

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

УДК: 517  
№ госрегистрации: 01201362559  
Инв.№:

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор НИУ ВШЭ, к.э.н.

М.М. Юдкевич

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ,  
ПОЛИТИЧЕСКОЙ И ФИНАНСОВОЙ СФЕРАХ

(заключительный)

Шифр: ТЗ-87

Руководители темы:

зав. МНУЛ анализа и выбора решений,  
д.техн.н.

Ф.Т. Алескеров

гл.н.с. МНУЛ анализа и выбора решений, д.н., PhD

Э. Маскин

Москва 2014

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Соруководители темы:

Зав. лабораторией, д.т.н., зав. каф., проф. \_\_\_\_\_ Ф.Т. Алескеров

(введение, заключение)

Гл. научн. сотр., PhD \_\_\_\_\_ Э. Маскин

(пункт 1.1.1)

Исполнители темы:

Вед. науч. сотр., д.т.н., проф. \_\_\_\_\_ А.С. Беленький (пункты 1.1.2, 1.1.6)

Лаборант, студент \_\_\_\_\_ Д.С. Болкунов (пункт 1.1.3)

Лаборант, студент \_\_\_\_\_ А.М. Борискова (пункт 2.3.2)

Ст.-исследователь, преподаватель, аспирант \_\_\_\_\_ Ю.А. Веселова (пункт 3.2.1)

Мл. науч. сотр., преподаватель, аспирант \_\_\_\_\_ Л.Г. Егорова (пункты 2.3.1, 2.3.4)

Ст.-исследователь, студент \_\_\_\_\_ А.А. Иванов (пункт 3.2.3)

Ст.-исследователь, студент \_\_\_\_\_ Е.О. Калугина (пункт 3.4.1-3.4.3)

Ст.-исследователь, преподаватель, аспирант \_\_\_\_\_ Р.У. Камалова (пункт 3.3.1, 3.3.2)

Науч. сотр., к.э.н., доцент \_\_\_\_\_ Д.С. Карабекян (пункт 2.3.3)

Науч. сотр., к.э.н., доцент \_\_\_\_\_ А.В. Карпов (подраздел 1.2.2-1.2.3)

Мл. науч. сотр., преподаватель \_\_\_\_\_ С.Г. Кисельгоф (пункт 2.3.2)

Вед. науч. сотр., д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ А.А. Лазарев (пункт 1.1.5)

Ведущий эксперт, к.т.н.		А.С. Лебедев	(пункт 2.3.3)
Зам. зав. лаб., д.ф.-м.н., проф.		А.Е. Лепский	(пункты 2.3.7, 2.3.8)
Ст.-исследователь, студент		А.Е. Липачева	(пункты 3.3.4, 3.3.5)
Лаборант, студент		Н.Г. Мещерякова	(пункт 2.3.1)
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.		Б.Г. Миркин	(пункты 2.1.1, 2.1.5)
Ст.-исследователь, аспирант		А.Л. Мячин	(пункт 2.3.3)
Ст.-исследователь, студент		В.В. Олейник	(пункты 3.3.3)
Ст. науч. сотр., к.э.н., доцент		Г.И. Пеникас	(пункт 2.3.6)
Лаборант, студент		А.С. Петров	(пункт 2.1.2)
Ст.-исследователь, студент		В.В. Петрущенко	(пункт 2.3.5)
Вед. науч. сотр., д.т.н., проф.		В.В. Подиновский	(подраздел 3.1)
Ст. науч. сотр., к.т.н., доцент		А.А. Рубчинский	(пункт 2.1.3)
Ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., доц.		К.С. Сорокин	(пункт 1.2.1)
Ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., доц.		А.Н. Субочев	(пункты 2.2.1, 2.2.4)
Ст.-исследователь, аспирант		Д.Н. Тверской	(пункт 2.3.4)
Ст.-исследователь, студент		М.Н. Ушаков	(пункт 1.3.1)
Лаборант, студент		Г.Г. Федин	(пункт 1.1.4)
Ст.-исследователь, студент		Б.Д. Цвелиховский	(пункты 3.2.2)
Мл. науч. сотр., аспирант		Е.Л. Черняк	(пункт 2.1.4)
Мл. науч. сотр., к.ф.-м.н., преподаватель		Д.А. Шварц	(пункты 1.3.2, 1.3.3)
Ст.-исследователь, студент		С.В. Швыдун	(пункты 3.4.4-3.4.7)

## РЕФЕРАТ

Отчет 284 с., 1 ч., 17 рис., 34 табл., 230 источник.

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, ДИЗАЙН МЕХАНИЗМОВ, ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА, ТЕОРИЯ ИГР, ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ.

Объектом исследования были модели и методы принятия решений, дизайна механизмов и интеллектуального анализа данных.

Цель работы – теоретические исследования новых моделей в социально-экономической, политической и финансовой сферах, а также применение разработанных моделей к решению ряда прикладных задач принятия решений.

В частности, целями исследований были:

- исследование новых организационных моделей и механизмов;
- разработка новых теоретико-игровых моделей соавторства публикаций;
- исследование моделей индексов влияния игроков в коалициях;
- разработка и исследование новых методов анализа данных и их применение к задачам автоматизации рубрикации научных статей;
- построение альтернативных версий глобального рейтинга промышленной конкурентоспособности стран с помощью ординальных методов теории коллективного выбора;
- исследование методов сравнения вероятностных распределений (гистограмм, нечетких чисел) и их применение к ранжированию вузов по гистограммам ЕГЭ;
- исследование устойчивости сравнения гистограмм;
- численный анализ поведения биржи методом имитационного моделирования;
- исследования по терии важности критериев при решении многокритериальных задач;

- построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений;
- исследование качественных характеристик индексов поляризованности социальных групп;
- исследование свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции.

Проект направлен на решение как фундаментальных, так и прикладных проблем. Методологической основой исследований были теория игр, теория многокритериального принятия решений, теория индивидуального и коллективного выбора, интеллектуальный анализ данных. Основными средствами и методами исследований были методы оптимизации, численные и комбинаторные методы, методы теории вероятностей и математической статистики, методы кластерного анализа данных, методы анализа текстов и др.

Техническим средством исследования были информационно-вычислительные системы. Для прикладных исследований использовались интернет-данные и базы данных из открытых источников.

В результате выполнения проекта получены следующие результаты:

- в рамках разработки организационных моделей и механизмов построены новые математические модели для оптимизации: а) расписания движения поездов; б) стратегии перемещения порожних вагонов; в) тарифов на перевозки грузов железнодорожным транспортом; г) работы железнодорожной сортировочной станции; д) объемов выработки электроэнергии базовыми генераторами региональных сетей электроснабжения;
- в рамках теоретико-игрового исследования по библиометрии показана эквивалентность вектора Шепли и метода равного разделения долей соавторов при оценивании вклада авторов в совместные публикации;
- построены эффективные алгоритмы для расчета индексов влияния при формировании коалиций с учетом предпочтений агентов в случае, когда все игроки имеют равное количество голосов;

- в рамках теоретико-экспериментальных исследований по автоматической интерпретации текстовых документов: а) проведены экспериментальные исследования методов оценивания релевантности строк и текстов для решения задач автоматизации аннотирования статей; б) разработана и исследована мера близости между двумя предложениями на основе аннотированных суффиксных деревьев; в) разработан метод лифтинга в таксономиях на основе принципа максимального правдоподобия;
- исследованы альтернативные процедуры агрегирования исходных переменных индекса конкурентоспособности промышленного производства, разработанного экспертами ЮНИДО; вместо кардинальной агрегирующей функции применены ординальные методы ранжирования, заимствованные из теории коллективного выбора, основанные на правиле большинства; показано, что некоторые из новых версий глобального рейтинга представляют данный набор критериев лучше, чем исходная версия;
- проанализированы нечеткостные методы сравнения гистограмм применительно к возможности их использования для ранжирования вузов по гистограммам ЕГЭ поступивших абитуриентов; предложена модель «идеально-го» зачисления абитуриентов и показано, что распределение зачисленных абитуриентов в вуз в такой модели будет унимодальным при достаточно общих предположениях о функции предпочтения; поставлена и решена задача оптимального преобразования гистограмм, приводящей ее к унимодальному виду;
- найдены необходимые и достаточные условия на уровень искажений гистограмм, при выполнении которых результат сравнения гистограмм некоторыми наиболее популярными вероятностными методами не изменится;
- проведена серия экспериментов имитационного моделирования поведения игорков на бирже, в которой агенты (трейдеры) являются мелкими и/или средними игроками; найдены условия на параметры модели (опыт/удачливость трейдера, используемые инструменты торговли и др.),

при которых вероятность получения прибыли трейдером достаточно высока/низка;

- в рамках развития теории важности критериев определено и исследовано понятие превосходства в важности одной группы критериев над другой; представлены решающие правила для количественной и специальных видов качественной информации о группах критериев; предложено новое аналитическое правило для многокритериальных задач, в которых критерии с порядковой шкалой нестрого упорядочены по важности;
- в рамках исследования манипулирования правил агрегирования предпочтений были найдены индексы манипулируемости при бесконечно большом числе избирателей для популярных позиционных правил коллективного выбора; была исследована вычислительная сложность различных задач и алгоритмов манипулирования правил агрегирования предпочтений;
- в рамках исследования индексов поляризованности проведено сравнение индексов поляризованности Александрова-Голубенко и Эстебана-Рэя в случаях равного распределения четного и нечетного числа групп; кроме того, проведено сравнение указанных индексов со среднеквадратичным отклонением положений групп от среднего значения; исследована устойчивость этих индексов к малым возмущениям;
- в рамках исследования свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции, проанализировано 28 известных и 190 двухступенчатых процедур многокритериального выбора на предмет удовлетворения существующим нормативным условиям (рациональности, монотонности, пороговой некомпенсируемости), которые характеризуют качественные оценки процедур выбора; кроме того, проанализирована вычислительная сложность рассмотренных процедур выбора.

