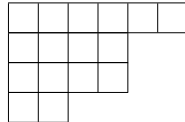


# Диаграммы Юнга и $q$ -комбинаторика

Е. Ю. Смирнов

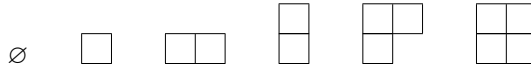
## 1. ГАУССОВЫ БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Рассмотрим невозрастающую последовательность натуральных чисел  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ . Сопоставим ей картинку на клетчатой бумаге: в первой строке картинки расположим  $\lambda_1$  квадратиков, во второй —  $\lambda_2$ , и так далее, так, чтобы все строки были бы выровнены по левому краю. Получившуюся картинку назовем *диаграммой Юнга*, отвечающей последовательности  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . В качестве примера ниже изображена диаграмма Юнга, отвечающая последовательности  $(6, 4, 4, 2)$ .



Зафиксируем два натуральных числа,  $m$  и  $n$ , и рассмотрим прямоугольник размера  $m \times n$  клеток, и рассмотрим все диаграммы Юнга, которые можно вписать в этот прямоугольник (мы считаем, что левый верхний угол диаграммы совпадает с левым верхним углом прямоугольника). Они будут отвечать последовательностям  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ , для которых  $k \leq n$ , а  $\lambda_1 \leq m$ .

**Пример 1.1.** Пусть  $m = n = 2$ . Тогда таких диаграмм шесть:



(Отметим, что пустую диаграмму мы тоже считаем диаграммой Юнга, состоящей из нуля клеточек.)

Найти число диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник  $m \times n$  — это известная задача по комбинаторике. Действительно, каждая диаграмма ограничена снизу и слева путем, который соединяет левый нижний угол прямоугольника с правым верхним. Каждый такой путь состоит из  $m + n$  звеньев, причем ровно  $m$  из них горизонтальны, а  $n$  вертикальны. Значит, число таких путей равно числу способов указать, какие из  $m + n$  звеньев будут горизонтальными, то есть числу сочетаний  $\binom{m+n}{m}$  (в этой статье мы будем использовать именно такое обозначение, а не, возможно, более привычное читателю  $C_{m+n}^m$ ). На рисунке 1 изображен пример диаграммы Юнга, вписанной в прямоугольник размера  $6 \times 5$ .

Теперь рассмотрим следующий, более сложный вопрос. Сколько существует диаграмм, вписанных в прямоугольник  $m \times n$  и состоящих из заданного числа квадратиков — это число еще называется *весом* диаграммы? Обозначим число диаграмм веса  $k$  через  $a_k$  (при этом мы считаем  $m$  и  $n$  фиксированными). Пока что мы можем сказать про эти числа немного: во-первых,  $a_0 = a_{mn} = 1$  (в прямоугольнике существует только одна диаграмма из нуля квадратиков и одна — из  $mn$ , то есть весь прямоугольник). Во-вторых, как мы видели только что,  $a_0 + a_1 + \dots + a_{mn} = \binom{m+n}{m}$ : общее число всех диаграмм в прямоугольнике

---

*Date:* 7 сентября 2014 г.

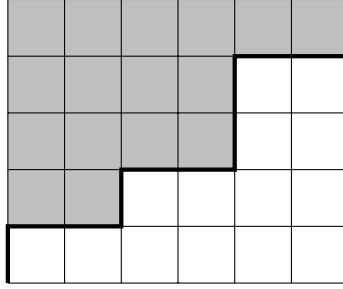


Рис. 1. Путь на клетчатой бумаге, отвечающий диаграмме Юнга

равно числу сочетаний из  $m + n$  элементов по  $m$ . Также ясно, что при всех  $k$  в пределах от 0 до  $mn$  значения  $a_k$  будут положительны — но как они себя ведут и как их вычислить, не вполне ясно. Дальнейшая наша задача будет состоять в изучении последовательности  $a_0, \dots, a_{mn}$ .

