Автоматизация построения импликативных теорий

Успехи компьютерных наук в алгебре

Артем Ревенко

ВШЭ, TU Dresden, TU Wien

28 января 2015

Формальные контексты и импликации

Формальный контекст

M - множество признаков.

G - множество объектов.

I - отношение между G и M.

$\mathbb{K} = (G, M, I)$ - контекст.

	all sides equal	some sides equal	has right angle
◊	x	x	
□	x	x	x
▭		x	x
▱		x	

Формальные контексты и импликации

	all sides equal	some sides equal	has right angle
$\Diamond$	x	x	
$\square$	x	x	x
▭		x	x
▱		x	

$\{$all sides equal$\} \to$ some sides equal

Формальный контекст

M - множество признаков.
G - множество объектов.
I - отношение между G и M.
$\mathbb{K} = (G, M, I)$ - контекст.

Импликация $Y \to z,\ Y \subseteq M, z \in M$

$\forall g \in G$: если gIY, то gIz.

Формальные контексты и импликации

Формальный контекст

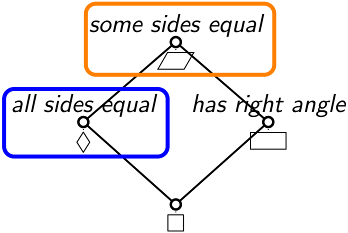
M - множество признаков.
G - множество объектов.
I - отношение между G и M.
$\mathbb{K} = (G, M, I)$ - контекст.

Импликация $Y \to z$, $Y \subseteq M, z \in M$

$\forall g \in G :$ если gIY, то gIz.

	all sides equal	some sides equal	has right angle
◊	x	x	
□	x	x	x
▭		x	x
▱		x	

{all sides equal} $\to$ some sides equal



Базис импликаций

Базис импликаций контекста

Множество импликаций:

- любая верная импликация может быть выведена,
- никакое подмножество не базис.

Example

1. all legs equal $\to$ some sides equal;
2. has right angle $\to$ some sides equal.

Базис импликаций

Базис импликаций контекста

Множество импликаций:

- любая верная импликация может быть выведена,
- никакое подмножество не базис.

Example

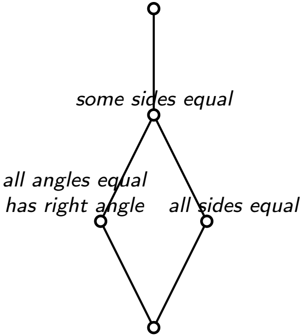
1. all legs equal $\rightarrow$ some sides equal;
2. has right angle $\rightarrow$ some sides equal.

Контрпример

	all sides equal	some sides equal	has right angle
			x

Исследование признаков четырехугольников

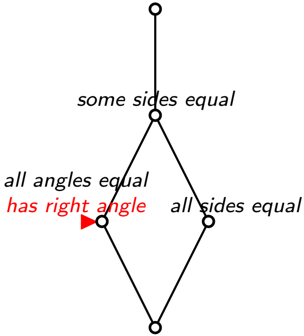
	all sides equal	some sides equal	has right angle	all angles equal
	x	x		
	x	x	x	x
		x	x	x
		x		
				



1. all sides equal $\to$ some sides equal;
2. all angles equal $\to$ some sides equal, has right angle;
3. has right angle $\to$ some sides equal, all angles equal.

Исследование признаков четырехугольников

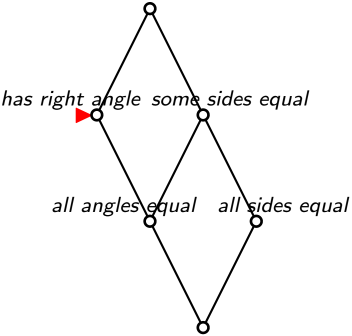
	all sides equal	some sides equal	has right angle	all angles equal
◊	x	x		
□	x	x	x	x
▭		x	x	x
▱		x		
				
			x	



1. all sides equal → some sides equal;
2. all angles equal → some sides equal, has right angle;
3. has right angle → some sides equal, all angles equal.

Исследование признаков четырехугольников

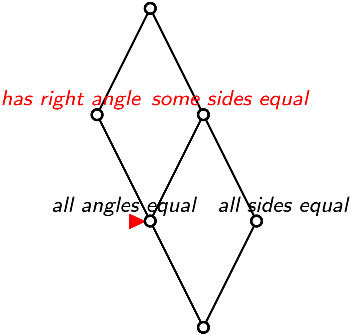
	all sides equal	some sides equal	has right angle	all angles equal
	x	x		
	x	x	x	x
		x	x	x
		x		
				
			x	



1. all sides equal → some sides equal;
2. all angles equal → some sides equal, has right angle;
3. has right angle, some sides equal → all angles equal.