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	11
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ.....	20
1 Исследования теоретико-игровых и организационных моделей и механизмов .....	20
1.1 Исследование организационных моделей и механизмов .....	20
1.1.1 Обобщение математической модели для отыскания оптимальных объемов выработки и хранения электроэнергии в форме игры многих лиц на полиэдральных множествах стратегий игроков.....	22
1.1.2 Построение новой математической модели для оптимизации работы железнодорожной сортировочной станции .....	36
1.1.3 Построение новой теоретико-игровой модели для отыскания оптимальных тарифов на перевозки грузов железнодорожным транспортом .....	47
1.1.4 Построение новой математической модели для оптимизации стратегии перемещения порожних вагонов .....	51
1.1.5 Обобщение математической модели для отыскания оптимального расписания движения поездов .....	52
1.1.6 Некоторые выводы.....	55
1.2 Теоретико-игровое исследование по библиометрии .....	56
1.2.1 Примеры разделение соавторства .....	59
1.2.2 Основные результаты .....	62
1.2.3 Некоторые выводы.....	65
1.3 Исследования индексов влияния, учитывающих предпочтения участников в анонимных играх .....	65
1.3.1 Основные обозначения и определения .....	66
1.3.2 Индексы влияния, зависящие от предпочтений участников .....	68
1.3.3 Некоторые выводы.....	74
2 Исследования по анализу данных и численному моделированию .....	75
2.1 Применение мер релевантности строка-текст к автоматизации рубрикации научных статей.....	75
2.1.1 Меры релевантности .....	78
2.1.2 Способы представления текста.....	83
2.1.3 Постановка эксперимента .....	85
2.1.4 Результаты эксперимента .....	90
2.1.5 Некоторые выводы.....	95
2.2 Применение ординальных методов теории коллективного выбора к построению альтернативных версий глобального рейтинга промышленной конкурентоспособности стран .....	97
2.2.1 Индекс конкурентоспособности промышленного производства .....	97
2.2.2 Ординальные правила коллективного выбора .....	100
2.2.3 Результаты ранжирования показателей модели СИР с помощью правил коллективного выбора .....	108
2.2.4 Некоторые выводы.....	110
2.3 Применение методов сравнений нечетких чисел к ранжированию вузов по гистограммам ЕГЭ и исследование устойчивости сравнения гистограмм .....	112

2.3.1 Постановка задачи ранжирования гистограмм .....	115
2.3.2 Нормирование данных.....	116
2.3.3 Вероятностные методы сравнения .....	117
2.3.4 Ранжирование нечетких чисел.....	119
2.3.5 Ранжирование вузов по результатам ЕГЭ абитуриентов, поступивших на специальность «Экономика», методами сравнения нечетких чисел .....	130
2.3.6 Унимодальность гистограмм .....	133
2.3.7 Искажения гистограмм .....	139
2.3.8 Некоторые выводы.....	148
<b>2.4 Численный анализ поведения биржи методом имитационного моделирования ....</b>	<b>150</b>
2.3.1 Общее описание модели поведения биржи .....	153
2.3.2 Описание экспериментов .....	155
2.3.3 Результаты моделирования поведения биржи .....	158
2.3.4 Некоторые выводы.....	160
<b>3 Исследование моделей коллективного и многокритериального принятия решений ....</b>	<b>162</b>
3.1 Исследования по теории важности критериев при решении многокритериальных задач.....	162
3.1.1 Сведения из теории важности критериев .....	163
3.1.2 Отношение предпочтения для равноважных групп критериев, состоящих из критериев равной важности .....	169
3.1.3 Определение количественной важности для групп критериев .....	173
3.1.4 Решающие правила, использующие коэффициенты важности .....	177
3.1.5 Аналитическое решающее правило для случая нестрогого упорядочения по важности критериев с порядковой шкалой .....	181
3.1.6 Некоторые выводы.....	183
3.2 Построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений .....	184
3.2.1 Коалиционная манипулируемость для Impartial Culture .....	185
3.2.2 Доля манипулируемых профилей, когда число избирателей стремится к бесконечности.....	190
3.2.3 Сложность манипулирования .....	195
3.2.4 Некоторые выводы.....	206
3.3 Исследование качественных характеристик индексов поляризованности социальных групп .....	207
3.3.1 Индексы поляризованности .....	211
3.3.2 Сравнение индексов Александрова-Голубенко и Эстебана-Рэя .....	213
3.3.3 Сравнение индексов и величины разброса .....	216
3.3.4 Реакция индексов на случайное возмущение .....	217
3.3.5 Некоторые выводы.....	218
3.4 Исследование свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции .....	219
3.4.1 Описание процедур выбора.....	222
3.4.2 Нормативные условия.....	232
3.4.3 Двухступенчатые процедуры выбора .....	239
3.4.4 Исследование свойств процедур выбора .....	242

3.4.5 Вычислительная сложность процедур выбора .....	242
3.4.6 Время выполнения двухступенчатых процедур выбора .....	245
3.4.7 Некоторые выводы.....	246
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	248
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	252
ПРИЛОЖЕНИЕ А Таблицы к подразделу 2.2 .....	274
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Таблицы к подразделу 3.4.....	280

## ВВЕДЕНИЕ

В данном отчете представлены результаты работы в 2014 году коллектива сотрудников Международной научно-учебной лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ над проектом «Теоретическое и численное исследование современных математических моделей в социально-экономической, политической и финансовой сферах». В проекте предусматривалось решение ряда фундаментальных и прикладных задач, связанных с принятием решений в социально-экономической, финансовой и политический сферах, с учетом многокритериальности этих задач, неопределенности данных, возможностью искажения информации и пр.

В соответствии с техническим заданием были проведены исследования в следующих основных научных направлениях:

- исследования теоретико-игровых и организационных моделей и механизмов;
- исследования по анализу данных и численному моделированию;
- исследование моделей коллективного и многокритериального принятия решений.

Работа над данным проектом стала продолжением исследований, проводимых в Международной научно-учебной лаборатории анализа и выбора решений в 2013 г. в ходе работы над проектом «Исследование новых методов и подходов в области математического моделирования и дизайна механизмов в социальной, экономической и политической сфере». В частности, в 2013 г. были получены следующие новые теоретические результаты:

- разработан общий подход к построению двойственных решающих правил в рамках теории важности критериев и приведено оптимизационное решающее правило для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида и аналитическое решающее правило для случая критериев с порядковой шкалой; разработаны аналитические решающие правила для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики общего вида;

- предложена модификация индекса Нитцана–Келли для оценки коалиционной манипулируемости правил коллективного выбора; произведен расчет индексов коалиционной манипулируемости для ряда правил и для различных ограничений на размер коалиции; найден предел максимальной разности индексов манипулируемости в моделях IC и IANC, IAC и IANC при бесконечном увеличении числа избирателей или числа альтернатив;
- показано, что правило порогового агрегирования является в то же время правилом подсчета очков; найдены значения вектора весов, при которых простое правило подсчета очков дает тот же результат, что и правило порогового агрегирования;
- методом анализа паттернов показателей социально-экономического развития решена задача определения регионов РФ со схожей структурой развития, выявлены устойчивые динамические группы регионов, характеризуемые схожей реакцией на изменения внешней среды и одинаковой стратегией развития;
- предложен и исследован новый подход в оболочечном анализе данных в случае неоднородной выборки, основанный на предположении, что неоднородность возникает из-за разницы в приоритетах оцениваемых альтернатив; найдены условия эффективности этого подхода;
- в рамках исследования поведенческой модели биржи была проведена серия экспериментов, которая показала, что существует критический уровень опыта (или удачливости) агентов, такой что агенты, имеющие показатель успешности распознавания движения цен, превышающий этот критический уровень, почти наверняка «выживут» на рынке; если агент не использует возможности маржинальной торговли и заключает сделки только на собственный капитал, то такой критический уровень располагается чуть выше  $\frac{1}{2}$ ; если же трейдер торгует с использованием заемных средств, то критическое значение будет намного выше и для успешной долговременной торговли на рынке потребуется высокая вероятность принятия верных решений;

- в рамках анализа эффективности функционирования финансового сектора экономики было проведено моделирование оптимального хеджирующего соотношения с учетом междневного и внутридневного рисков торговых позиций; показано, что средняя междневная доходность значимо больше средней внутридневной, а дисперсия междневной доходности значимо меньше дисперсии внутридневной;
- на основе разработанной ранее теоретико-игровой модели стратегического взаимодействия банков проанализирован выбор стратегии банком в условиях регулирования системно значимых банков и в зависимости от выбранных параметров регулирования; подтвержден вывод о том, что регулирование может негативно сказаться на уровне кредитования в экономике, и определены основные факторы, влияющие на величину издержек введения регулирования;
- в рамках применения методов теории коллективного выбора для построения ранжирований в различных прикладных задачах, с помощью ординальных методов агрегирования известных библиометрических показателей были построены пять новых (агрегированных) рейтингов научных журналов по экономике, менеджменту и политологии; корреляционный анализ этих ранжирований показал, что они являются более эффективными с точки зрения их согласованности между собой, чем отдельные библиометрические показатели, а также обладают различным уровнем устойчивости;
- исследованы простые и суперпозиционные (двухступенчатые) процедуры коллективного выбора на предмет выполнения для них условий рациональности, монотонности и пороговой некомпенсируемости;
- в рамках разработки организационных моделей и механизмов исследована задача нахождения оптимального объема производства электроэнергии генератором, конкурентоспособность возобновляемых источников энергии, а также конкурентоспособность систем хранения электроэнергии;

- исследована обобщенная проблема банкротства, которая ближе к реальной экономической практике, чем классическая постановка; показано существование ядра в ассоциированной с проблемой игре и построено одноточечное решение (пренуклеолус), гарантирующее отсутствие дальнейших банкротств;
- предложен и исследован новый способ анализа формирования картельных соглашений как некооперативной игры, в которой стратегиями игроков являются коалиции, к которым эти игроки (фирмы) желают примкнуть; предложен и проанализирован набор аксиом относительно функции, которая определяет зависимость итоговой коалиционной структуры от стратегий игроков;
- в рамках исследования обобщенных паросочетаний доказано, что в случае, когда предпочтения заданы интервальными порядками, существует устойчивое паросочетание;
- показана связь между устойчивыми обобщенными паросочетаниями и системами проходных баллов, используемыми при распределении абитуриентов по вузам и других прикладных задачах; показано существование устойчивого паросочетания в случае применения политики «одинакового результата» для абитуриентов, набравших одинаковое число баллов;
- аксиоматически введены и исследованы обобщенные индексы влияния, зависящие от предпочтения участников; показана их взаимосвязь с классическими индексами; доказаны теоремы о среднем для обобщенных индексов влияния;
- в рамках исследования моделей этнополитической напряженности проанализированы основные индексы этнической гетерогенности; дан обзор основных способов нахождения важнейшего параметра этих индексов – расстояния между этническими группами; рассмотрено применение индексов этнической гетерогенности в различных задачах социально-экономического и политического анализа;

- в рамках исследования влияния фракций и групп в Верховной Раде Украины за период 1990–2012 гг. было показано, что влияние фракций и групп, оцененное с помощью индекса Банцафа, не всегда зависит от доли их мест в парламенте; оценки распределения влияния, проведенные с помощью а-индекса, учитывающего предпочтения, и индекса Банцафа часто значительно отличаются; показано, что фракции и группы, занимающие центристское положение, увеличивают свое влияние, в то время как радикальные фракции и группы уменьшают его;
- в рамках исследования по кластер-анализу и автоматической интерпретации текстовых документов развита общая методология агрегирования (суммаризации) данных; проведена серия экспериментов по сравнению методов оценки близости между строкой и текстом для решения задач автоматизации аннотирования статей; показана эффективность разработанной ранее меры близости на основе аннотированного суффиксного дерева по сравнению с двумя наиболее популярными методами, рассматриваемыми в международной научной литературе;
- введено и исследовано понятие волатильности в кластер-анализе данных; разработан новый алгоритм кластеризации на основе вычисления волатильности; проанализированы результаты работы этого алгоритма на модельных и реальных данных; проведено его сравнение с другими алгоритмами;
- в ходе исследования изменений качественных характеристик свидетельств при их комбинировании в рамках теории Демпстера–Шейфера, определен и исследован индекс уменьшения незнания при комбинировании свидетельств; найдены достаточные условия уменьшения этого индекса для некоторых правил комбинирования и определенных типах свидетельств; аксиоматически введена мера конфликта между свидетельствами; найден общий вид билинейной меры конфликта; статистически и аналитически исследована взаимосвязь между мерой конфликта и индексом уменьшения незнания для разных типов свидетельств.

Исследования 2014 года, выполненные в ходе реализации данного проекта, с одной стороны развивают некоторые из указанных исследований прошлого года, а с другой стороны, используют предыдущие исследования.