Для работы с последовательностями в комбинаторике часто применяется такой полезный инструмент, как производящие функции. А именно, если у нас есть какая-либо последовательность  $(b_0, b_1, \dots, b_m, \dots)$  — конечная или бесконечная — мы можем рассмотреть следующую сумму, зависящую от переменной; эту переменную мы назовем  $q$ :

$$B(q) = b_0 + b_1q + b_2q^2 + \dots + b_mq^m + \dots$$

Эта сумма называется *производящей функцией* последовательности  $b_m$ . Если последовательность конечна, то это выражение является многочленом от переменной  $q$ ; если же она бесконечна, то это уже будет не многочлен, а *степенной ряд*. Зачастую изучение производящей функции последовательности позволяет получить какие-то новые сведения о самой последовательности; подробнее об этом можно прочесть, например, в книгах [4] и [5].

Вернемся к последовательности  $a_k$  (напомним, что она зависит не только от веса диаграммы  $k$ , но еще и от размеров прямоугольника, т.е. от  $m$  и  $n$ ). Рассмотрим ее производящую функцию, которую мы будем обозначать несколько необычным образом — через  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$ :

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q = \sum_{k=0}^{mn} a_k q^k.$$

Это многочлен степени  $mn$ .

**Пример 1.2.** Несложно вычислить  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$  при  $m = 1$ : он равен

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^n,$$

то есть этот многочлен — геометрическая прогрессия со знаменателем  $q$ .

**Пример 1.3.** Пример 1.1 показывает, что  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$ .

Многочлен  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$  (иногда мы будем опускать индекс  $q$  и писать просто  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$ ) называется *гауссовым биномиальным коэффициентом*, или  *$q$ -биномиальным коэффициентом*. Причина такого названия проста: если вычислить его значение при  $q = 1$ , мы получим сумму всех его коэффициентов — то есть как раз обычный биномиальный коэффициент  $\binom{m+n}{m}$ . Далее мы выясним, что эти многочлены обладают рядом свойств, которые очень похожи на свойства обычных биномиальных коэффициентов.

## 2. ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Обычные биномиальные коэффициенты удобно представлять в виде треугольника Паскаля — треугольной таблицы, каждый элемент которой равен сумме двух стоящих над ним элементов (см. рис. 2). Это выражается хорошо известным равенством  $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}$ .

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & 1 \\
 & & 1 & 2 & 1 & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 
 \end{array}$$

Рис. 2. Треугольник Паскаля

Запишем такой же треугольник, в котором теперь будут стоять  $q$ -биномиальные коэффициенты. Выпишем первые его несколько строк — например, при  $m+n \leq 4$ . Мы получим следующую таблицу:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
 & & 1 & & & 1+q & & 1 \\
 & 1 & & 1+q+q^2 & & 1+q+q^2 & & 1 \\
 1 & 1+q+q^2+q^3 & & 1+q+2q^2+q^3+q^4 & & 1+q+q^2+q^3 & & 1
 \end{array}$$

Рис. 3.  $q$ -треугольник Паскаля

При этом мы считаем, что, как и для обычных биномиальных коэффициентов, по краям нашей таблицы стоят единицы, то есть  $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = 1$ .

**Упражнение 2.1.** Докажите, что  $q$ -треугольник Паскаля симметричен:  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}$ .

Из нашего « $q$ -треугольника Паскаля» видно, что  $q$ -биномиальный коэффициент уже не является суммой двух коэффициентов, стоящих над ним — то есть  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}$  (хотя бы потому, что левая и правая части имеют разную степень как многочлены от  $q$ ).

Однако можно заметить, что рекуррентное соотношение все же имеет место, только выглядит немного иначе: так, каждый элемент таблицы получается как сумма элемента сверху-слева от него и элемента сверху-справа, *умноженного на некоторую степень переменной  $q$* : так, скажем,  $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + q(1 + q + q^2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ , а  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (1 + q + q^2) + q^2(1 + q + q^2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + q^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Нетрудно подметить и общее правило: оно выглядит так.

### Предложение 2.2.

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}. \tag{*}$$

*Доказательство.* Как уже было сказано, подстановка  $q = 1$  превращает это равенство в равенство с участием обычных биномиальных коэффициентов:

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}. \tag{**}$$

Приведем сначала доказательство этого равенства, использующее определение биномиального коэффициента как числа диаграмм Юнга, а потом модифицируем его так, чтобы получилось равенство (\*).