Исследование признаков четырехугольников

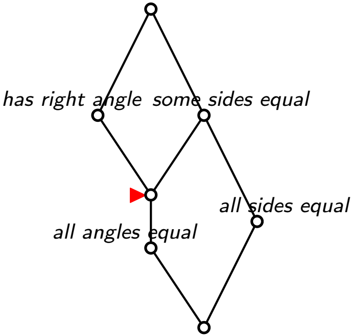
	all sides equal	some sides equal	has right angle	all angles equal
	x	x		
	x	x	x	x
		x	x	x
		x		
				
			x	
		x	x	



1. all sides equal $\to$ some sides equal;
2. all angles equal $\to$ some sides equal, has right angle;
3. has right angle, some sides equal $\to$ all angles equal.

Исследование признаков четырехугольников

	all sides equal	some sides equal	has right angle	all angles equal
	x	x		
	x	x	x	x
		x	x	x
		x		
				
			x	
		x	x	



1. all sides equal $\to$ some sides equal;
2. all angles equal $\to$ some sides equal, has right angle;
3. has right angle, all sides equal $\to$ all angles equal.

Постановка задачи

Цель

Автоматизации построения импликативных теорий в:

1. Алгебраические тождества ограниченной длины (2, 1, 0);
2. Классы параметрической выразимости функций многозначной логики (бицентрализаторы);
3. Свойства функций на множествах.

Постановка задачи

Цель

Автоматизации построения импликативных теорий в:

1. Алгебраические тождества ограниченной длины (2, 1, 0);
2. Классы параметрической выразимости функций многозначной логики (бицентрализаторы);
3. Свойства функций на множествах.

Не цель

- Создание программного обеспечения;
- Прорыв в области исследования.

Постановка задачи

Цель

Автоматизации построения импликативных теорий в:

1. Алгебраические тождества ограниченной длины (2, 1, 0);
2. Классы параметрической выразимости функций многозначной логики (бицентрализаторы);
3. Свойства функций на множествах.

Не цель

- Создание программного обеспечения;
- Прорыв в области исследования.

Мотивация

- ИТ дают широкие возможности рассуждения;
- Концентрация на трудностях;
- Интерес в выбранных областях.

Важность для эквациональных теорий [McN92]

$$
\begin{tikzcd}
& \text{Decidable elementary theory} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Decidable implicational theory} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \text{Uniformly solvable word problem} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{Decidable equational theory} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Solvable word problems} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \text{For each } n\text{, the equational } n\text{-variable theory is decidable} &
\end{tikzcd}
$$

Обзор похожих исследований I

Проект Graffiti [DeL05]

The *path covering number* of a graph G, denoted by $\rho(G)$, is the minimum number of vertex disjoint paths needed to cover the vertices of the graph. The *number of leaves* of a tree is the number of vertices of degree one. We put $\Delta(G)$ to be the maximum degree of a graph G.

CONJECTURE 2.1. If the graph G is a tree, then $\rho(G) \geq \Delta(G) - 1$.

CONJECTURE 2.2. If the graph G is a tree, then $\rho(G) \geq \left\lceil \frac{\text{number of leaves}}{2} \right\rceil$.

Обзор похожих исследований II

ИП в “главной книге” по АФП [GW99].

Приложения:

- Свойства конечных решеток [Dau00];
- Расширения булевых алгебр [KPR06];
- Свойства функций на множествах [RK12];

- В сети [JR13];
- Политические исследования `www.hse.ru/science/scifund/proekt_ts/dis_mat`.

Расширения:

- Нечеткость [Glo12];
- Учет исключений [D.B13].

Тождества

Термы $T_\Phi(X)$

- $X \in T_\Phi(X)$;
- Если $p_1, \ldots p_n \in T_\Phi(X)$ и $f \in f^{(n)}$, то $f(p_1, \ldots p_n) \in T_\Phi(X)$.

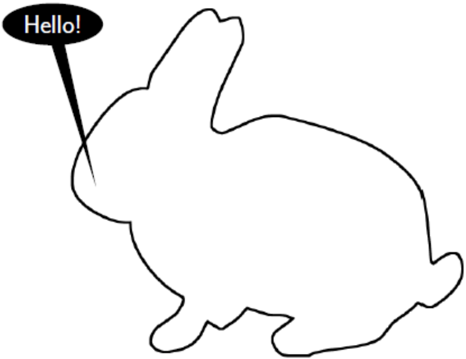
Тождество

Пара (p, q), $p, q \in T_\Phi(X)$, пишут $p \equiv q$.

Операции Φ:		Переменные X:
бинарная:	$f^{(2)}$ или $*$	
унарная:	$f^{(1)}$ или $\triangleright$	x, y, z
нулярная:	$f^{(0)}$ или a	

BUNny

B	U	N	n	y
i	n	u		
n	a	l		
a	r	l		
r	y	a		
y		r		
		y		



Банни

Множество вместе с бинарной, унарной и нулярной операциями.

Постановка задачи

Постановка задачи

Автоматическое построение импликативной теории алгебраических тождеств длины до 5 включительно (70 тождеств).

Постановка задачи

Постановка задачи

Автоматическое построение импликативной теории алгебраических тождеств длины до 5 включительно (70 тождеств).

Связанные результаты

- Основания универсальной алгебры [Bir35];
- Результаты по разрешимости эквациональных теорий [Per67], [Tay79], [Deh11];
- Связанные открытые вопросы [BS81].

