системы. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений в случае двух или трех неизвестных. Ненулевые решения однородной системы уравнений.

Литература: [1], глава 1.

Раздел 2. Определитель

Определитель и элементарные преобразования. Построение определителя разложением по столбцу. Определитель транспонированной матрицы. Вычисление определителя разложением по строке.
Литература: [1], глава 2.

Раздел 3. Линейные пространства

Простейшие следствия аксиом линейного пространства. Подпространство линейного пространства. Простейшие свойства линейно зависимых векторов. Базис и координаты векторов. Существование базиса конечномерного пространства. Размерность линейного пространства.

Литература: [1], глава 3.

Раздел 4. Алгебра матриц

Сумма матриц. Умножение матрицы на число. Произведение матриц. Матричная запись системы уравнений. Свойства арифметических операций над матрицами. Обратная матрица и формулы Крамера. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями. Преобразование координат при замене базиса.

Литература: [1], глава 4.

Раздел 5. Ранг матрицы

Ранг матрицы. Ранг ступенчатой матрицы. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов). Ранг произведения матриц. Определитель произведения матриц.

Литература: [1], глава 5.

Раздел 6. Структура множества решений системы линейных уравнений

Векторная запись системы уравнений. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений. Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений. Структура множества решений системы линейных уравнений. Теорема о выборе главных и свободных неизвестных.

Литература: [1], глава 6.

Раздел 7. Линейные операторы

Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Характеристический многочлен линейного оператора. О корнях характеристического многочлена линейного оператора. Свойства собственных векторов с одинаковыми и различными собственными значениями.

Литература: [1], глава 7.

Раздел 8. Линейные, билинейные и квадратичные формы

Формула линейного функционала. Матрица билинейной формы. Матрица симметричной билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса. Единственность симметричной билинейной формы, порождающей квадратичную форму. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Закон инерции для квадратичных форм.

Литература: [1], глава 8.

Раздел 9. Элементы аналитической геометрии

Прямоугольная система координат на плоскости. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении. Векторы. Равенство векторов. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам. Скалярное произведение векторов. Общее уравнение прямой на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Параметрическое и каноническое уравнения прямой. Расстояние от точки до прямой. Преобразование координат точки при замене системы координат. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Общее уравнение плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.

Литература: [1], глава 9.

Раздел 10. Евклидовы пространства

Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Длина вектора и угол между векторами. Ортогональность векторов. Независимость попарно ортогональных векторов. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса. Матрица скалярного произведения в ортонормированном базисе. Ортогональные матрицы. Геометрическая интерпретация ортогональных матриц.

Литература: [1], глава 10.

Раздел 11. Самосопряженные операторы

Сопряженность операторов в евклидовом пространстве. Матрицы сопряженных операторов. Собственные векторы и собственные значения самосопряженных операторов. Ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Литература: [1], глава 11.

Раздел 12. Аффинные пространства

Преобразование координат точки при замене системы координат. Линейные отображения. Линейные операторы, связанные с линейными отображениями. Геометрические свойства линейных отображений. Аффинные и изометрические отображения.

Литература: [1], глава 12.

8. Образовательные технологии

9. Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1. Тематика заданий текущего контроля

Контрольная работа № 1 предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий
   1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений
      1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.
      1.1.2. Элементарные преобразования матриц.
      1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
   1.2. Определитель
   1.3. Линейное пространство.
      1.3.1. Подпространство линейного пространства.
      1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.
      1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.
      1.3.4. Базис и координаты векторов.
      1.3.5. Размерность линейного пространства.
   1.4. Арифметические операции над матрицами
      1.4.1. Сумма матриц.
      1.4.2. Умножение матрицы на число.
      1.4.3. Произведение матриц.
      1.4.4. Обратная матрица
   1.5. Матрица перехода.
   1.6. Ранг матрицы
   1.7. Фундаментальная система решений.
2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры
   2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями.
   2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
   2.3. Определитель и элементарные преобразования.
   2.4. Вычисление определителя разложением по строке или по столбцу

2.5. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.

2.6. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями.