Методологической основой исследований служат теория игр (в частности, конструирование экономических механизмов), теория коллективного и индивидуального выбора, теория многокритериального принятия решений, интеллектуальный анализ данных. Основными средствами и методами исследований являются численные и комбинаторные методы, процедуры оптимизации, методы статистического и кластерного анализа данных, методы анализа текстов, методы теории вероятностей и др.

Техническим средством исследования служат электронные вычисильные машины. Для прикладных исследований использовались интернет-данные и открытые базы данных по различным тематикам.

Данный отчет состоит из 3 разделов, соответствующих основным направлениям исследований, проводимых в ходе выполнения данного проекта и 2 приложений.

В первом разделе приведены результаты исследования теоретико-игровых и организационных моделей и механизмов. Эти исследования осуществлялись по нескольким направлениям.

В частности, в подразделе 1.1 рассмотрены новые организационные модели и механизмы. В частности, построена математическая модель для отыскания оптимального расписания движения поездов и сформулирована на ее основе задача отыскания оптимальной очередности движения поездов в виде задачи дискретного программирования, построена новая математическая модель для отыскания оптимальной стратегии перемещения порожних вагонов как задача дискретного программирования, построена новая теоретико-игровая модель для отыскания оптимальных тарифов на перевозки грузов железнодорожным транспортом в виде игры многих лиц, построена новая математическая модель для оптимизации работы железнодорожной сортировочной станции, предложена обобщенная математическая модель для оты-

скания оптимальных объемов выработки электроэнергии базовыми генераторами региональных сетей электроснабжения и оптимальных объемов хранения электроэнергии в форме игры многих лиц на полиздральных множествах стратегий игроков.

В подразделе 1.2 в рамках теоретико-игрового исследования по библиометрии показана эквивалентность вектора Шепли и метода равного разделения долей соавторов при оценивании вклада авторов в совместные публикации.

В подразделе 1.3 построены эффективные алгоритмы для расчета индексов влияния при формировании коалиций в случае, когда все игроки имеют равное количество голосов и с учетом предпочтений агентов.

Во втором разделе приведены результаты исследований по анализу данных и численному моделированию.

В подразделе 2.1 приведены результаты теоретико-экспериментальных исследований по автоматической интерпретации текстовых документов.

Подраздел 2.2 посвящен применению ординальных методов теории колективного выбора к построению альтернативных версий глобального рейтинга промышленной конкурентоспособности стран.

В подразделе 2.3 проанализированы нечеткостные методы сравнения гистограмм применительно к возможности их использования для ранжирования вузов по гистограммам ЕГЭ поступивших абитуриентов. Кроме того, в этом же подразделе найдены условия на уровень искажений гистограмм, при выполнении которых результат сравнения гистограмм некоторыми наиболее популярными вероятностными методами не изменится.

Подраздел 2.4 посвящен обсуждению результатов имитационного моделирования поведения трейдеров на бирже.

В третьем разделе отчета приведены результаты исследований моделей коллективного и многокритериального принятия решений.

Так, в подразделе 3.1 представлены результаты исследования по серии важности критериев при решении многокритериальных задач. В частности,

введено определение превосходства в важности одной группы критериев над другой и представлены решающие правила для количественной и специальных видов качественной информации о группах критериев. Эти результаты являются базовыми для развития теории важности критериев для задач с иерархической структурой.

В подразделе 3.2 приведены результаты теоретических и численных исследований моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений. В частности, приведены результаты исследований вычислительной сложности различных задач и алгоритмов манипулирования правил агрегирования предпочтений, а также вычисление индексов манипулируемости при бесконечно большом числе избирателей для популярных позиционных правил коллективного выбора.

Подраздел 3.3 посвящен исследование качественных характеристик индексов поляризованности социальных групп. Прежде всего, в этом подразделе приведены результаты сравнения индексов поляризованности Александра Голубенко и Эстебана-Рэя.

В подразделе 3.4 приведены результаты по исследованию свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции. В частности, в этом подразделе процедуры выбора проанализированы с точки зрения выполнения для них некоторых условий, характеризующих качество этих процедур. Кроме того, в этом же подразделе проанализирована вычислительная сложность процедур выбора.

В Заключении приведены краткие выводы по результатам выполнении НИР и даны рекомендации по конкретному использованию их результатов.

В Приложениях А, Б приведены некоторые дополнительные таблицы и рисунки к отдельным подразделам отчета.

Все полученные результаты являются новыми. Их значимость подтверждена многочисленными апробациями на международных научных форумах (конференциях, семинарах и пр.). Кроме того, практически все представлен-

ные результаты опубликованы, в том числе в реферируемых научных изданиях.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В рамках заявленной темы проекта «Теоретическое и численное исследование современных математических моделей в социально-экономической, политической и финансовой сферах» были проведены исследования в следующих основных научных направлениях:

- исследования теоретико-игровых и организационных моделей и механизмов;
- исследования по анализу данных и численному моделированию;
- исследование моделей коллективного и многокритериального принятия решений.

### 1 Исследования теоретико-игровых и организационных моделей и механизмов

В этом разделе отчета приведены результаты исследований теоретико-игровых и организационных моделей и механизмов. Результаты исследований, отраженные в этом разделе, были получены в следующих теоретических и прикладных направлениях:

- исследование организационных моделей и механизмов;
- теоретико-игровое исследование по библиометрии;
- исследования индексов влияния игроков в коалициях.

#### 1.1 Исследование организационных моделей и механизмов

В 2014 работы в области построения и исследования организационных моделей и механизмов продолжались в следующих направлениях:

- а) обобщение математической модели для отыскания оптимальных объемов выработки электроэнергии базовыми генераторами региональных сетей электроснабжения и оптимальных объемов хранения электроэнергии в форме игры многих лиц на полиэдральных множествах стратегий игроков-всех

групп пользователей, генераторов электроэнергии, и компаний, владеющей линиями электропередач на случай, когда крупные пользователи могут закупать электроэнергию не только непосредственно у генераторов, но и на региональных рынках электроэнергии;

б) построение новой математической модели для оптимизации работы железнодорожной сортировочной станции и формулировка на ее основе задачи оптимизации работы железнодорожной сортировочной станции в виде задачи дискретного программирования;

в) построение новой теоретико-игровой модели для отыскания оптимальных тарифов на перевозки грузов железнодорожным транспортом в виде игры многих лиц, имеющей специальную структуру;

г) построение новой математической модели и формулировка на ее основе задачи отыскания оптимальной стратегии перемещения порожних вагонов компании-владельца вагонного парка в условиях неопределенности спроса на вагоны со стороны потенциальных заказчиков (грузоотправителей) в виде задачи дискретного программирования;

д) обобщение математической модели для отыскания оптимальной очередности расписания движения поездов по напряженным (одноколейным) участкам железнодорожного пути на случай "пакетного" пропуска поездов по этим участкам пути и формулировка на ее основе задачи отыскания этой оптимальной очередности в виде задачи дискретного программирования.

Особенности функционирования сети железных дорог России, связанные, прежде всего, с тем, что локомотивы, железнодорожные пути и станции находятся в ведении ОАО РЖД, в то время как вагонный парк, используемый для перемещения грузов, находится в собственности огромного числа частных владельцев, обусловливают актуальность создания математических моделей для выработки компаниями-владельцами вагонного парка стратегий по работе с грузоотправителями. При этом отыскание как стратегии перемещения (подачи) порожних вагонов грузоотправителю, так и стратегии перемещения вагонов после выгрузки из них грузов и направления их на очистку,

осуществляются как условиях неопределенности спроса на вагоны, так и в условиях конкуренции со стороны других грузовладельцев-участников рынка грузовых перевозок. Учет этой неопределенности практически невозможен без применения математических методов для выработки конкурентоспособных стратегий и гибкой тарифной политики владельцами вагонного парка, и именно учет указанной неопределенности явился основным элементом в исследованиях, проводимых в направлениях в) и г).

Одной из важнейших составляющих железнодорожной сети являются сортировочные станции, на которых выполняются работы по расформированию и формированию грузовых поездов, пропуску транзитных поездов и техническому обслуживанию железнодорожных составов. В общем времени пути грузового состава от пункта отправления к пункту назначения немалая часть времени тратится на прохождение сортировочных станций. Эффективность работы сортировочной станции определяется ее пропускной способностью в сутки, средним временем, которое вагон проводит на сортировочной станции, а также затратами, необходимыми на выполнение всего комплекса работ по формированию и расформированию железнодорожных составов.

Сортировочные станции и напряженные участки пути объективно принаследуют к числу "узких мест" на сети железных дорог и потому оптимизация их работы представляет собой актуальную задачу как для ОАО РЖД, так и для экономики страны в целом и по этой причине составила предмет исследований в 2014 году в направлениях б) и д).

Актуальность и обзор состояния работ в направлении а) обоснованы в соответствующем разделе отчета лаборатории за 2013 год [1].

1.1.1 Обобщение математической модели для отыскания оптимальных объемов выработки и хранения электроэнергии в форме игры многих лиц на полиэдральных множествах стратегий игроков

В [2] была предложена математическая модель взаимодействия базовых генераторов региональных сетей электроснабжения и всех групп крупных

пользователей этих сетей в форме игры многих (более трех) лиц на полиэд-ральных множествах допустимых стратегий игроков в условиях, когда вся потребляемая ими электроэнергия может закупаться или у базовых генераторов или у производителей электроэнергии из возобновляемых источников энергии как непосредственно, так и через системы хранения электроэнергии. Однако, поскольку все эти пользователи могут покупать электроэнергию также на рынках электроэнергии, возникает вопрос: может ли предложенная модель описывать указанное выше взаимодействие в условиях, когда пользователи могут покупать электроэнергию еще и на рынках? Цель настоящего раздела отчета показать, что ответ на этот вопрос утвердительный.

Как и в [2], под крупными пользователями сети электроснабжения региона в дальнейшем понимаются а) индустриальные пользователи (т.е. промышленные предприятия и бизнесы, занятые в сфере производства), компании, снабжающие электроэнергией конечных пользователей сети по низковольтным линиям электропередач, в) группы независимых пользователей, получающие электроэнергию по высоковольтным линиям электропередач.