Тесно связанная работа

Диссертация П. Кестлера [Kes13].

Необходимость бесконечных банни

Lemma ([Kes13])

Для конечных банни из $x \equiv a * (\triangleright x)$ следует $x \equiv \triangleright(a * x)$.

Контрпример: банни $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}_0, *, \triangleright, a)$

$$m * n := \begin{cases} n - 1, & \text{если } m = 0 \text{ и } n \geq 1; \\ 0, & \text{в другом случае.} \end{cases}$$

$$\triangleright n := n + 1;$$

$$a := 0.$$

Структура бесконечных контрпримеров

$\mathfrak{B} \not\models \Sigma \cup \{x \equiv pq(x), pr_1(x) \equiv pr_2(x)\} \to r_1(x) \equiv r_2(x)$

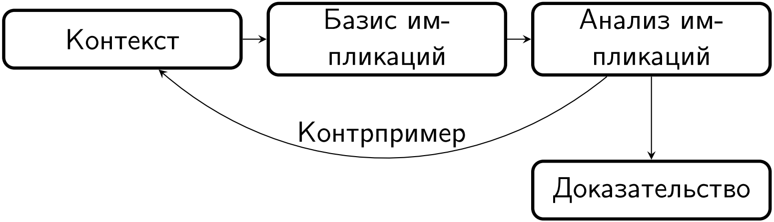
Пусть $r_1(c_v) =: c_0 \neq c_0^* := r_2(c_v)$. Тогда:

1. $Q := \{q^n(c_0), q^n(c_0^*),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ содержит бесконечную последовательность элементов;
2. $\nexists a_0, a_0^* \in B :\ q(a_0) = c_0$ и $q(a_0^*) = c_0^*$.

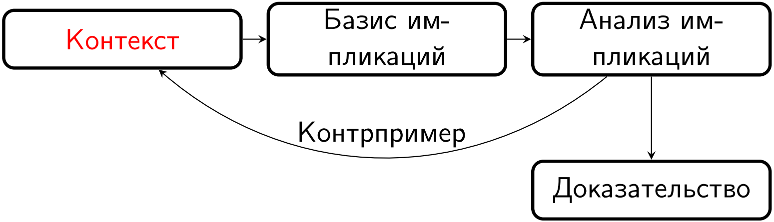
Тогда $B = B_{fin} \cup Q$.

В случае тождеств длины не более 5: $|B_{fin}| \leq 3$, $q(c_i) = c_{i+2}$.

Исследование алгебраических тождеств



Исследование алгебраических тождеств

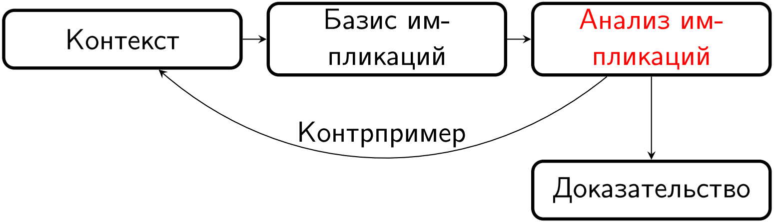


- Сначала генерируется (“маленький”) начальный контекст;
- На каждой итерации контекста “редуцируется”.

Исследование алгебраических тождеств

- Библиотека АФП для Python https://github.com/artreven/fca.

Исследование алгебраических тождеств

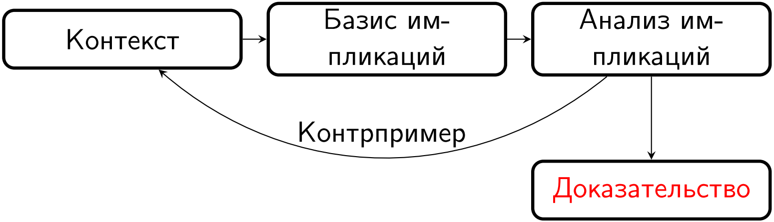


- Попытаться доказать;
- Попытаться найти (конечный или бесконечный) контрпример.

Исследование алгебраических тождеств

- Mace4 (из `http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4/`);
- `InfBunny.find`.

Исследование алгебраических тождеств



- Prover9 (из `http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4/`).

Результаты

Общее число обработанных банни	27266
Число необходимых конечных банни	626
Число необходимых бесконечных банни	1529
Количество доказанных импликаций	4398

Затрачено времени	$\simeq$78 часов

Выводимость в исчислениях

Формула выводима?

Знание следствий.

Формула невыводима?

Знание свойства исчисления:

1. полнота;
2. непротиворечивость;
3. разрешимость.

Выводимость в исчислениях

Формула выводима?

Знание следствий.

Обнаружение выводимости $\rightsquigarrow$ применение правил вывода.

Формула невыводима?

Знание свойства исчисления:

1. полнота;
2. непротиворечивость;
3. разрешимость.

Обнаружение невыводимости $\rightsquigarrow$?

Выводимость в исчислениях

Формула выводима?

Знание следствий.

Обнаружение выводимости $\rightsquigarrow$ применение правил вывода.

Формула невыводима?

Знание свойства исчисления:

1. полнота;
2. непротиворечивость;
3. разрешимость.