Будем вести индукцию по  $m + n$ . База очевидна; докажем индуктивный переход. Рассмотрим произвольную диаграмму Юнга  $Y$ , вписанную в прямоугольник  $m \times n$ . Она ограничена снизу некоторой ломаной; посмотрим на ее первое звено. Оно может быть либо вертикальным, и тогда оставшаяся часть ломаной ограничивает диаграмму Юнга в прямоугольнике размера  $(m-1) \times n$ , изображенном на левом рисунке красным цветом; либо горизонтальным — и тогда оставшаяся часть ломаной задает диаграмму в прямоугольнике размера  $m \times (n-1)$ , который обведен на правом рисунке синей линией. То есть общее количество диаграмм Юнга равно суммарному количеству диаграмм Юнга внутри красного и синего прямоугольников. Согласно предположению индукции, диаграмм первого типа  $\binom{m+n-1}{m-1}$ , а диаграмм второго типа —  $\binom{m+n-1}{m}$ . Равенство (\*\*) доказано.

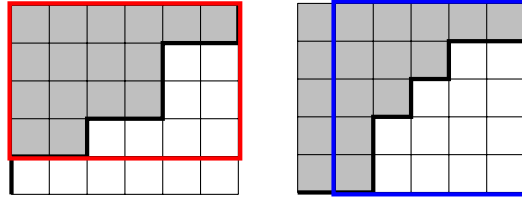


Рис. 4. Два типа диаграмм Юнга

Что меняется, когда мы переходим от обычных биномиальных коэффициентов к  $q$ -биномиальным? Теперь нас интересует не просто количество всех диаграмм Юнга, а количество диаграмм каждого веса по отдельности. Попробуем проследить за этим.

Итак, пусть первое звено диаграммы вертикально. Тогда пересечение нашей диаграммы и красного прямоугольника есть диаграмма *того же самого веса*, что и исходная — значит, суммарный вклад в производящую функцию, который дадут диаграммы первого типа, равен в точности  $\binom{m+n}{m-1}$ . Напротив, если же первое звено горизонтально, то внутри синего прямоугольника будет лежать вся диаграмма, кроме первого столбца, который имеет высоту  $m$  — тем самым вес всей диаграммы будет на  $m$  больше, чем вес диаграммы внутри синего прямоугольника. Поэтому вклад всех диаграмм второго типа будет в  $q^m$  раз больше, чем  $q$ -биномиальный коэффициент, «считающий» диаграммы в синем прямоугольнике — т.е. будет равняться  $q^m \binom{m+n-1}{m}$ . Сложив эти два выражения, получаем требуемую производящую функцию.  $\square$

### 3. ЯВНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ГАУССОВЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ И $q$ -БИНОМ НЬЮТОНА

Биномиальные коэффициенты зачастую бывает удобнее вычислять не при помощи рекуррентного соотношения, а по явной формуле:

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}.$$

Оказывается, что ее аналог существует и для  $q$ -биномиальных коэффициентов, и доказательство его лишь незначительно сложнее. Для того, чтобы вывести эту явную формулу, определим сперва понятия  $q$ -аналога натурального числа.

Всякое натуральное число  $n$  встречается в треугольнике Паскаля:  $n = \binom{n}{1}$ . Условимся, что  $q$ -аналогом натурального числа  $n$  является многочлен от  $q$ ,

равный  $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ . Обозначим этот многочлен через  $[n]_q$  (иногда, следуя нашему стандартному соглашению, мы будем писать просто  $[n]$ ). Таким образом,  $q$ -аналог натурального числа  $n$  — это сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии со знаменателем  $q$  и начальным членом 1:

$$[n]_q = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Обратите внимание, что суммирование ведется до  $n - 1$ , а не до  $n$ . Однако при подстановке  $q = 1$  многочлен  $[n]_q$  становится равным в точности  $n$ .