2.7. Вычисление координат векторов.

2.8. Построение базиса линейного пространства.

2.9. Вычисление размерности пространства.

2.10. Преобразование координат при замене базиса.

2.11. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы.

2.12. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).

2.13. Исследование совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли).

2.14. Построение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

2.15. Построение множества решений системы линейных уравнений.

2.16. Выбор главных и свободных неизвестных.

Домашнее задание № 1 предназначено для освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий
   - 1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений
     - 1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.
     - 1.1.2. Элементарные преобразования матриц. .
     - 1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
   - 1.2. Определитель
   - 1.3. Линейное пространство.
     - 1.3.1. Подпространство линейного пространства.
     - 1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.
     - 1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.
     - 1.3.4. Базис и координаты векторов.
     - 1.3.5. Размерность линейного пространства.
   - 1.4. Арифметические операции над матрицами

1.4.1. Сумма матриц.

1.4.2. Умножение матрицы на число.

1.4.3. Произведение матриц.

1.4.4. Обратная матрица

1.5. Матрица перехода.

1.6. Ранг матрицы

1.7. Фундаментальная система решений.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры

2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями.

2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

2.3. Определитель и элементарные преобразования.

2.4. Вычисление определителя разложением по строке или по столбцу

2.5. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.

2.6. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями.

2.7. Вычисление координат векторов.

2.8. Построение базиса линейного пространства.

2.9. Преобразование координат при замене базиса.

2.10. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы.

2.11. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).

2.12. Построение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

2.13. Построение множества решений системы линейных уравнений.

2.14. Выбор главных и свободных неизвестных.

Домашнее задание №2 предназначено для освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий

1.1. Матрица линейного оператора.

1.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

1.3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

1.4. Линейные, билинейные и квадратичные формы

1.5. Формула линейного функционала.

1.6. Матрица билинейной формы.

1.7. Матрица скалярного произведения

1.8. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

1.9. Матрица квадратичной формы.

1.10. Положительная определенность квадратичной формы.

1.11. Канонический вид квадратичной формы.

1.12. Прямоугольная система координат на плоскости.

1.13. Деление отрезка в данном отношении.

1.14. Векторы.

1.14.1. Равенство векторов.

1.14.2. Координаты вектора.

1.14.3. Сложение векторов.

1.14.4. Умножение вектора на число.

1.14.5. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам.

1.14.6. Скалярное произведение векторов.

1.14.7. Векторное произведение векторов.

1.14.8. Смешанное произведение векторов.

1.15. Общее уравнение плоскости.

1.16. Параметрическое и каноническое уравнения прямой в пространстве.

1.17. Длина вектора и угол между векторами.

1.18. Ортогональность векторов.

1.19. Ортогональная проекция вектора на подпространство.

1.20. Ортонормированный базис.

1.21. Ортогональные матрицы.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры

2.1. Построение матрицы линейного оператора.

2.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

2.3. Построение собственных векторов и собственных значений линейного оператора.

2.4. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

2.5. Проверка положительной определенности квадратичной формы.

2.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.
2.7. Построение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.
2.8. Построение координат вектора по координатам его крайних точек.
2.9. Построение ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора на подпространство.
2.10. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса.
2.11. Вычисление площади треугольника и объема треугольной пирамиды при помощи векторного и смешанного произведения векторов.
2.12. Построение параметрического уравнения прямой в пространстве: по двум точкам и перпендикулярно данной плоскости через заданную точку..
2.13. Исследование взаимного положения прямой и плоскости.
2.14. Вычисление угла между векторами, угла между вектором и плоскостью, угла между плоскостями.
2.15. Построение уравнения плоскости по координатам трех ее точек.
2.16. Применение операций над векторами для вычисления координат точек: симметричных данной относительно заданной плоскости, симметричных данной относительно заданной прямой и некоторых других.

9.2. Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

9.3. Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать задачи (более двухсот задач по всем разделам курса), приведенных в учебнике [1] в конце каждой главы.