Для описания функционирования индустриального пользователя (промышленного предприятия)  $i, i \in \overline{1, m}$ , введем следующие переменные и параметры [3]:

$y_i^w(l)$  – объем электроэнергии, который получает индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  из энергии ветра в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ ;

$y_i^{w-st}(l)$  – объем электроэнергии, который получает индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  из энергии ветра в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$  и который направляется в систему хранения электроэнергии, используемую этим пользователем;

$y_i^{w-dir}(l)$  – объем электроэнергии, который получает индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  из энергии ветра в период времени от часа  $l - 1$  до часа

$l, l \in \overline{1, 24}$  и который используется этим пользователем сразу по мере получения этой электроэнергии;

$y_i^s(l)$  – объем электроэнергии, который получает индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  из энергии солнца в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ ;

$y_i^{s-st}(l)$  – объем электроэнергии, который получает индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  из энергии солнца в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$  и который направляется в систему хранения электроэнергии, используемую этим пользователем;

$y_i^{s-dir}(l)$  – объем электроэнергии, который получает индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  из энергии солнца в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$  и который используется этим пользователем сразу по мере получения этой электроэнергии;

$(yM)_i(l)$  – объем электроэнергии, который индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  покупает на рынке электроэнергии (или на нескольких рынках электроэнергии) и который он сможет получить в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ ;

$(yM)_i^{st}(l)$  – объем электроэнергии, который индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  покупает на рынке электроэнергии (или на нескольких рынках электроэнергии) в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ , и который направляется в систему хранения электроэнергии, используемую этим пользователем;

$(yM)_i^{dir}(l)$  – объем электроэнергии, который индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  покупает на рынке электроэнергии (или на нескольких рынках электроэнергии) в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$  и который

используется этим пользователем сразу по мере получения этой электроэнергии;

$y_i^g(l)$  – объем электроэнергии, который получает индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  от генератора в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ ;

$y_i^{g-dir}(l)$  – объем электроэнергии, который получает индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  от генератора в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$  и который направляется в систему хранения электроэнергии, используемую этим пользователем;

$y_i^{g-st}(l)$  – объем электроэнергии, который получает индустриальный пользователь  $i, i \in \overline{1, m}$  от генератора в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$  и который используется этим пользователем сразу по мере получения этой электроэнергии пользователем;

$y_i^{st}(l)$  – объем электроэнергии, который доступен для использования индустриальным пользователем  $i, i \in \overline{1, m}$  из системы хранения электроэнергии, используемой этим пользователем, в период времени от часа  $l - 1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ ;

$y_i^{st}(0)$  – объем электроэнергии, который имеется в системе хранения электроэнергии, используемой этим пользователем, в начале периода времени в 24 часа;

$y_i^{st+}(0)$  – максимальный объем электроэнергии, который может храниться в системе хранения электроэнергии, используемой индустриальным пользователем  $i, i \in \overline{1, m}$ ;

$y_i^{st-}$  – минимальный объем электроэнергии в системе хранения электроэнергии, используемой индустриальным пользователем  $i, i \in \overline{1, m}$ , который пользователь обязан поддерживать;

$\Delta_i^y$  – ежечасный средний объем электроэнергии, теряемый в системе хранения электроэнергии, используемой индустриальным пользователем  $i$ ,

$$0 < \Delta_i^y < 1, i \in \overline{1, m};$$

$\Delta_i^{yw}$  – средние (ежечасные) затраты индустриального пользователя  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , связанные с получением электроэнергии из энергии ветра;

$\Delta_i^{ys}$  – средние (ежечасные) затраты индустриального пользователя  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , связанные с получением электроэнергии из энергии солнца;

$\pi_i^y$  – средние (ежечасные) затраты индустриального пользователя  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , связанные с использованием им системы хранения электроэнергии;

$\underline{y}_i^w(l)$  – оценка минимального объема электроэнергии, получаемой из энергии ветра, который индустриальный пользователь соглашается получать от поставщика этой энергии;

$\underline{y}_i^s(l)$  – оценка минимального объема электроэнергии, получаемой из энергии солнца, который индустриальный пользователь соглашается получать от поставщика этой энергии;

$y_i^{dem}(l)$  – потребность индустриального пользователя в электроэнергии в периоде времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$\bar{y}_i^{dem}(l)$  – оценка максимальной потребности индустриального пользователя в электроэнергии в периоде времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$\underline{y}_i^{dem}(l)$  – оценка минимальной потребности индустриального пользователя в электроэнергии в периоде времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ ;

$y_i^{dem-st}(l)$  – объем электроэнергии, потребляемой индустриальным пользователем  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$  из используемой им системы хранения электроэнергии в периоде времени от часа  $l - 1$  до часа  $l$ ,  $l \in \overline{1, 24}$ .

Функционирование индустриального пользователя  $i, i \in \overline{1, m}$  описывается соотношениями балансового типа, связывающими перечисленные переменные и параметры [3]:

$$\begin{aligned}
\underline{y}_i^w(l) &\leq y_i^w(l), \\
\underline{y}_i^s(l) &\leq y_i^s(l), \\
\underline{y}_i^{dem}(l) &\leq y_i^{dem}(l) \leq \bar{y}_i^{dem}(l), \\
y_i^{st}(l) &= y_i^{st}(0) + \sum_{x=1}^l \left( y_i^{g-st}(x) + y_i^{s-st}(x) + y_i^{w-st}(x) + (yM)_i^{st}(l) \right) - \sum_{x=1}^l \left( y_i^{dem-st}(x) + \Delta_i^y x \right), \\
\underline{y}_i^{st} &\leq y_i^{st}(l) \leq y_i^{st+}, \\
y_i^{dem}(l) &= y_i^{w-dir}(l) + y_i^{s-dir}(l) + y_i^{g-dir}(l) + (yM)_i^{dir} + y_i^{dem-st}(l), \\
y_i^w(l) &= y_i^{w-dir}(l) + y_i^{w-st}(l), \\
y_i^s(l) &= y_i^{s-dir}(l) + y_i^{s-st}(l), \\
y_i^g(l) &= y_i^{g-dir}(l) + y_i^{g-st}(l), \\
(yM)_i(l) &= (yM)_i^{dir}(l) + (yM)_i^{st}(l), \\
i &\in \overline{1, m}, \quad l \in \overline{1, 24}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь предполагается, что система (1.1) совместна, что может быть проверено простым методом, предложенным в [4].

Пусть далее  $p_i^y(l)$  – цена, по которой единица объема электроэнергии продается генератором индустриальному пользователю  $i, i \in \overline{1, m}$  в период времени от часа  $l-1$  до часа  $l, l \in \overline{1, 24}$ .

Аналогично, функционирование других крупных пользователей может быть описано похожими системами ограничений, связывающих переменные и параметры, которые имеют тот же смысл для компании по снабжению электричеством конечных пользователей  $j, j \in \overline{1, n}$  и для группы независимых пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$  каких имеют (соответствующие им) переменные и параметры, используемые для описания индустриального пользователя  $i, i \in \overline{1, m}$ :

$$z_j^w(l), z_j^{w-st}(l), z_j^{w-dir}(l), z_j^s(l), z_j^{s-st}(l), z_j^{s-dir}(l),$$

$$(zM)_j(l), (zM)_j^{dir}(l), (zM)_j^{st}(l), (zM)_j^g(l), (zM)_j^{g-dir}(l), (zM)_j^{g-st}(l), (zM)_j^{st}(l),$$

$$z_j^{dem-st}(l), z_j^{st}(0), \underline{z}_j^{st}, z_j^{st^+}, \Delta_j^z, \lambda_j^{zw}, \lambda_j^{zs},$$

$$\pi_j^z, z_j^{dem}(l), p_j^z(l), \bar{z}_j^{dem}(l), \underline{z}_j^{dem}(l), \underline{z}_j^w(l), \underline{z}_j^s(l), j \in \overline{1, n}, l \in \overline{1, 24},$$

и

$$u_k^w(l), u_k^{w-st}(l), u_k^{w-dir}(l), u_k^s(l), u_k^{s-st}(l), u_k^{s-dir}(l),$$

$$(uM)_k(l), (uM)_k^{dir}(l), (uM)_k^{st}(l), u_k^g(l), u_k^{g-dir}(l), u_k^{g-st}(l), u_k^{st}(l),$$

$$u_k^{dem-st}(l), u_k^{st}(0), \underline{u}_k^{st}, u_k^{st^+}, \Delta_k^u, \lambda_k^{uw}, \lambda_k^{us},$$

$$\pi_k^u, u_k^{dem}(l), p_k^u(l), u_k^{-dem}(l), \underline{u}_k^{dem}(l), \underline{u}_k^w(l), \underline{u}_k^s(l), k \in \overline{1, r}, l \in \overline{1, 24}.$$

Далее, пусть:

$\theta^y$  – вектор, компонента которого  $\theta_i^y$  есть цена, которая платится генератором компании по передаче электроэнергии по высоковольтным линиям электропередач за передачу единицы объема электроэнергии индустриальному пользователю  $i, i \in \overline{1, m}$ , причем предполагается, что эта цена не меняется в течение периода времени в 24 часа;

$s^y$  – вектор, компонента которого  $s_i^y$  есть цена, которая платится индустриальным пользователем  $i$  компании по передаче электроэнергии по высоковольтным линиям электропередач за передачу единицы объема электроэнергии от генератора  $i \in \overline{1, m}$ , причем предполагается, что эта цена не меняется в течение периода времени в 24 часа;

$\theta$  – цена, которая платится генератором компании по передаче электроэнергии по высоковольтным линиям электропередач за единицу электроэнергии, теряемой при передаче электроэнергии от генератора крупным пользователям сети электроснабжения региона, причем предполагается, что эта цена не меняется в течение периода времени в 24 часа;

и пусть числа  $\theta^z, \theta_j^z, s^z, s_j^z$  и числа  $\theta^u, \theta_k^u, s^u, s_k^u$  имеют тот же смысл для компании по снабжению электричеством конечных пользователей  $j, j \in \overline{1, n}$  и для группы независимых пользователей  $k, k \in \overline{1, r}$ , какой имеют числа  $\theta^y, \theta_i^y, s^y, s_i^y$  для индустриального пользователя  $i \in \overline{1, m}$ , соответственно.

Пусть

$$\begin{aligned}
y_i^g &= (y_i^g(1), \dots, y_i^g(24)); \quad y_i^w = (y_i^w(1), \dots, y_i^w(24)); \quad y_i^s = (y_i^s(1), \dots, y_i^s(24)); \\
p_i^y &= (p_i^y(1), \dots, p_i^y(24)); \quad \lambda_i^{yw}(av) = (\lambda_i^{yw}, \dots, \lambda_i^{yw}); \quad \lambda_i^{ys}(av) = (\lambda_i^{ys}, \dots, \lambda_i^{ys}); \\
y_i^{st} &= (y_i^{st}(1), \dots, y_i^{st}(24)); \quad \lambda_i^{yw}(av), \lambda_i^{ys}(av) \in R_+^{24}, i \in \overline{1, m}; \\
z_j^g &= (z_j^g(1), \dots, z_j^g(24)); \quad z_j^w = (z_j^w(1), \dots, z_j^w(24)); \quad z_j^s = (z_j^s(1), \dots, z_j^s(24)); \\
p_j^z &= (p_j^z(1), \dots, p_j^z(24)); \quad \lambda_j^{zw}(av) = (\lambda_j^{zw}, \dots, \lambda_j^{zw}); \quad \lambda_j^{zs}(av) = (\lambda_j^{zs}, \dots, \lambda_j^{zs}); \\
z_j^{st} &= (z_j^{st}(1), \dots, z_j^{st}(24)); \quad \lambda_j^{zw}(av), \lambda_j^{zs}(av) \in R_+^{24}, j \in \overline{1, n}; \\
u_k^g &= (u_k^g(1), \dots, u_k^g(24)); \quad u_k^w = (u_k^w(1), \dots, u_k^w(24)); \quad u_k^s = (u_k^s(1), \dots, u_k^s(24)); \\
p_k^u &= (p_k^u(1), \dots, p_k^u(24)); \quad \lambda_k^{uw}(av) = (\lambda_k^{uw}, \dots, \lambda_k^{uw}); \quad \lambda_k^{us}(av) = (\lambda_k^{us}, \dots, \lambda_k^{us}); \\
u_k^{st} &= (u_k^{st}(1), \dots, u_k^{st}(24)); \quad \lambda_k^{uw}(av), \lambda_k^{us}(av) \in R_+^{24}, k \in \overline{1, r}; \\
y^g &= (y_1^g, y_2^g, \dots, y_m^g), \quad z^g = (z_1^g, z_2^g, \dots, z_n^g), \quad u^g = (u_1^g, u_2^g, \dots, u_k^g), \\
p^y &= (p_1^y, p_2^y, \dots, p_n^y), \quad p^z = (p_1^z, p_2^z, \dots, p_n^z), \quad p^u = (p_1^u, p_2^u, \dots, p_k^u).
\end{aligned}$$