**Упражнение 3.1.** Докажите, что для любых натуральных  $n$  и  $m$  имеют место равенства

$$[m + n]_q = [m]_q + q^m [n]_q = [n]_q + q^n [m]_q.$$

Из этого упражнения и полученного нами выше рекуррентного соотношения нетрудно вывести и явную формулу для  $q$ -биномиальных коэффициентов:

**Предложение 3.2.** *Имеет место формула*

$$\begin{bmatrix} m + n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n + 1] \cdot [n + 2] \cdot \dots \cdot [n + m]}{[1] \cdot [2] \cdot \dots \cdot [m]}.$$

*Доказательство.* Докажем это равенство по индукции по  $m + n$ . База индукции: при  $m + n = 1$  равенство очевидно.

Переход: запишем для  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$  равенство из предложения 2.2, и воспользуемся для  $\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}$  предположением индукции.

$$\begin{bmatrix} m + n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m + n - 1 \\ m - 1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m + n - 1 \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n + 1] \cdot \dots \cdot [n + m - 1]}{[1] \cdot \dots \cdot [m - 1]} + q^m \frac{[n] \cdot \dots \cdot [n + m - 1]}{[1] \cdot \dots \cdot [m]}.$$

Вынеся за скобку множитель, общий для обеих дробей, получим:

$$\begin{bmatrix} m + n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n + 1] \cdot \dots \cdot [n + m - 1]}{[1] \cdot \dots \cdot [m - 1]} \left( 1 + q^m \frac{[n]}{[m]} \right).$$

Теперь осталось преобразовать выражение в скобках и воспользоваться результатом упражнения 3.1:

$$1 + q^m \frac{[n]}{[m]} = \frac{[m] + q^m [n]}{[m]} = \frac{[m + n]}{[m]}.$$

Тем самым мы получаем требуемое:

$$\begin{bmatrix} m + n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n + 1] \cdot \dots \cdot [n + m - 1]}{[1] \cdot \dots \cdot [m - 1]} \cdot \frac{[m + n]}{[m]}.$$

□

Это равенство, как и в случае «обычных» биномиальных коэффициентов, можно переписать в более красивом виде, если ввести понятие  $q$ -факториала. Обычный факториал числа  $n$  определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  (при этом мы считаем, что  $0! = 1$ ). Точно так же можно определить и  $q$ -факториал:

$$[n]! = [1] \cdot [2] \cdot \dots \cdot [n].$$

Как и прежде, мы полагаем  $[0]! = 1$ . В соответствии с нашим общим принципом, значение многочлена  $[n]!$  при  $q = 1$  равняется «обычному» факториалу числа  $n$ .

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства из предложения 3.2 на  $[n]!$ , получим ещё один вариант явной формулы для  $q$ -биномиального коэффициента:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]! \cdot [n]!}.$$

Отсюда, в частности, получается «комбинаторное» доказательство того факта, что  $[m+n]!$  делится на  $[m]! \cdot [n]!$  без остатка как многочлен от  $q$  — отметим, что из явного вида формул для  $q$ -факториалов это вовсе не очевидно.

Биномиальные коэффициенты, как следует из самого их названия, возникают в *биноме Ньютона* — в равенстве  $(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$ . У этого равенства тоже имеется  $q$ -аналог, который выглядит следующим образом:

**Теорема 3.3** ( $q$ -бином Ньютона).

$$(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^n) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k.$$

Как и следует ожидать, подстановка  $q = 1$  превращает данное равенство в обычный бином Ньютона.

Доказательство этой теоремы мы представим в виде нескольких задач.

**Упражнение 3.4.** Докажите, что если раскрыть скобки в левой части, то коэффициент при  $q^\ell x^k$  будет равняться числу разбиений числа  $\ell$  в сумму  $k$  различных целых положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит  $n$ .

**Упражнение 3.5.** Постройте взаимно-однозначное соответствие между разбиениями числа  $\ell$  в сумму  $k$  различных целых положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит  $n$ , и диаграммами Юнга веса  $\ell - \frac{k(k+1)}{2}$ , вписанными в прямоугольник размера  $(n-k) \times k$ .

**Упражнение 3.6.** Выведите теорему 3.3 из двух предыдущих упражнений.

#### 4. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Итак, мы уже довольно много знаем про функцию  $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$  — производящую функцию для числа разбиений, вписанных в прямоугольник размера  $m \times n$ . Наша дальнейшая цель — получить производящую функцию для числа всевозможных разбиений на плоскости, без каких-либо ограничений на слагаемые и их количество. Делать мы это будем в два этапа.