Обнаружение невыводимости $\rightsquigarrow$ использование отделяющих средств.

Отделяющие средства

Идея

Множество формул Σ, формула A и отделящий объект β.

1. A выводимо из Σ,
2. Σ в отношении R к β.

$\iff$ A в отношении R к β.

Отделяющие средства

Идея

Множество формул Σ, формула A и отделящий объект β.

1. A выводимо из Σ,
2. Σ в отношении R к β.

$\iff$ A в отношении R к β.

Example

Пропозициональное исчисление булевы алгебры;

Исчисление Гёделя-Даммета геделевы цепи.

Выразимость функций

Example (Композиция: импликация $\to$, отрицание $\neg$, дизъюнкция $\vee$)

- $x \to y \iff \neg x \vee y$;
- $x \vee y \iff \neg x \to y$.

Выразимость функций

Example (Композиция: импликация $\to$, отрицание $\neg$, дизъюнкция $\vee$)

- $x \to y \iff \neg x \vee y$;
- $x \vee y \iff \neg x \to y$.

Исчисление выразимости

Аксиомы Переменные;

Правила
1. Подстановка $\frac{f,\ g}{f[x/g]}$;
2. Замена $\frac{f,\ f \Leftrightarrow g}{g}$.

Отделяющие средства?

Полиморфизмы и инварианты

Функция сохраняет отношение (ρ – отношение, f – функция)

$$
\begin{array}{ccc|l}
f & f & \dots & \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{x_{11}} & x_{12} & \multicolumn{1}{c|}{\dots} & \in \rho \\
\multicolumn{1}{|c}{x_{21}} & x_{22} & \multicolumn{1}{c|}{\dots} & \in \rho \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{f(x_{11}, x_{21}, \dots)} & f(x_{12}, x_{22}, \dots) & \multicolumn{1}{c|}{\dots} & \in \rho \\
\hline
\end{array}
$$

f – *полиморфизм* ρ, ρ – *инвариант* f.

Полиморфизмы и инварианты

Функция сохраняет отношение (ρ – отношение, f – функция)

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
f & f & \dots
\end{array}
\\
\begin{array}{|ccc|c}
\hline
x_{11} & x_{12} & \dots & \in \rho \\
x_{21} & x_{22} & \dots & \in \rho \\
\hline
f(x_{11}, x_{21}, \dots) & f(x_{12}, x_{22}, \dots) & \dots & \in \rho \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

f – *полиморфизм* ρ, $\quad\rho$ – *инвариант* f.

Constraint satisfaction problem $\leftrightarrow$ множество отношений.
Сложность может быть выведена из вида отношений [Sch78].

Полиморфизмы и инварианты

Функция сохраняет отношение (ρ – отношение, f – функция)

$$
\begin{array}{c|ccc|l}
\multicolumn{1}{c}{} & f & f & \multicolumn{1}{c}{\dots} & \\
\hline
& x_{11} & x_{12} & \dots & \in \rho \\
& x_{21} & x_{22} & \dots & \in \rho \\
\hline
& f(x_{11}, x_{21}, \dots) & f(x_{12}, x_{22}, \dots) & \dots & \in \rho \\
\hline
\end{array}
$$

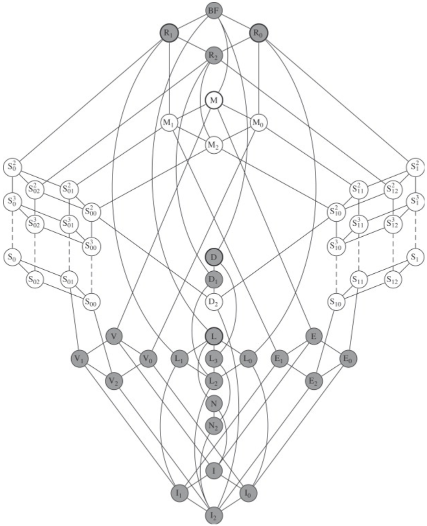
f – полиморфизм ρ, ρ – инвариант f.

Constraint satisfaction problem $\leftrightarrow$ множество отношений.
Сложность может быть выведена из вида отношений [Sch78].

Функция $\Rightarrow$ отношение: $(x_1, \dots, g(x_1, \dots)) \in \rho_g$.

Решетка Поста [Pos42]

Двузначный носитель



Решетка Данильченко [Dan77]

Трехзначный носитель

п.неразложимая функция из P_3 п.экв. некоторой функции из Γ . Это будет следовать из теорем 4 и 5 (следствия 3 и 4).

Теорема 4. Система Γ относительно п.выразимости является деревом, имеющим 44 атома, диаграмма которого указана на рис.I

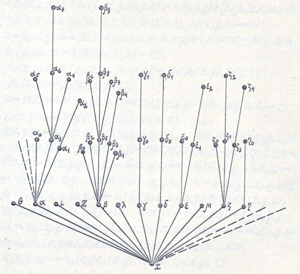


Рис.I

Заметим, что на рис.I явно приведена лишь часть этого дерева, содержащая 44 функции системы Γ , из которых I2 - атомы; остальные I53 функции системы Γ ,двойственные тем или иным из этих 44 функций, находятся в остальных частях дерева, намеком на присутствие которых служат пунктирные линии.