Контрольная работа № 1. Вариант № **1**

1. Найдите координаты вектора x относительно базиса e_1', e_2', e_3', если известны его координаты $\{-7, -3, -5\}$ относительно базиса e_1, e_2, e_3, причем $e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3$, $e_2' = 6e_1 - 2e_2 - 4e_3$, $e_3' = 3e_1 - e_2 - e_3$.
2. Представить общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$ как выражение главных неизвестных через свободные.
3. Вычислить $\det \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 7 \\ 6 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.
4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ как функцию от числа λ.
6. Укажите какой-нибудь вектор, не принадлежащий линейной оболочке векторов $a_1\{1, 2, 3\}$, $a_2\{4, 5, 6\}$.
7. Найдите какой-нибудь базис в пространстве всех симметричных матриц второго порядка (с обычными операциями) и вычислите координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ относительно этого базиса.

Экзаменационный билет № **1**

1. Формула Крамера решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей системы.
2. Нарисуйте параллелепипед и укажите те его диагонали, которые соответствуют векторам $a+b-c$ и $a-b+c$, если векторы a, b, c соответствуют ребрам этого параллелепипеда.
3. Отрезок с концами в точках $A(3,5)$ и $B(-12,-4)$ разделен на три равные части. Найдите координаты точек деления.
4. Найдите ранг матриц AB и BA, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$?
5. С помощью правила Крамера решить систему уравнений
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$.
6. Компланарны ли векторы $a = (4, 3, 2)$, $b = (1, 2, 3)$, $c = (1, 0, -1)$?
7. Найдите какой-нибудь базис в пространстве всех векторов из $\mathbb{R}^3$, перпендикулярных вектору $\{1, 2, 3\}$.
8. Могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного оператора в различных базисах?
9. В некотором базисе e_1, e_2 матрица скалярного произведения имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите угол (в градусах) между векторами e_1 и e_2.
10. Вычислите площадь параллелограмма, стороны которого — векторы $a = \mathbf{k} - 2\mathbf{i}$ и $b = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Домашняя работа № 1. Вариант № 110.1

1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -2x_3=6 \\ 4x_1 & +3x_2 & -x_3=7 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3=5 \end{cases}$

   (a) методом Гаусса

   (b) в матричной форме $X = A^{-1}B$, где A^{-1} вычислить через алгебраические дополнения

   (c) в матричной форме $X = A^{-1}B$, где A^{-1} вычислить при помощи элементарных преобразований.

2. Представить общее решение системы линейных уравнений
$\begin{cases} 7x_1 & +5x_2 & +7x_3 & +4x_4=35 \\ x_1 & +7x_2 & +8x_3 & +2x_4=33 \end{cases}$

   (a) как выражение главных неизвестных через свободные

   (b) в векторной форме с использованием базиса в пространстве решений соответствующей однородной системы.

3. Вычислить $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -2 \\ 6 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц AB, AB^*, A^*B, A^*B^*, BA, B^*A, BA^*, B^*A^* в тех случаях, когда умножение определено.

5. Найти координаты вектора x относительно базиса e_1', e_2', если известны его координаты $\{50, 48\}$ относительно базиса e_1, e_2, причем $e_1' = 7e_1 + 8e_2, e_2' = 9e_1 + 8e_2$.

6. Найти ранг матрицы A как функцию параметра λ

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 9 \\ \lambda & -5 & 1 & -11 \\ -9 & 1 & -4 & 6 \\ -5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

7. Выделите среди векторов $a_1(3, -12, -1, 2)$, $a_2(-1, 7, 1, 1)$, $a_3(1, 2, 1, 4)$, $a_4(1, 1, 4, 1)$ какой-нибудь базис порожденной ими линейной оболочки, а затем найдите координаты остальных векторов относительно этого базиса.

8. Векторы $e_1(-4, -1, 1)$, $e_2(-2, 1, 1)$, $e_3(3, -2, -2)$ и $e_1'(14, 6, -2)$, $e_2'(0, 8, 4)$, $e_3'(-3, -2, 0)$ заданы координатами относительно некоторого базиса. Докажите, что системы векторов e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' являются базисами (“старым” и “новым”) и найдите матрицу перехода от “старого” базиса к “новому”.