Во-первых, выпишем формулу для  $q$ -биномиального коэффициента, полученную в предыдущем разделе:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n+1] \cdot [n+2] \cdot \dots \cdot [n+m]}{[1] \cdot [2] \cdot \dots \cdot [m]}.$$

В этой дроби в числителе и знаменателе одинаковое число сомножителей, а именно  $m$ . Теперь воспользуемся тем, что каждое из  $q$ -чисел есть геометрическая прогрессия со знаменателем  $q$ , и представим каждое из них в виде дроби:

$$[k] = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Сомножители  $1/(1-q)^m$  в числителе и знаменателе сократятся, и мы получим несколько иное выражение для  $q$ -биномиального коэффициента:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1 - q^{n+1})(1 - q^{n+2}) \dots (1 - q^{n+m})}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^m)}.$$

(еще раз обращаем внимание читателя на то, что правая часть на самом деле является многочленом — числитель делится на знаменатель без остатка как многочлен от  $q$ ).

Теперь посмотрим, как будет меняться это выражение, если менять  $n$ , а  $m$  фиксировать. Что будет, если  $n$  «очень большое» — скажем, тысяча? Тогда в числителе будет стоять многочлен вида  $(1 - q^{1001})(1 - q^{1002}) \dots (1 - q^{1000+m}) = 1 - q^{1001} + \dots$ , свободный член которого равен 1, а потом следуют «очень много» (в данном случае — 1000) коэффициентов, равных нулю. То есть чем больше  $n$ , тем больше нулевых коэффициентов подряд будет в числителе. Знаменатель же останется неизменным, он от  $n$  никак не зависит.

Таким образом, можно сказать, что при стремлении  $n$  к бесконечности выражение в числителе стремится к единице, а сам  $q$ -биномиальный коэффициент стремится к величине, обратной знаменателю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^m)}.$$

Конечно же, как всегда бывает при обращении с разного рода пределами, этому высказыванию нужно придать строгий математический смысл. Это можно сделать двумя разными способами. Один из них состоит в том, чтобы рассматривать все выражения от  $q$  как *функции*, а само  $q$  — как переменную (скажем, вещественную). Тогда  $q$ -биномиальный коэффициент будет функцией на прямой, и в левой части выражения будет стоять функциональная последовательность, с которой уже можно обходиться средствами математического анализа — например, исследовать ее на сходимость при тех или иных значениях  $q$ . Так, эта последовательность будет сходиться при  $|q| < 1$ , а при  $|q| > 1$  расходиться; там, где эта последовательность сходится, ее предел будет равен значению функции, стоящей в правой части. Подробнее об обращении с функциональными последовательностями можно прочесть в любом учебнике математического анализа, например, в книге [3].

Другой способ состоит в том, чтобы рассматривать все наши выражения как *формальные степенные ряды*, т.е. «многочлены бесконечной степени». Правую часть равенства при этом также следует понимать как степенной ряд: для этого нужно заменить каждый из сомножителей  $\frac{1}{1-q^k}$  на бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем  $q^k$  и перемножить все  $m$  этих прогрессий. Тогда можно будет говорить о *покоэффициентной* сходимости в вышеописанном смысле: будем говорить, что последовательность формальных степенных рядов  $A_n(q)$  сходится к  $A(q)$ , если каждый коэффициент у  $A_n(q)$  и  $A(q)$  начиная с какого-то момента совпадает. Желающих узнать больше об обращении с формальными степенными рядами отсылаем к книгам [5] или [1].

Комбинаторный смысл последнего выражения тоже понятен: полученный степенной ряд есть производящая функция для числа диаграмм Юнга, вписанных в полосу высоты  $m$  (т.е. состоящих не более чем из  $m$  строк), но без каких-либо ограничений на длины этих строк. Коэффициент этого ряда при  $q^k$  будет равен количеству диаграмм Юнга из  $k$  квадратиков, количество строк в которых не превосходит  $m$ .