И пусть

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &= (y^g; y_1^w, y_2^w, \dots, y_m^w; y_1^s, y_2^s, \dots, y_m^s; y_1^{st}, y_2^{st}, \dots, y_m^{st}), \\
\tilde{p}^y &= (p^y; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0), \\
\tilde{q}^y &= (0; \lambda_1^{yw}(av), \dots, \lambda_m^{yw}(av); \lambda_1^{ys}(av), \dots, \lambda_m^{ys}(av); \pi_1^y, \dots, \pi_m^y), \\
\tilde{z} &= (z^g; z_1^w, z_2^w, \dots, z_n^w; z_1^s, z_2^s, \dots, z_n^s; z_1^{st}, z_2^{st}, \dots, z_n^{st}), \\
\tilde{p}^z &= (p^z; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0), \\
\tilde{q}^z &= (0; \lambda_1^{zw}(av), \dots, \lambda_n^{zw}(av); \lambda_1^{zs}(av), \dots, \lambda_n^{zs}(av); \pi_1^z, \dots, \pi_n^z), \\
\tilde{u} &= (u^g; u_1^w, u_2^w, \dots, u_k^w; u_1^s, u_2^s, \dots, u_k^s; u_1^{st}, u_2^{st}, \dots, u_k^{st}), \\
\tilde{p}^u &= (p^u; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0; 0, 0, \dots, 0), \\
\tilde{q}^u &= (0; \lambda_1^{uw}(av), \dots, \lambda_k^{uw}(av); \lambda_1^{us}(av), \dots, \lambda_k^{us}(av); \pi_1^z, \dots, \pi_k^u),
\end{aligned}$$

так что

$$\langle y^g, p^y \rangle = \langle \tilde{y}, \tilde{p}^y \rangle, \langle z^g, p^z \rangle = \langle \tilde{z}, \tilde{p}^z \rangle, \langle u^g, p^u \rangle = \langle \tilde{u}, \tilde{p}^u \rangle,$$

$$\tilde{\tilde{y}} = (\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}), \tilde{\tilde{x}} = (\tilde{p}^y, \tilde{p}^z, \tilde{p}^u), \delta = (\tilde{q}^y, \tilde{q}^z, \tilde{q}^u).$$

Кроме того, и пусть

$$\hat{\tilde{t}} = (\theta^y, 0, 0, \dots, 0, \theta^z, 0, 0, \dots, 0, \theta^u, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\hat{\tilde{s}} = (s^y, 0, 0, \dots, 0, s^z, 0, 0, \dots, 0, s^u, 0, 0, \dots, 0),$$

где все нулевые компоненты векторов  $\hat{\tilde{t}}$  и  $\hat{\tilde{s}}$ , соответствуют компонентам векторов  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  и  $\tilde{u}$ ,

$$(y_1^w, y_2^w, \dots, y_m^w; y_1^s, y_2^s, \dots, y_m^s; y_1^{st}, y_2^{st}, \dots, y_m^{st}),$$

$$(z_1^w, z_2^w, \dots, z_n^w; z_1^s, z_2^s, \dots, z_n^s; z_1^{st}, z_2^{st}, \dots, z_n^{st}),$$

$$(u_1^w, u_2^w, \dots, u_k^w; u_1^s, u_2^s, \dots, u_k^s; u_1^{st}, u_2^{st}, \dots, u_k^{st}),$$

соответственно, и пусть  $\hat{y} = (\tilde{y}, Y^g)$ ,  $\hat{x} = (\tilde{x}, 0_r)$ ,  $\hat{s} = (\tilde{s}, 0_r)$ ,  $\hat{\Delta} = (\delta, 0_Y)$ , где  $Y^g = (Y^g(1), \dots, Y^g(24))$ ,  $0_Y \in R^{24}$  – нулевой вектор.

Принимая во внимание введенные выше обозначения, функционирование генератора может быть описано системой ограничений, предложенной в [4, 5]:

$$\langle \varepsilon, Y^g \rangle - \left( \langle \varepsilon^y, y^g \rangle + \langle \varepsilon^z, z^g \rangle + \langle \varepsilon^u, u^g \rangle \right) - \langle \varepsilon, MAX_{loss}(Y^g) \rangle = 0,$$

$$H_{\min} \leq \langle \varepsilon, Y^g \rangle \leq H_{\max},$$

$$\langle y^g, p^y \rangle + \langle z^g, p^z \rangle + \langle u^g, p^u \rangle - \langle \varepsilon, MAX_{\text{expen}}(Y^g) \rangle - \Psi(\hat{y}) \rightarrow \max_{(p^y, p^z, p^u)},$$

где

$$MAX_{loss}(Y^g) = \left( \max_{u\lambda \in I, \Lambda_1} (a_{\lambda_1} + b_{\lambda_1} Y^g(1)), \dots, \max_{\lambda_{24} \in I, \Lambda_{24}} (a_{\lambda_{24}} + b_{\lambda_{24}} Y^g(24)) \right)$$

описывают потери при передаче электроэнергии по высоковольтным линиям электропередач [3, 5],  $a_{\lambda_l} + b_{\lambda_l} Y^g(l)$  линейные функции переменных  $Y^g(l)$ ,  $\lambda_l \in \overline{1, \Lambda_l}$ ,  $a_{\lambda_l}, b_{\lambda_l} \in R^1$ ,  $l \in \overline{1, 24}$  (в пределах некоторого сегмента объемов производства электроэнергии  $[c_{\min}, c_{\max}]$ ),  $\varepsilon, \varepsilon^y, \varepsilon^z, \varepsilon^u$  – векторы соответствующих размеров, все компоненты которых равны 1, и  $H_{\min}$  и  $H_{\max}$  – минимальная и максимальная технологически возможные производственные мощности генератора в течение 24 часов. Здесь функция  $\Psi(\tilde{y})$  описывающая затраты генератора на передачу электроэнергии крупным пользователям, может быть записана в виде [3, 5],

$$\Psi(\tilde{y}) = \theta \sum_{i=1}^{24} \max_{\lambda_l \in \overline{1, \Lambda_l}} \left( a_{\lambda_l}^i + b_{\lambda_l}^i Y^{\varepsilon}(l) \right) + \left( \sum_{i=1}^m \langle \tilde{\varepsilon}^y, \tilde{y} \rangle_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n \langle \tilde{\varepsilon}^z, \tilde{z} \rangle_j \theta_j^z + \sum_{k=1}^r \langle \tilde{\varepsilon}^u, \tilde{u} \rangle_k \theta_k^u \right)$$

и функция

$$MAX_{\text{expen}}(Y^g) = \left( \max_{u_1 \in \overline{1, \Gamma_1}} (c_{\mu_1} + b_{\mu_1} Y^g(1)), \dots, \max_{u_{24} \in \overline{1, \Gamma_{24}}} (c_{\mu_{24}} + b_{\mu_{24}} Y^g(24)) \right)$$

описывает затраты генератора связанные с производством электроэнергии [5], где  $c_{\mu_l} + b_{\mu_l} Y^g(l)$  линейные функции переменных  $Y^g(l)$ ,  $c_{\mu_l}, b_{\mu_l} \in R^1$ ,  $l \in \overline{1, 24}$  (в пределах вышеупомянутого сегмента  $[c_{\min}, c_{\max}]$ ), причем предполагается, что включения  $(s_1^y, \dots, s_m^y, s_1^z, \dots, s_n^z, s_1^u, \dots, s_k^u, 0_Y) \in \widehat{S}$  и  $(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, Y^d) \in \widehat{\Omega}$ ,  $(\tilde{p}^y, \tilde{p}^z, \tilde{p}^u, 0^y) \in \widehat{M}$ ,  $(\theta_1^y, \dots, \theta_m^y, \theta_1^z, \dots, \theta_n^z, \theta_1^u, \dots, \theta_k^u, 0_Y) \in \widehat{T}$  имеют место для переменных, описывающих функционирование всех крупных пользователей сети электроснабжения, генератора, и компании, обеспечивающей передачу электроэнергии по высоковольтным линиям электропередач; здесь  $\tilde{\varepsilon}^y, \tilde{\varepsilon}^z, \tilde{\varepsilon}^u$  векторы соответствующих размеров у которых все компоненты равны 1, и  $\widehat{M}, \widehat{\Omega}, \widehat{S}$  и  $\widehat{T}$  выпуклые многогранники.

Как показано в [5], взаимодействие генератора, всех крупных пользователей и компаний, обеспечивающей передачу электроэнергии по высоковольтным линиям электропередач, может быть описано игрой  $m+n+r+2$  лиц

$$\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle - \langle \hat{y}, \hat{t} \rangle - f_1(\hat{y}) - f_2(\hat{y}) \rightarrow \max_{\hat{x} \in \hat{M}},$$

$$\langle \hat{y}, \hat{t} \rangle + \langle \hat{y}, \hat{s} \rangle + f_1(\hat{y}) \rightarrow \max_{(\hat{t}, \hat{s}) \in \hat{T} \times \hat{S}},$$

$$\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle + \langle \hat{\Delta}, \hat{y} \rangle \rightarrow \min_{\hat{y} \in \hat{\Omega}}, \quad i \in \overline{1, m},$$

$$\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle_j + \langle \hat{\Delta}, \hat{y} \rangle_j \rightarrow \min_{\hat{y} \in \hat{\Omega}}, \quad j \in \overline{1, n},$$

$$\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle_k + \langle \hat{\Delta}, \hat{y} \rangle_k \rightarrow \min_{\hat{y} \in \hat{\Omega}}, \quad k \in \overline{1, r},$$

(Игра 1)

где выпуклые многогранники  $\hat{M}$ ,  $\hat{\Omega}$ ,  $\hat{T}$  и  $\hat{S}$  можно рассматривать как множества допустимых стратегий игроков, причем предполагается, что эти многогранники описываются совместными системами линейных неравенств (ко-торые включают систему (1.1) для индустриального пользователя  $k$  и системы, подобные (1.1) для компании, обеспечивающей электроэнергией конечных пользователей сети, и для группы независимых пользователей), подробно рассмотренных в [5]. Здесь  $f_1(\hat{y}) = \langle \theta \varepsilon, \text{MAX}_{\text{loss}}(\hat{y}) \rangle$ ,

$f_2(\hat{y}) = \langle \varepsilon, \text{MAX}_{\text{expen}}(\hat{y}) \rangle$  – скалярные произведения,  $\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle_i$  является частью скалярного произведения  $\langle \hat{y}, \hat{x} \rangle$ , относящегося к переменным, связанным с индустриальным пользователем  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $\varepsilon \in R_+^{24}$  вектор, все компоненты которого равны 1, и функции  $\text{MAX}_{\text{loss}}(Y^g)$  и  $\text{MAX}_{\text{expen}}(Y^g)$  можно рассматривать как функции вектора  $\hat{y}$  в силу вышеупомянутых соотношений между векторами  $\hat{y}$  и  $Y^g$ . Пусть  $0^{yM}$ ,  $0^{zM}$ ,  $0^{uM}$  векторы тех же размеров что и векторы  $y^M$ ,  $z^M$  и  $u^M$  соответственно, где

$$(yM)_i = ((yM)_i, \dots, (yM)_i(24)),$$

$$(zM)_j = ((zM)_j(1), \dots, (zM)_j(24)),$$

$$(uM)_k = ((uM)_k(1), \dots, (uM)_k(24)),$$

$$y^M = ((yM)_1, \dots, (yM)_m), \quad z^M = ((zM)_1, \dots, (zM)_n), \quad u^M = ((uM)_1, \dots, (uM)_k),$$

$$\hat{x} = (\hat{x}, 0^{yM}, 0^{zM}, 0^{uM}), \quad \hat{t} = (\hat{t}, 0^{yM}, 0^{zM}, 0^{uM}), \quad \hat{y} = (\hat{y}, y^M, z^M, u^M),$$

$$i \in \overline{1, m}, \quad j \in \overline{1, n}, \quad k \in \overline{1, r}.$$