Домашняя работа № 2. Вариант № 1

Для квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$, заданной в ортонормированном базисе,

1.1) найти матричную запись в исходном базисе

1.2) найти матричную запись в базисе $e_1(1,4,5), e_2(3,-2,5), e_3(1,-1,2)$

1.3) применить критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

1.4) найти ортонормированный базис, в котором форма имеет канонический вид (указать канонический вид и матрицу перехода к каноническому базису).

Для треугольной пирамиды с вершинами $A(1,1,-1)$, $B(3,4,-5)$, $C(3,-6,5)$, $D(-2,7,-1)$, заданными в декартовой системе координат, определить

2.1) матрицу скалярного произведения относительно базиса $e_1 = \overline{AB}, e_2 = \overline{AC}, e_3 = \overline{AD}$

2.2) ортогональную проекцию e_2^- и ортогональную составляющую $e_2^\perp$ вектора e_2 при проектировании на подпространство $M_1 = \mathrm{Lin}(e_1)$ и ортогональную проекцию e_3^- и ортогональную составляющую $e_3^\perp$ вектора e_3 при проектировании на подпространство $M_2 = \mathrm{Lin}(e_1, e_2)$

2.3) матрицу скалярного произведения относительно базиса $e_1' = e_1, e_2' = e_2^\perp, e_3' = e_3^\perp$

2.4) матрицу оператора проекции на плоскость грани ABC, т.е. каждому вектору пространства ставится в соответствие его проекция на подпространство M_2, относительно базиса e_1, e_2, e_3 и матрицу того же оператора относительно базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ из единичных векторов осей координат

2.5) площадь S треугольника ABC

2.6) объем V пирамиды

2.7) длину H высоты пирамиды, опущенной из вершины D

2.8) уравнение плоскости ΔABC

2.9) координаты точки D' — проекции точки D на плоскость ΔABC

2.10) координаты точки C', симметричной точке C относительно прямой AB

2.11) координаты вершин A_1, B_1, C_1, D_1 параллелепипеда, у которого точка A является вершиной, а векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ — ребрами (точка A_1 симметрична точке A относительно центра параллелепипеда и т.д.)

2.12) параметрическое уравнение прямой AB и перпендикуляра к плоскости ΔABC, проходящего через точку D

2.13) косинус угла α между ребром AD и плоскостью ΔABC и косинус двугранного угла β между плоскостью ΔABC и плоскостью грани ABD

Примечание. Все компоненты результатов вычислений, кроме длин векторов, $cos\alpha$ и $cos\beta$, являются рациональными числами p/q, где $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Поэтому все числа в ответах должны быть представлены либо в виде таких дробей, где числа p и q не имеют общих простых делителей (обычные целые числа, конечно, следует записывать без знаменателя $q = 1$), либо в виде $\sqrt{p/q}$.

11 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

11.1. Базовый учебник

Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. *Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной : учебник для студ. высш. учеб. заведений* – М.: Издательский центр «Академия», 2010. (Университетский учебник. Высшая математика и ее приложения к экономике).

Обеспеченность студентов базовым учебником 100 %.

11.2. Основная литература

1. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры* – М.: Наука, любое издание.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*. – М.: Наука, любое издание.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* – М.: Наука, любое издание.

4. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа (под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича)* – М.: Наука, любое издание после1981.

5. Шевцов Г.С. *Линейная алгебра.* Учебное пособие. – М.: Гардарики, 1999.

11.3. Дополнительная литература

1. Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры.* – М.: Наука, 1968.
2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
3. Погорелов А.В. *Геометрия.* – М.: Наука, 1983.
4. Скорняков Л.А. *Элементы линейной алгебры. Учебное пособие.* – М.: Наука, 1980.
5. Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры.* – М.: Наука, 1968.
6. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
7. Погорелов А.В. *Геометрия.* – М.: Наука, 1983.
8. Скорняков Л.А. *Элементы линейной алгебры. Учебное пособие.* – М.: Наука, 1980.

12 Материально-техническое обеспечение дисциплины