Обратите внимание, что здесь впервые утрачивает смысл подстановка  $q = 1$ : очевидно, что общее количество диаграмм Юнга в полосе посчитать нельзя (оно бесконечно), тогда как выписать производящую функцию оказывается возможным.

Остался последний шаг: устремим к бесконечности в полученной формуле число  $m$ , т.е. максимальное количество строк диаграммы Юнга. Тогда получится производящая функция для числа *всех* диаграмм Юнга, без каких-либо ограничений на их размер. Она будет представляться как *бесконечное произведение*. Мы получили знаменитую теорему Эйлера:

**Теорема 4.1** (Л. Эйлер). *Производящая функция  $P(q) = p(0) + p(1)q + \dots + p(\ell)q^\ell + \dots$ , где  $p(\ell)$  — число диаграмм Юнга из  $\ell$  квадратиков, задаётся бесконечным произведением:*

$$P(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}.$$

Бесконечное произведение, возникающее в правой части равенства, есть предел последовательности конечных произведений:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - q^k}.$$

Этот предел также можно понимать одним из двух описанных выше способов: либо как предел последовательности функций, сходящихся при  $|q| < 1$ , либо как покоефициентный предел последовательности формальных степенных рядов  $(1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^4 + \dots) \dots (1 + q^m + q^{2m} + \dots)$ . Несложно видеть, что предел, понимаемый во втором смысле, существует, т.е. коэффициенты такого произведения стабилизируются: если умножить произвольный ряд на  $\frac{1}{1 - q^m} = 1 + q^m + q^{2m} + \dots$ , то первые  $m$  членов ряда, начиная с нулевого, останутся неизменными. Иначе говоря, чтобы вычислить очередной ( $k$ -й) член этого ряда, нужно перемножить только *конечное* число (в данном случае  $k$ ) первых сомножителей — остальные не окажут на коэффициент при  $q^k$  никакого влияния.

Мы получили теорему Эйлера в качестве следствия утверждений о явном виде  $q$ -биномиальных коэффициентов. Однако она допускает куда более простое доказательство, которое мы также предлагаем найти читателю.

**Упражнение 4.2.** Придумайте доказательство теоремы Эйлера, не использующее  $q$ -биномиальных коэффициентов. Иначе говоря, докажите непосредственно, что производящая функция для числа разбиений  $P(q) = p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + \dots$  равна

$$P(q) = (1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^4 + \dots) \dots (1 + q^k + q^{2k} + \dots) \dots$$

## 5. ПЕНТАГОНАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

В связи с теоремой о производящей функции для числа разбиений упомянем еще один замечательный результат, также принадлежащий Эйлеру. Оказывается, если начать вычислять ряд, *обратный* к  $P(q)$  — иначе говоря, бесконечное произведение  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$ , получится следующее:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

(В качестве упражнения предлагаем читателю проверить это вычисление, скажем, до члена  $q^{10}$  включительно).

Здесь можно сделать сразу несколько интересных наблюдений. Во-первых, видно, что все коэффициенты этого ряда равны либо 0, либо  $\pm 1$ , причем по мере увеличения степени ненулевые члены встречаются все реже и реже. Во-вторых, все члены, кроме свободного, идут парами: два отрицательных, два положительных, потом снова два отрицательных и так далее. Разность между



степенями в паре равняется номеру пары: сначала это единица ( $q$  и  $q^2$ ), потом два ( $q^5$  и  $q^7$ ), потом три ( $q^{12}$  и  $q^{15}$ ), и так далее.

Наконец, последовательность степеней 1, 5, 12, 22, 35... тоже была хорошо известна Эйлеру — это так называемые *пятиугольные числа*, которые равняются числу точек в пятиугольнике, сторона которого равна 1, 2, 3... точкам соответственно (см. рис. 5). Нетрудно видеть, что  $m$ -тое пятиугольное число равняется  $m(3m - 1)/2$ .

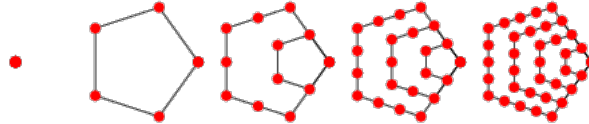


Рис. 5. Пятиугольные числа

Оказывается, что имеет место следующий результат.