Переходя к доказательству теоремы, конкретизируем п.выразимости, указанные на рис.I.

$y=\alpha(x)\Leftrightarrow\alpha_0(x)=x$; $\alpha(x)=\alpha_1(x,x)=\alpha_3(\alpha_3(x))$; $\alpha_1(x,y)=$ $=\alpha_2(x,\alpha_2(x,y))$; $\alpha_3(x)=\alpha_4(x,x)=\alpha_5(\alpha_5(x,x),x)=\alpha_6(x,x)$; $\alpha_6(x,y)=\alpha_7(\alpha_7(x,y),x)$; $\beta(x)=\beta_0(\beta_0(x))=\beta_1(x,x)=\beta_2(x,x)=$ $=\beta_3(x,x,x)=\beta_5(x,x)$; $u=\beta_3(x,y,z)\Leftrightarrow\beta_4(\beta_4(x,y,u),x,z)=$ $=\beta_4(x,x,x))\&(\beta_4(\beta_4(x,y,u),y,z)=\beta_4(y,y,y))\&(\beta_4(\beta_4(x,u,z),y,z)=$ $=\beta(z,z,z))\&(\beta_4(\beta_4(x,y,u),\beta_4(x,u,z),\beta_4(u,y,z))=u)$;

$z=\beta_5(x,y)\Leftrightarrow\exists u\exists v((\beta_7(u,u)=\beta_7(x,y))\&(\beta_7(v,v)=\beta_7(y,x))\&$ $\&(\beta_7(u,v)=z)\&(\beta_7(v,u)=z))$;

$\beta_5(x,y)=\beta_6(\beta_6(x,y),\beta_6(y,x))=\beta_8(\beta_8(x,y),\beta_8(y,x))$;

$\beta_8(x,y)=\beta_9(\beta_9(x,y),y)$;

$z=\gamma(x,y)\Leftrightarrow(\gamma_0(x,y,z)=z)\&(\gamma_0(x,z,y)=y)\&(\gamma_0(y,z,x)=x)$;

$\gamma_0(x,y,z)=q(q(q(x,y,z),z,y),z,x)$, где

$q(x,y,z)=\gamma_1(h(x,y),\gamma_1(h(x,z),h(y,z)))$, а $h(x,y)=\gamma(\gamma(x,y),\gamma_1(x,y))$

и $z=\gamma(x,y)\Leftrightarrow(\gamma_1(\gamma_1(x,z),y)=y)\&(\gamma_1(\gamma_1(y,z),x)=x)\&(\gamma_1(\gamma_1(x,z),z)=z)$;

$\delta(x,y)=\delta_0(x,y,y)$; $u=\delta_0(x,y,z)\Leftrightarrow(\delta_1(\delta_1(x,y,u),x,z)=$ $=\delta_1(\delta_1(x,x,y),x,z))\&(\delta_1(\delta_1(x,y,u),y,z)=\delta_1(\delta_1(y,y,x),y,z))\&$ $\&(\delta_1(\delta_1(x,u,z),y,z)=\delta_1(\delta_1(z,z,x),z,y))\&(\delta_1(\delta_1(x,y,u),$ $\delta_1(x,u,z),\delta_1(u,y,z))=u)$; $\varepsilon(x,y)=\varepsilon_0(x,y,y)=\varepsilon_1(x,y,y)$;

$u=\varepsilon_1(x,y,z)\Leftrightarrow(\varepsilon_2(u,\varepsilon_2(x,y,z),x)=u)\&(\varepsilon_2(u,y,z)=$ $=\varepsilon_2(\varepsilon_2(x,y,z),z,z))\&(\varepsilon_2(u,z,x)=\varepsilon_2(u,y,x))$;

$\zeta(x,y,z)=\zeta_1(\zeta_1(\zeta_1(x,y),z),\zeta_1(\zeta_1(z,y),x))$;

$\zeta(x,y,z)=\zeta_3(\zeta_3(\zeta_3(\zeta_3(x,y,z),z,y),z,y),y,z)$;

$u=\zeta(x,y,z)\Leftrightarrow(\zeta_0(u,x,z)=\zeta_0(x,y,z))\&(\zeta_0(u,y,z)=u)\&$ $\&(\zeta_0(y,u,z)=y)\&(\zeta_0(u,x,y)=u)$;

$z=\zeta_1(x,y)\Leftrightarrow(\zeta_2(x,z)=x)\&(\zeta_2(z,x)=z)\&(\zeta_2(z,y)=\zeta_2(y,x))$;

$\zeta_3(x,y,z)=\zeta_4(\zeta_4(z,x,y),\zeta_4(y,z,x),z)$; $\eta(x,y)=\eta_0(x,y,y)$.