Пусть:

$c^{yM}(av) \in R^m$  – вектор, у которого компонента  $i$  является средней рыночной ценой за единицу объема электроэнергии для индустриального пользователя  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ ,

$s^{yM} \in R^m$  – вектор, у которого компонента  $i$  является средней ценой за передачу единицы объема электроэнергии для индустриального пользователя  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$  с рынков электроэнергии,

и пусть  $c^{zM}(av) \in R^n$ ,  $s^{zM} \in R^n$  и  $c^{uM}(av) \in R^k$ ,  $s^{uM} \in R^k$  имеют тот же смысл по отношению к компании  $j$ ,  $j \in n$ , обеспечивающей электроэнергией конечных пользователей сети и группу независимых пользователей  $k$ ,  $k \in \overline{1, r}$ , какой

имеют  $c^{yM}(av)$ ,  $s^{yM}$  для индустриального пользователя  $i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , соответственно. Далее, пусть  $\hat{\Delta} = (\hat{\Delta}, c^{yM}(av), c^{zM}(av), c^{uM}(av))$  и  $s^{yM}, s^{zM}, s^{uM}$  – компоненты вектора из выпуклого многогранника  $P \subset \Pi_s^M$ ,

$\hat{M} = \hat{M} \times (0^{yM}, 0^{zM}, 0^{uM})$ ,  $\hat{\Omega} = \hat{\Omega} \times Q$ , где  $Q \subset \Pi_y^M$  выпуклый многогранник, отражающий оценку генератором наличия электроэнергии на рынке (рынках) для покупки крупными потребителями сети, где  $\Pi_s^M$  и  $\Pi_y^M$  параллелепипеды

в пространствах соответствующих размеров,  $\hat{S} = (\hat{S} \times P)$  и

$\hat{\bar{T}} = \hat{T} \times (0^{yM}, 0^{zM}, 0^{uM})$  так что  $\hat{M}$ ,  $\hat{\bar{\Omega}}$ ,  $\hat{\bar{S}}$  и  $\hat{\bar{T}}$  выпуклые многогранники, описываемые линейными ограничениями, подобными тем, которыми описываются выпуклые многогранники  $\hat{M}$ ,  $\hat{\bar{\Omega}}$ ,  $\hat{\bar{S}}$  и  $\hat{\bar{T}}$  соответственно, но связывающими переменные  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{s}$  и  $\hat{t}$ , где  $\hat{s} = (\hat{s}, s^{yM}, s^{zM}, s^{uM})$ . Здесь предполагается, что а) ежечасные цены за передачу электроэнергии крупным пользователям сети, которая куплена на рынке (на рынках), постоянны в течение каждого часа в 24 часовом периоде времени (хотя, вообще говоря, эти цены могут быть разными для разных пользователей сети), б) генератор имеет информацию только относительно средних цен, по которым крупные пользователи могут купить электроэнергию на рынке (рынках).

Рассмотрим вспомогательную игру 3-х лиц в форме

$$\langle \hat{\bar{y}}, \hat{\bar{x}} \rangle - \langle \hat{\bar{y}}, \hat{\bar{t}} \rangle - F_1(\hat{\bar{y}}) - F_2(\hat{\bar{y}}) \rightarrow \max_{\hat{\bar{x}} \in \hat{M}},$$

$$\langle \hat{\bar{y}}, \hat{\bar{t}} \rangle + \langle \hat{\bar{y}}, \hat{\bar{s}} \rangle + F_1(\hat{\bar{y}}) \rightarrow \max_{(\hat{\bar{t}}, \hat{\bar{s}}) \in \hat{\bar{T}} \times \hat{\bar{S}}},$$

$$\langle \hat{\bar{y}}, \hat{\bar{x}} \rangle + \langle \hat{\bar{y}}, \hat{\bar{s}} \rangle + \langle \hat{\bar{\Delta}}, \hat{\bar{y}} \rangle \rightarrow \min_{\hat{\bar{y}} \in \hat{\bar{\Omega}}},$$

(Игра 2)

где выражения для функций  $F_1$  и  $F_2$  те же, что и для функций  $f_1$  и  $f_2$ , и выполняются равенства  $F_1(\hat{\bar{y}}) = f_1(\hat{\bar{y}})$  и  $F_2(\hat{\bar{y}}) = f_2(\hat{\bar{y}})$ .

Рассмотрим вспомогательную игру 2-х лиц на выпуклых многогранниках  $\hat{\bar{\Omega}}$  и  $\hat{M} \times \hat{\bar{S}}$  допустимых стратегий игроков

$$(\hat{\bar{y}}^*, (\hat{\bar{x}}^*, \hat{\bar{s}}^*)) \in S_{p_{(\hat{\bar{y}}, (\hat{\bar{x}}, \hat{\bar{s}})) \in \hat{\bar{\Omega}} \times (\hat{M} \times \hat{\bar{S}})}} \left( \langle \hat{\bar{y}}, \hat{\bar{x}} + \hat{\bar{s}} \rangle + \langle \hat{\bar{\Delta}}, \hat{\bar{y}} \rangle \right).$$

(Игра 3)

где функция выигрыша минимизируется по отношению к вектору  $\hat{\bar{y}}$  и максимизируется по отношению к паре векторов  $(\hat{\bar{x}}, \hat{\bar{s}})$

В [3] показано, что справедливы

Утверждение 1.1. Четверка векторов  $(\hat{\bar{y}}^*, \hat{\bar{x}}^*, \hat{\bar{t}}^*, \hat{\bar{s}}^*)$  является точкой равновесия в игре 2 тогда и только тогда, когда тройка векторов  $(\hat{\bar{y}}^*(\hat{\bar{x}}^*, \hat{\bar{s}}^*))$  является точкой равновесия в игре 3 и выполняется включение  $\hat{\bar{t}}^* = \text{Arg} \max_{\hat{\bar{t}} \in \hat{\bar{T}}} \langle \hat{\bar{y}}^*, \hat{\bar{t}} \rangle$ .

Утверждение 1.2. Точка равновесия в Игре 2 определяет точку равновесия в Игре 1.

Доказательства обоих утверждений совершенно аналогично доказательству двух основных утверждений из [5]. Легко убедиться, что конкретные формы функций  $F_1(\tilde{y})$  и  $F_2(\tilde{y})$  не влияют на сам факт того, что точка равновесия в Игре 2 определяет точку равновесия в игре 1 [3] хотя, вообще говоря, множество точек равновесия в Игре 2 определяет лишь подмножество точек равновесия в Игре 1, и множество точек равновесия в Игре 1, разумеется, зависит от конкретной формы обеих функций.

Полагая  $m_1 = n_1 = m$ , где  $m$  – размер векторов  $\hat{\bar{y}}, \hat{\bar{x}}, \hat{\bar{s}}$ , полагая  $p_1 = \hat{\bar{\Delta}}$ ,  $x_1 = \hat{\bar{y}}$ ,  $y_1 = \hat{\bar{x}} + \hat{\bar{s}}$ ,  $q_1 = 0$ , и полагая  $E_m = D_1$ , где  $E_m$  – матрица  $m \times m$  у которой ненулевые элементы равны 1 и занимают главную диагональ матрицы  $E_m$ , можно убедиться в том, что Игра 3 является игрой 2-х лиц с платежной функцией  $\langle p_1, x_1 \rangle + \langle x_1 D_1 y_1 \rangle + \langle q_1, y_1 \rangle$  на выпуклых многогранниках  $M_1$  и  $\Omega_1$ , где  $M_1$  и  $\Omega_1$  выпуклые многогранники, описываемые совместными системами линейных неравенств  $M_1 = \left\{ x_1 \in R_+^{m_1} : A_1 x_1 \geq b_1 \right\}$ ,  $\Omega_1 = \left\{ y_1 \in R_+^{n_1} : B_1 y_1 \geq d_1 \right\}$ ,  $A_1, B_1, D_1$  – матрицы и  $b_1, d_1, p_1, q_1, x_1, y_1$  векторы соответствующих размеров и структуры.

Теорема 1.1 [4]. Разрешимость Игры 3 эквивалентна разрешимости двух задач линейного программирования

$$\langle b_1, z_1 \rangle + \langle q_1, y_1 \rangle \rightarrow \max_{(z_1, y_1) \in Q_1},$$

$$-\langle d_1, t_1 \rangle + \langle p_1, x_1 \rangle \rightarrow \min_{(t_1, x_1) \in R_1}$$

образующих двойственную пару, где

$$Q_1 = \{(z_1, y_1 \geq 0) : z_1 A_1 \leq p_1 + D_1 y_1, B_1 y_1 \geq d_1\},$$

$P_1 = \{(t_1, x_1 \geq 0) : t_1 B_1 \leq -q_1 - x_1 D_1, A_1 x_1 \geq b_1\}$  и  $t_1, z_1$  векторы соответствующих размеров, что позволяет отыскивать равновесия в разрешимой Игре З методами линейного программирования для любого числа ограничений и переменных, которые могут встретиться в прикладных задачах.

Таким образом, как и в случае, когда пользователи региональной сети электроснабжения могут покупать электроэнергию не только у базовых генераторов, но и на рынках электроэнергии, математическая модель в форме игры нескольких (более трех) лиц может быть использована для описания взаимодействия всех участников сети, а отыскание точек равновесия в этой игре может осуществляться из решения задач линейного программирования, образующих двойственную пару.

Результаты исследования в рамках настоящего подраздела отчета отражены в публикациях [2, 3, 5, 6].

### 1.1.2 Построение новой математической модели для оптимизации работы железнодорожной сортировочной станции

Сортировочные станции предназначаются для массового формирования и расформирования грузовых поездов. На них обрабатываются входящие потоки вагонов и формируются прямые поезда, т.е. поезда, следующие без дальнейшего переформирования до пункта назначения. Кроме того, на них выполняются ремонт вагонов, локомотивов, замена поездной бригады, дозаправка локомотивов и другие операции. Сортировочные станции размещают в местах массовой погрузки или выгрузки грузов, в районах промышленных центров или в узловых пунктах железных дорог с большой концентрацией вагонопотоков. Для обработки вагонопотоков на грузовой сортировочной станции имеются парк прибытия, сортировочный парк, парк отправления и

сортировочное устройство; три указанных парка и сортировочное устройство образуют сортировочную систему. Парки прибытия и отправления предназначены для выполнения операций с поездами (расформирование и формирование, техническая инспекция). Парк сортировки предназначен для непосредственного проведения сортировочных работ. Сортировочное устройство включает сортировочную горку, маневровые локомотивы, и обслуживающий их персонал.