**Теорема 5.1** (пентагональная теорема Эйлера). *Ряд, обратный к ряду  $P(q) = \sum p(n)q^n$ , имеет вид*

$$P(q)^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left( q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}} \right).$$

Эта теорема имеет несколько существенно разных доказательств. Наверное, самое простое из них можно найти в статье Д. Б. Фукса «О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и упущенных возможностях» [8], опубликованной в журнале «Квант» за 1981 год, или в лекции 3 книги С. Л. Табачникова и Д. Б. Фукса «Математический дивертисмент» [7]. И эту статью, и эту книгу мы горячо рекомендуем читателю. Там же можно прочесть о том, как с помощью пентагональной теоремы Эйлера удастся очень быстро вычислять числа разбиений  $p(n)$ .

Еще одно доказательство пентагональной теоремы Эйлера основано на использовании  $q$ -бинома Ньютона, с которым мы имели дело в разделе 3; это доказательство можно прочесть, например, в брошюре [6], принадлежащей автору этой статьи.

## 6. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ. А ЧТО ДАЛЬШЕ?..

Подведем итоги. Мы выяснили, чему равна производящая функция для диаграмм Юнга в прямоугольнике; оказалось, что эта функция ведет себя очень похоже на обычный биномиальный коэффициент. Нам удалось выписать несколько тождеств на многочлены от  $q$ , которые при подстановке  $q = 1$  дают известные числовые тождества (в частности, бином Ньютона).

Это проявление некоторого общего принципа: у большинства важных комбинаторных объектов и связанных с ними тождеств имеются  $q$ -аналоги; их рассмотрение зачастую позволяет глубже понять природу исходных объектов. Так, например, изучение  $q$ -биномиальных коэффициентов позволило нам вывести производящую функцию для диаграмм Юнга на плоскости (без каких-либо ограничений).

Задачи, которые мы рассмотрели, допускают огромное количество вариаций и обобщений. Так, например, можно рассматривать диаграммы Юнга не на плоскости, а в пространстве — башни из кубиков. В этом случае даже вопрос о количестве диаграмм Юнга внутри прямоугольного параллелепипеда уже становится довольно нетривиальным; ответ на него был получен в начале

XX в. британский военный и математик П. Макмагон. Макмагону же принадлежит и вычисление производящей функции для числа трехмерных диаграмм — как в ограниченной «коробке», так и на плоскости. Последняя производящая функция также записывается в виде бесконечного произведения, похожего на эйлеровское — она выглядит так:

$$P_{3D}(q) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^k)^k}.$$

Доказательство этой формулы изложено, например, в уже упоминавшейся брошюре [6]. Кроме того, много интересного о трехмерных диаграммах Юнга можно прочесть в статье В. Е. Горина «Что можно сложить из кубиков?» ([2]), недавно опубликованной в «Кванте».

Интересно, что дальнейшему обобщению производящая функция Макмагона пока что не поддается — никакого ее аналога для четырехмерных диаграмм Юнга не известно! Точно так же неясно, что является правильным четырехмерным аналогом  $q$ -биномиальных коэффициентов, т.е. как выглядит производящая функция для числа диаграмм Юнга в четырехмерном параллелепипеде. Может быть, кому-то из читателей когда-нибудь удастся ответить на эти вопросы?..

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Л. Городенцев. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1. М.: МЦНМО, 2013
  - [2] В. Е. Горин. Что можно сложить из кубиков? Квант, №3, 2012, 6–11.
  - [3] В. А. Зорич. Математический анализ. Том 1. М.: МЦНМО, 2007
  - [4] С. К. Ландо. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2002
  - [5] С. К. Ландо. Введение в дискретную математику. М.: МЦНМО, 2012
  - [6] Е. Ю. Смирнов. Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопередающиеся матрицы. М.: МЦНМО, 2014.
  - [7] С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс. Математический дивертисмент. М.: МЦНМО, 2011
  - [8] Д. Б. Фукс. О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и упущенных возможностях. Квант, №8, 1981, 12–20
- E-mail address:* [esmirnov@hse.ru](mailto:esmirnov@hse.ru)