Остается показать, что для любых функций f и g из Γ , если f п.выразима через g , то это видно из рис.I. Для этого для каждой функции f дерева, приведем такой список функций C_f , что каждая функция из C_f перестановочна с f и функциями ,

Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t
f_0^u	$\times$	$\times$	$\times$
f_2^u	$\times$	$\times$	$\times$
f_{232}^t	$\times$	$\times$	

$\emptyset \to f_2^u$

$\emptyset \to f_0^u$

Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t
f_0^u	$\times$	$\times$	$\times$
f_2^u	$\times$	$\times$	$\times$
f_{232}^t	$\times$	$\times$	

$\emptyset \to f_2^u$

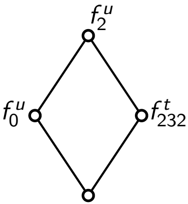
$\emptyset \to f_0^u$

Контрпример: f_1^u

Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t
f_0^u	×	×	×
f_2^u	×	×	×
f_{232}^t	×	×	
f_1^u		×	×

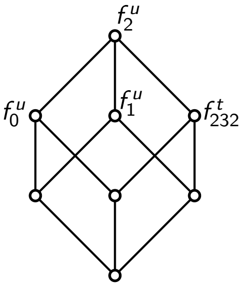
$\emptyset \to f_2^u$



Решетка функций на двузначном носителе

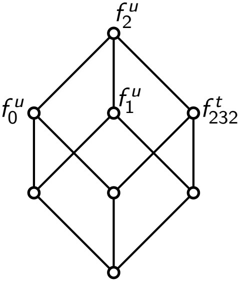
	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t	f_1^u
f_0^u	$\times$	$\times$	$\times$	
f_2^u	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
f_{232}^t	$\times$	$\times$		$\times$
f_1^u		$\times$	$\times$	$\times$

$\emptyset \to f_2^u$



Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t	f_1^u
f_0^u	$\times$	$\times$	$\times$	
f_2^u	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
f_{232}^t	$\times$	$\times$		$\times$
f_1^u		$\times$	$\times$	$\times$



$\emptyset \to f_2^u$

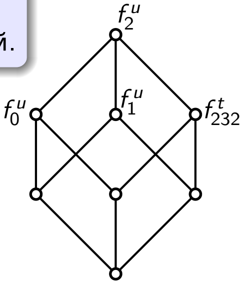
Нет контрпримеров!

Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t	f_1^u
f_0^u	×	×	×	
f_2^u	×	×	×	×
f_{232}^t	×	×		×
f_1^u		×		

Решение

Увеличить размерность.
Найти верхних/нижних соседей.

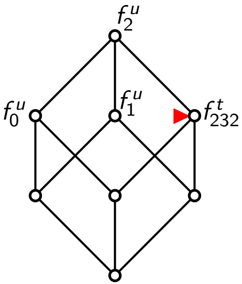


$\emptyset \to f_2^u$

Нет контрпримеров!

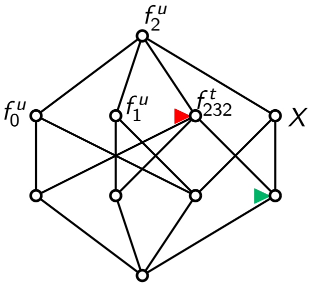
Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t	f_1^u
f_0^u	$\times$	$\times$	$\times$	
f_2^u	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
f_{232}^t	$\times$	$\times$		$\times$
f_1^u		$\times$	$\times$	$\times$
X		$\times$	$\times$	



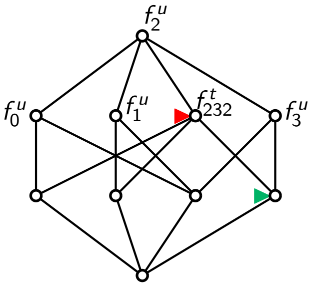
Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t	f_1^u	X
f_0^u	$\times$	$\times$	$\times$		
f_2^u	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
f_{232}^t	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
f_1^u		$\times$	$\times$	$\times$	
X		$\times$	$\times$		$\times$



Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t	f_1^u	f_3^u
f_0^u	×	×	×		
f_2^u	×	×	×	×	×
f_{232}^t	×	×		×	×
f_1^u		×	×	×	
f_3^u		×	×		×



Новый элемент
(сосед (f_2^u, f_{232}^t)):

$X = f_3^u$

Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t	f_1^u	f_3^u	f_{150}^t
f_0^u	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$
f_2^u	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
f_{232}^t	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	
f_1^u		$\times$	$\times$	$\times$		$\times$
f_3^u		$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
f_{150}^t	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$

Новый элемент
(сосед (f_0^u, f_1^u, f_2^u)):

f_{150}^t

Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t	f_1^u	f_3^u	f_{150}^t	f_{14}^b
f_0^u	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	$\times$
f_2^u	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
f_{232}^t	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$		
f_1^u		$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	
f_3^u		$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
f_{150}^t	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	
f_{14}^b	$\times$	$\times$			$\times$		$\times$

$f_0^u, f_2^u, f_3^u \to f_1^u$

...