Сортировочная станция обладает информацией о прибытии всех составов на некоторый заданный промежуток времени. Как правило, расписание движения грузовых составов является периодическим, например, с периодом равным одной неделе. Для всех прибывающих составов известно время прибытия, количество вагонов, тип каждого вагона, его груз, пункт назначения. Станция должна обеспечить расформирование прибывающих составов и обработать вагоны из вновь прибывших составов, для которых она является станцией назначения (терминальной станцией), а также осуществить формирование блоков вагонов по направлениям и обеспечить прохождение через станцию транзитных вагонов, то есть таких, для которых она является промежуточной. После завершения формирования блоков по направлениям (процедура накопления), необходимо присоединить накопленные вагоны к некоторым отходящим со станции составам в соответствии с направлениями движения этих вагонов и этих составов. Известно время отправления отходящих со станции поездов, пункт назначения каждого поезда, а также пункты назначения каждого из вагонов в каждом из составов. Требуется вначале отсортировать все прибывающие на станцию вагоны в блоки по направлениям движения, и затем сформировать отправляющиеся со станции составы. Более того, необходимо провести техническую инспекцию всех прибывающих и отправляющихся со станции составов.

Содержательная постановка задачи оптимизации работы железнодорожной сортировочной станции может быть описана следующим образом. В течение суток с сортировочной станции (далее станции) должно отправиться

$K^*$  поездов в соответствии с заданным расписанием. Известно множество направлений, в которых могут отправляться вагоны в составе отходящих со станции поездов в соответствии со сложившейся географией перевозок через станцию, так что все прибывающие на станцию вагоны подлежат отправке со станции в направлениях, в которых хотя бы однажды вагоны отправлялись с этой станции. Рассматривается работа станции в течение суток и предполагается, что к началу суток известны:

- а) расписание и повагонный состав прибывающих грузовых поездов (далее поездов);
- б) расписание поездов, отходящих в течение этих суток со станции, в которых будут находиться вагоны, подлежащие отправке в направлениях, входящих в указанное выше множество направлений;
- в) повагонный состав уже прибывших на станцию поездов с вагонами, о каждом из которых известно, в каком направлении (из указанного выше множества направлений) этот вагон должен быть отправлен в течение суток (если это окажется возможным) или в последующие сутки.

Рассматривается сортировочная станция, представляющая собой:

- а) набор путей, образующих парк прибытия поездов;
- б) набор путей, образующих парк отправления поездов;
- в) набор промежуточных путей, каждый из которых соответствует одному из направлений из указанного выше множества направлений (при этом одному направлению может соответствовать более одного пути), и каскад из минимум двух последовательно расположенных сортировочных горок, на которые все прибывающие на станцию поезда «завозятся» маневровыми локомотивами.

После прохождения первой сортировочной горки, вагоны из поезда, «зазвезденного» на нее маневровым локомотивом, с помощью системы стрелок распределяются по указанным в пункте в) промежуточным путям в соответствии с направлением их последующего движения со станции. Непосредст-

венно формирование отходящих со станции поездов осуществляется путем прохождения вагонов, находящихся на промежуточных путях, связанных с направлениями отправки вагонов, через вторую сортировочную горку [7].

Предполагается, что на станции имеется достаточное число маневровых локомотивов и достаточно персонала для подачи всех прибывающих на станцию в течение суток и всех уже прибывших к началу суток поездов на сортировочные горки таким образом, что вагоны из каждого прибывающего в течение суток поезда принципиально могут попасть в состав поездов, еще не отправленных со станции к моменту прибытия этого поезда (в результате прохождения сортировочных горок). Предполагается также, что среди прибывающих на станцию вагонов имеются вагоны, для которых эта станция является станцией назначения (такие вагоны отсортировываются на первой сортировочной горке на специальные пути, не входящие во множество промежуточных путей).

Каждый из поездов, отходящих со станции, считается сформированным если:

- а) в его составе находятся только те вагоны, которые движутся в направлениях (входящих в подмножество всех возможных направлений), включенных в набор направлений, определенных для этого поезда персоналом управления железной дорогой (например, ОАО «РЖД»);
- б) число вагонов, включенных в состав поезда не меньше некоторого минимально допустимого их числа и не более некоторого максимально допустимого их числа (определяемых правилами перевозок грузов на конкретной железной дороге);
- в) суммарный вес всех вагонов, включенных в состав поезда, не превосходит максимально допустимый для поезда вес (также определяемый правилами перевозок грузов на конкретной железной дороге).

Требуется определить вагонный состав для каждого из отходящих  $K^*$  поездов, которые в совокупности:

- а) минимизируют число вагонов, не отправленных со станции в течение суток, или
- б) максимизируют доход станции от ее работы в течение суток (в предположении о том, что известен доход, получаемый станцией, от отправки каждого конкретного вагона в течение суток).

Пусть:

$S$  – число поездов, прибывших на станцию к началу суток, но не отсортированных по направлениям отправки вагонов,

$Q$  – число направлений, в которых могут отправляться поезда со станции,

$R(k) \subset \overline{1, Q}$  – подмножество направлений, в которых могут отправляться вагоны в составе поезда  $k$ ,  $k \in \overline{1, K^*}$ ,

$T$  – число поездов, прибывающих на станцию до момента отправки последнего из  $K^*$  поездов,

$L_{\min}$  – минимально допустимое число вагонов в составе отходящего поезда,

$L^{\max}$  – максимально допустимое число вагонов в составе отходящего поезда,

$P$  – максимально допустимый суммарный вес вагонов в составе отходящего поезда.

Пусть далее:

$\xi_q^0$  – число вагонов, находящихся на промежуточном пути направления  $q$  к началу суток,  $q \in \overline{1, Q}$ ,

$\eta^{I(\text{ож})}$  – число вагонов, находящихся в поезде  $I(\text{ож})$ , который прибыл на станцию до начала суток,  $I(\text{ож}) \in \overline{1, S}$ ,

$v^{H(np)}$  – число вагонов в поезде  $H(np)$ , который прибывает на станцию в течение рассматриваемых суток  $H(np) \in \overline{1, T}$ ,

$H(np)^{назн}$  – множество вагонов в поезде  $H(np)$ , который прибывает на станцию в течение рассматриваемых суток, для которых станция является пунктом назначения,

$K^0$  – множество номеров отходящих поездов, в которые могут быть включены вагоны из множества тех направлений, по которым на промежуточных путях стоят отсортированные (по направлениям) к началу суток вагоны,

$$K^0 \subset \overline{1, K^*},$$

$K^{(ож)}$  – множество тех номеров отходящих поездов, в которые могут быть включены вагоны, прибывшие на станцию до начала рассматриваемых суток,  $K^{(ож)} \subset \overline{1, K^*}$ ,

$KH(np)$  – множество номеров отходящих поездов, в которые могут быть включены вагоны из поезда, прибывающего на станцию в момент  $H(np)$ ,

$$KH(np) \subset \overline{1, K^*}, H(np) \in \overline{1, T},$$

$KI(np) \subset \overline{1, K^*}$  – множество поездов, уходящих со станции до прибытия первого из поездов, которые должны прибыть на станцию в течение суток,

$I(ож)^{назн}$  – множество вагонов в поезде  $I(ож)$ , который прибыл на станцию до начала суток, для которых станция является пунктом назначения

$${}^k XO_{\alpha_q}(q) = \begin{cases} 1, & \text{если вагон с порядковым номером } \alpha_q \text{ на промежуточных} \\ & \text{путях направления } q \text{ будет включен в состав отходящего} \\ & \text{поезда } k, \quad \alpha_q \in \overline{1, \xi_q^0}, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$${}^k XI(oжc)_{\beta_j^{I(oжc)}}^{\theta_j^{I(oжc)}} = \begin{cases} 1, & \text{если вагон с порядковым номером } \beta_j^{I(oжc)} \text{ поезда } I(oжc) \\ & \text{из числа поездов, прибывших на станцию до начала суток,} \\ & \text{имеющий направление движения } \theta_j^{I(oжc)}, \text{ будет включен} \\ & \text{в состав отходящего поезда } k, \beta_j^{I(oжc)} \in \overline{1, \eta^{I(oжc)}} \setminus I(oжc)^{назн}, \\ & \theta_j^{I(oжc)} \subset R(I(oжc)) \subset \overline{1, Q}, I(oжc) \in \overline{1, S}, k \in K^{(oжc)}, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$${}^k YH(np)_{\gamma_j^{H(np)}}^{\theta_j^{H(np)}} = \begin{cases} 1, & \text{если вагон с порядковым номером } \gamma_j^{H(np)} \text{ поезда } H(np) \\ & \text{из числа поездов, прибывших на станцию в течение суток,} \\ & \text{имеющий направление движения } \theta_j^{H(np)}, \text{ будет включен} \\ & \text{в состав отходящего поезда } k, \gamma_j^{H(np)} \in \overline{1, \nu^{H(np)}} \setminus H(np)^{назн}, \\ & \theta_j^{H(np)} \subset R(H(np)) \subset \overline{1, Q}, H(np) \in \overline{1, T}, k \in KH(np), \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$PO_{\alpha_q}(q)$  – вес вагона, состояние которого описывается переменными

${}^k XO_{\alpha_q}(q);$

$PI(oжc)_{\beta_j^{I(oжc)}}^{\theta_j^{I(oжc)}}$  – вес вагона, состояние которого описывается переменными

${}^k XI(oжc)_{\beta_j^{I(oжc)}}^{\theta_j^{I(oжc)}};$

$PH(np)_{\gamma_j^{H(np)}}^{\theta_j^{H(np)}}$  – вес вагона, состояние которого описывается переменными

${}^k YH(np)_{\gamma_j^{H(np)}}^{\theta_j^{H(np)}};$

$CO_{\alpha_q}(q)$  – стоимость (доход от) отправки вагона, состояния которого описы-  
вается переменными  ${}^k XO_{\alpha_q}(q);$

$CI(oжc)_{\beta_j^{I(oжc)}}^{\theta_j^{I(oжc)}}$  – стоимость (доход от) отправки вагона, состояния которого

описывается переменными  ${}^k XI(oжc)_{\beta_j^{I(oжc)}}^{\theta_j^{I(oжc)}};$

$CH(np)^{\theta_j^{H(np)}}_{\gamma_j^{H(np)}}$  – стоимость (доход от) отправки вагона, состояние которого

описывается переменными  ${}^kYH(np)^{\theta_j^{H(np)}}_{\gamma_j^{H(np)}}$ .