Контрпример: f_{14}^b

Решетка функций на двузначном носителе

	f_0^u	f_2^u	f_{232}^t	f_1^u	f_3^u	f_{150}^t	f_{14}^b	f_8^b
f_0^u	×	×	×			×	×	×
f_2^u	×	×	×	×	×	×	×	×
f_{232}^t	×	×		×	×			
f_1^u		×	×	×		×		
f_3^u		×	×		×	×	×	×
f_{150}^t	×	×		×	×	×		
f_{14}^b	×	×			×		×	
f_8^b	×	×			×			×

Новый элемент
(сосед (f_0^u, f_2^u, f_3^u)):

f_8^b

Решетка функций на двузначном носителе

	f^u_0	f^u_2	f^t_{232}	f^u_1	f^u_3	f^t_{150}	f^b_{14}	f^b_8
f^u_0	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	$\times$	$\times$
f^u_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
f^t_{232}	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$			
f^u_1		$\times$	$\times$	$\times$		$\times$		
f^u_3		$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
f^t_{150}	$\times$	$\times$		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
f^b_{14}	$\times$	$\times$		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
f^b_8	$\times$	$\times$			$\times$			$\times$

Завершено!

Новый элемент
(сосед (f^u_0, f^u_2, f^u_3)):

f^b_8

Коммутирующие функции

x_1, x_2	0,0	0,1	1,0	1,1
$g(x_1, x_2)$	1	1	0	1

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	1
0,1	0
1,0	0
1,1	1

	f	f	f
g	0	1	
g	0	0	
g			

Коммутирующие функции

x_1, x_2	0,0	0,1	1,0	1,1
$g(x_1, x_2)$	1	1	0	1

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	1
0,1	0
1,0	0
1,1	1

	f	f	f
g	0	1	1
g	0	0	
g			

Коммутирующие функции

x_1, x_2	0,0	0,1	1,0	1,1
$g(x_1, x_2)$	1	1	0	1

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	1
0,1	0
1,0	0
1,1	1

	f	f	f
g	0	1	1
g	0	0	1
g			

Коммутирующие функции

x_1, x_2	0,0	0,1	1,0	1,1
$g(x_1, x_2)$	1	1	0	1

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	1
0,1	0
1,0	0
1,1	1

	f	f	f
g	0	1	1
g	0	0	1
g	1		

Коммутирующие функции

x_1, x_2	0,0	0,1	1,0	1,1
$g(x_1, x_2)$	1	1	0	1

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	1
0,1	0
1,0	0
1,1	1

	f	f	f
g	0	1	1
g	0	0	1
g	1	0	

Коммутирующие функции

x_1, x_2	0,0	0,1	1,0	1,1
$g(x_1, x_2)$	1	1	0	1

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	1
0,1	0
1,0	0
1,1	1

	f	f	f
g	0	1	1
g	0	0	1
g	1	0	$\neq$

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	$f_{0,0}$
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

	f	f
g_1	m_1	
g_1	m_2	
g_1		

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	$f_{0,0}$
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

	f	f
g_1	0	
g_1	0	
g_1		

$m_1 = 0$

$m_2 = 0$

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	$f_{0,0}$
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

	f	f
g_1	0	0
g_1	0	0
g_1		

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	1
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

	f	f
g_1	0	0
g_1	0	0
g_1	1	

$f_{0,0} = 1$

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	1
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

	f	f
g_1	0	0
g_1	0	0
g_1	1	0

$\neq$

$f_{0,0} = 1$
Backtrack!

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:
$\{g_1, g_2, \ldots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	0
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

$=$

	f	f
g_1	0	0
g_1	0	0
g_1	0	0

$f_{0,0} = 0$

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:

$\{g_1, g_2, \ldots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	0
0,1	1
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

$=$

	f	f
g_1	0	0
g_1	1	0
g_1	1	0

$m_1 = 0$

$m_2 = 1$

$f_{0,0} = 0$

$f_{0,1} = 1$

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:

$\{g_1, g_2, \dots\} \rightarrow g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	0
0,1	1
1,0	1
1,1	$f_{1,1}$

$=$

	f	f
g_1	1	0
g_1	0	0
g_1	1	0

$m_1 = 1$

$m_2 = 0$

$f_{0,0} = 0$

$f_{0,1} = 1$

$f_{1,0} = 1$

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:

$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	0
0,1	1
1,0	1
1,1	1

$=$

	f	f
g_1	1	0
g_1	1	0
g_1	1	0

$m_1 = 1$

$m_2 = 1$

$f_{0,0} = 0$

$f_{0,1} = 1$

$f_{1,0} = 1$

$f_{1,1} = 1$

Алгоритмы: Обоснованное предположение

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_1(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	0
0,1	1
1,0	1
1,1	1

Завершено!

g_1	1	0
g_1	1	0

$f_{0,0} = 0$
$f_{0,1} = 1$
$f_{1,0} = 1$
$f_{1,1} = 1$

Алгоритмы: От противного

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_{not}(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	$f_{0,0}$
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

	f	f
g_{not}	m_1	
g_{not}	m_2	
g_{not}		

Алгоритмы: От противного

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_{not}(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	$f_{0,0}$
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

	f	f
g_{not}	m_1	0
g_{not}	m_2	0
g_{not}		

$g_{not}(m_1) = g_{not}(m_2) = 0,$
Then $m_1, m_2 \in \{0, 1\}$.

Алгоритмы: От противного

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_{not}(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	0
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

	f	f
g_{not}	m_1	0
g_{not}	m_2	0
g_{not}	m_3	0

$m_1, m_2 \in \{0, 1\}$.
$f_{0,0} = 0$
Then no way to not commute as $g_{not}(x) = 0$.

Алгоритмы: От противного

Импликация:
$\{g_1, g_2, \dots\} \to g_{not}$

x	0	1
$g_{not}(x)$	0	0

Контрпример:

x_1, x_2	$f(x_1, x_2)$
0,0	1
0,1	$f_{0,1}$
1,0	$f_{1,0}$
1,1	$f_{1,1}$

	f	f
g_{not}	m_1	0
g_{not}	m_2	0
g_{not}	m_3	1

$m_1, m_2 \in \{0, 1\}$.
$f_{0,0} = 1$
Then to not commute $m_3 \in \{0, 1\}$.

Результаты на трехзначном носителе

Количество функций	197
Элементов в решетке	2986
Количество "новых" функций	39
Количество импликаций	58487
Времени затрачено	$\simeq$ 2 недели

Заключение и перспективы

Заключение

- Исследование Признаков позволяет автоматизировать исследования в сложных областях, концентрируя внимание на сложных вопросах;
- Модификации позволяют достичь еще лучших результатов;
- Необходимо экспертное знание в области применения.

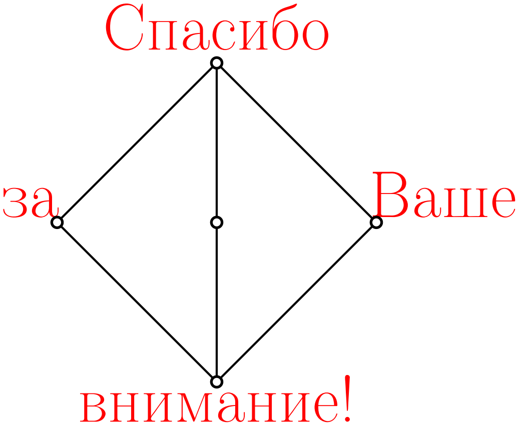
Заключение и перспективы

Заключение

- Исследование Признаков позволяет автоматизировать исследования в сложных областях, концентрируя внимание на сложных вопросах;
- Модификации позволяют достичь еще лучших результатов;
- Необходимо экспертное знание в области применения.

Перспективы

- Нахождение новых областей применения (нематематических?);
- Формализация шаблона для создания алгоритмов;
- Создание сервиса для общего пользования.



http://github.com/artreven

G. Birkhoff.
On the structure of abstract algebras.
In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 31, pages 433–454. Cambridge Univ Press, 1935.

S. Burris and H.P. Sankappanavar.
A course in universal algebra, volume 78.
Springer-Verlag New York, 1981.

A.F. Danil'chenko.
Parametric expressibility of functions of three-valued logic.
Algebra and Logic, 16(4):266–280, 1977.

F. Dau.
Implications of properties concerning complementation in finite lattices.
In: Contributions to General Algebra 12 (D. Dorninger et al., eds.), Proceedings of the 58th workshop on general algebra "58. Arbeitstagung Allgemeine Algebra", Vienna, Austria, June 3-6, 1999, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, pages 145–154, 2000.

D.Borchmann.
Model exploration by confidence with completely specified counterexamples.
Ltcs, TU Dresden, 2013.

M. Dehn.
Über unendliche diskontinuierliche gruppen.
Mathematische Annalen, 71(1):116–144, 1911.

E. DeLaVina.
Graffiti. pc: a variant of graffiti.
DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 69:71, 2005.

C.V. Glodeanu.
Attribute exploration in a fuzzy setting.
In *ICFCA 2012 International Conference on Formal Concept Analysis*, page 114, 2012.

B. Ganter and R. Wille.
Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations.
Springer, 1999.

R. Jäschke and S. Rudolph.
Attribute exploration on the web.
ICFCA 2013, pages 19–35, 2013.

P. Kestler.
Strukturelle Untersuchungen eines Varietätenverbandes von Gruppoiden mit unärer Operation und ausgezeichnetem Element.
PhD thesis, TU Bergakademie, Freiberg, 2013.

L. Kwuida, C. Pech, and H. Reppe.
Generalizations of boolean algebras. an attribute exploration.
Mathematica Slovaca, 56(2):145–165, 2006.

G.F. McNulty.
A field guide to equational logic.
Journal of symbolic computation, 14(4):371–397, 1992.

P. Perkins.
Unsolvable problems for equational theories.
Notre Dame Journal of Formal Logic, 8(3):175–185, 1967.

E.L. Post.
The two-valued iterative systems of mathematical logic.
Number 5. Princeton University Press, 1942.

A. Revenko and S.O. Kuznetsov.
Attribute exploration of properties of functions on sets.
Fundamenta Informaticae, 115(4):377–394, 2012.

T.J. Schaefer.
The complexity of satisfiability problems.
In *Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '78, pages 216–226, New York, NY, USA, 1978. ACM.

W. Taylor.
Equational logic.
University of Houston, Department of Mathematics, 1979.