Математическая задача анализа пропускной способности грузовой сортировочной станции на основе базовой модели формулируется следующим образом. Допустимые распределения вагонов по отходящим поездам должны удовлетворять системе ограничений

$$\sum_{k \in K^0} {}^kXO_{\alpha_q}(q) \leq 1, \quad \alpha_q \in \overline{1, \xi_q^0}, \quad q \in \bigcup_{k=1}^{K^*} R(k).$$

Любой вагон из числа отсортированных по направлениям и стоящих на промежуточных путях, связанных с направлением  $q$ , может быть отправлен со станции только в одном из отходящих поездов из множества  $\overline{1, K^*}$ .

$$\sum_{k \in K^{(ож)}} {}^kXI(oжc)^{\theta_j^{I(oжc)}}_{\beta_j^{I(oжc)}} \leq 1,$$

$$\beta_j^{I(oжc)} \in \overline{1, \eta^{I(oжc)}} \setminus I(oжc)^{назн}, \quad \theta_j^{I(oжc)} \subset R(I(oжc)) \subset \overline{1, Q}, \quad I(oжc) \in \overline{1, S}.$$

Любой вагон из числа вагонов находящихся в поездах, прибывающих на станцию до начала рассматриваемых суток, кроме тех вагонов, для которых станция является пунктом назначения, может быть отправлен со станции только в одном из отходящих поездов из множества  $K^{(ож)}$ .

$$\sum_{k \in KH(np)} {}^kYH(np)^{\theta_j^{H(np)}}_{\gamma_j^{H(np)}} \leq 1,$$

$$\gamma_j^{H(np)} \in \overline{1, v^{H(np)}} \setminus H(np)^{назн}, \quad \theta_j^{H(np)} \subset R(H(np)) \subset \overline{1, Q}, \quad H(np) \in \overline{1, T}.$$

Любой вагон из числа вагонов в составе поездов, прибывающих на станцию в течение суток, кроме тех вагонов, для которых станция является пунктом назначения, может быть отправлен со станции только в одном из отходящих поездов из множества  $KH(np)$ .

$$L_{\min} \leq \sum_{\substack{K^* \\ q \in \bigcup_{k=1}^{K^*} R(k)}} \sum_{\alpha_q=1}^{\xi_q^0} {}^k X O_{\alpha_q}(q) + \sum_{I(oжc)=1}^S \sum_{\theta_j^{I(oжc)} \in R(I(oжc))} \sum_{\beta_j^{I(oжc)}=1} \eta^{I(oжc)} {}^k X I(oжc) \frac{\theta_j^{I(oжc)}}{\beta_j^{I(oжc)}} \leq L^{\max},$$

$$k \in KI(np).$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{K^* \\ q \in \bigcup_{k=1}^{K^*} R(k)}} \sum_{\alpha_q=1}^{\xi_q^0} {}^k X O_{\alpha_q}(q) P O_{\alpha_q}(q) + \\ & + \sum_{I(oжc)=1}^S \sum_{\theta_j^{I(oжc)} \in R(I(oжc))} \sum_{\beta_j^{I(oжc)}=1} \eta^{I(oжc)} {}^k X I(oжc) \frac{\theta_j^{I(oжc)}}{\beta_j^{I(oжc)}} P I(oжc) \frac{\theta_j^{I(oжc)}}{\beta_j^{I(oжc)}} \leq P, \quad k \in KI(np). \end{aligned}$$

Таким образом, поезда, отходящие со станции до прибытия поездов, которые должны прибыть на станцию в течение суток, должны комплектоваться вагонами из числа отсортированных и стоящих на промежуточных путях к началу суток и из вагонов, находящихся в составе поездов, прибывших на станцию до начала рассматриваемых суток, причем суммарное число в каждом из таких поездов должно находиться в пределах, определенных числами  $L_{\min}$  и  $L^{\max}$ , а суммарный вес всех вагонов каждого такого поезда не должен превышать  $P$ .

$$\begin{aligned} L_{\min} \leq & \sum_{\substack{K^* \\ q \in \bigcup_{k=1}^{K^*} R(k)}} \sum_{\alpha_q=1}^{\xi_q^0} {}^k X O_{\alpha_q}(q) + \sum_{I(oжc)=1}^S \sum_{\theta_j^{I(oжc)} \in R(I(oжc))} \sum_{\substack{\beta_j^{I(oжc)}=1 \\ \beta_j^{I(oжc)} \notin I(oжc)^{\text{назн}}}} \eta^{I(oжc)} {}^k X I(oжc) \frac{\theta_j^{I(oжc)}}{\beta_j^{I(oжc)}} + \\ & + \sum_{H(np)=1}^{K(\Lambda(np))} \sum_{\theta_j^{H(np)} \in R(H(np))} \sum_{\substack{\gamma_j^{H(np)}=1 \\ \gamma_j^{H(np)} \notin H(np)^{\text{назн}}}} {}^v Y H(np) \frac{\theta_j^{H(np)}}{\gamma_j^{H(np)}} \leq L^{\max}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{q \in \bigcup_{k=1}^{K^*} R(k)} \sum_{\alpha_q=1}^{\xi_q^0} {}^k X O_{\alpha_q}(q) P O_{\alpha_q}(q) + \\
& + \sum_{I(\text{ож})=1}^S \sum_{\theta_j^{I(\text{ож})} \in R(I(\text{ож}))} \sum_{\substack{\beta_j^{I(\text{ож})}=1 \\ \beta_j^{I(\text{ож})} \notin I(\text{ож}) \text{ назн}}}^{\eta^{I(\text{ож})}} {}^k X I(\text{ож})^{\theta_j^{I(\text{ож})}} P I(\text{ож})^{\theta_j^{I(\text{ож})}} + \quad (1.3) \\
& + \sum_{H(np)=1}^{K(\Lambda(np))} \sum_{\theta_j^{H(np)} \in R(H(np))} \sum_{\substack{\gamma_j^{H(np)}=1 \\ \gamma_j^{H(np)} \notin H(np) \text{ назн}}}^{\nu^{H(np)}} {}^k Y H(np)^{\theta_j^{H(np)}} P H(np)^{\theta_j^{H(np)}} \leq P.
\end{aligned}$$

Ограничения (1.2) и (1.3) означают, что поезда, отходящие со станции до прибытия поезда  $\Lambda(np)$ , должны комплектоваться вагонами а) из числа отсортированных и стоящих на промежуточных путях к началу рассматриваемых суток, б) находящихся в составе поездов, прибывающих на станцию до начала рассматриваемых суток, в) находящихся в составе поездов  $\overline{1, \Lambda(np)-1}$ , прибывающих на станцию в течение суток.

Здесь  $K(\Lambda(np))$  – число поездов, отходящих со станции до прибытия поезда  $\Lambda(np)$ ,  $\Lambda(np) \in \overline{1, T+1}$ .

$$\sum_{k=1}^{K^*} {}^k X O_{\alpha'_j}(q) \leq \sum_{k=1}^{K^*} {}^k X O_{\alpha''_j}(q), \quad (1.4)$$

$$\forall \alpha''_j < \alpha'_j; \alpha'_j, \alpha''_j \in \overline{1, \xi_q^0}; q \in \bigcup_{k=1}^{K^*} R(k).$$

Ограничение (1.4) означает, что вагон, стоящий на любом промежуточном пути любого направления не может быть включен в состав какого-либо из отходящих поездов, если вагоны, стоящие впереди этого вагона (то есть имеющие порядковые номера меньше, чем порядковый номер этого вагона на промежуточном пути) не включены в состав ни одного из поездов из множества  $\overline{1, K^*}$ .

Аналогичный смысл имеют неравенства

$$\sum_{k=1}^{K^*} {}^k XI(o\mathcal{K}) \frac{\theta_j^{I(o\mathcal{K})}}{\left(\beta_j^{I(o\mathcal{K})}\right)'} \leq \sum_{k=1}^{K^*} {}^k XI(o\mathcal{K}) \frac{\theta_j^{I(o\mathcal{K})}}{\left(\beta_j^{I(o\mathcal{K})}\right)''}$$

$$\forall \left( \beta_j^{I(o\mathcal{K})} \right)'' < \left( \beta_j^{I(o\mathcal{K})} \right)' ; \left( \beta_j^{I(o\mathcal{K})} \right)', \left( \beta_j^{I(o\mathcal{K})} \right)'' \in \overline{1, \eta^{I(o\mathcal{K})}} \setminus I(o\mathcal{K})^{назн},$$

$$\theta_j^{I(o\mathcal{K})} \in R(I(o\mathcal{K})) \subset \overline{1, Q};$$

$$\sum_{k \in K(\Lambda(np))} {}^k YH(np) \frac{\theta_j^{H(np)}}{\left(\gamma_j^{H(np)}\right)'} \leq \sum_{k \in K(\Lambda(np))} {}^k YH(np) \frac{\theta_j^{H(np)}}{\left(\gamma_j^{H(np)}\right)''}$$

$$\forall \left( \gamma_j^{H(np)} \right)'' < \left( \gamma_j^{H(np)} \right)' ; \left( \gamma_j^{H(np)} \right)', \left( \gamma_j^{H(np)} \right)'' \in \overline{1, v^{H(np)}} \setminus H(np)^{назн},$$

$$\theta_j^{H(np)} \in R^*(H(np)), \Lambda(np) \in \overline{1, T+1}.$$

Доход станции от отправки  $K^*$  поездов является линейной функцией введенных булевых переменных

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{K^*} \left( \sum_{q \in \bigcup_{k=1}^{K^*} R(k)} \sum_{\alpha_q=1}^{\xi_q^0} {}^k XO_{\alpha_q}(q) CO_{\alpha_q}(q) + \right. \\ & + \sum_{I(o\mathcal{K})=1}^S \sum_{\theta_j^{I(o\mathcal{K})} \in R(I(o\mathcal{K}))} \sum_{\substack{\beta_j^{I(o\mathcal{K})}=1 \\ \beta_j^{I(o\mathcal{K})} \notin I(o\mathcal{K})^{назн}}} \eta^{I(o\mathcal{K})} {}^k XI(o\mathcal{K}) \frac{\theta_j^{I(o\mathcal{K})}}{\beta_j^{I(o\mathcal{K})}} CI(o\mathcal{K}) \frac{\theta_j^{I(o\mathcal{K})}}{\beta_j^{I(o\mathcal{K})}} + (1.5) \\ & \left. + \sum_{\theta_j^{H(np)} \in R(H(np))} \sum_{\substack{\gamma_j^{H(np)}=1 \\ \gamma_j^{H(np)} \notin H(np)^{назн}}} {}^k YH(np) \frac{\theta_j^{H(np)}}{\gamma_j^{H(np)}} CH(np) \frac{\theta_j^{H(np)}}{\gamma_j^{H(np)}} \right) \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Поскольку максимальное число вагонов, находящихся на станции, которые могут быть отправлены в составе  $K^*$  отходящих поездов, не может превосходить некоторого (определенного указанными выше числом вагонов в поезде и суммарным весом поезда) минимизация числа неотправленных вагонов эквивалентна максимизации числа отправленных вагонов. Соответств

вующая целевая функция имеет тот же вид, что и в (1.5) и получается из (1.5) путем приравнивания единице всех коэффициентов при переменных, то есть

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{K^*} \left( \sum_{\substack{q \in \bigcup_{k=1}^{K^*} R(k) \\ q \in R(k)}} \sum_{\alpha_q=1}^{\xi_q^0} {}^k X O_{\alpha_q}(q) + \right. \\
 & + \sum_{I(\text{ож})=1}^S \sum_{\theta_j^{I(\text{ож})} \in R(I(\text{ож}))} \sum_{\substack{\beta_j^{I(\text{ож})}=1 \\ \beta_j^{I(\text{ож})} \notin I(\text{ож}) \text{ назн}}}^{\eta^{I(\text{ож})}} {}^k X I(\text{ож}) \frac{\theta_j^{I(\text{ож})}}{\beta_j^{I(\text{ож})}} + \\
 & \left. + \sum_{\theta_j^{H(np)} \in R(H(np))} \sum_{\substack{\gamma_j^{H(np)}=1 \\ \gamma_j^{H(np)} \notin H(np) \text{ назн}}}^{v^{H(np)}} {}^k Y H(np) \frac{\theta_j^{H(np)}}{\gamma_j^{H(np)}} \right) \rightarrow \max
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Задача (1.6) является задачей булева программирования и может быть решена с использованием стандартного программного обеспечения.

### 1.1.3 Построение новой теоретико-игровой модели для отыскания оптимальных тарифов на перевозки грузов железнодорожным транспортом

Рассматривается рынок услуг операторов грузовых перевозок России, на котором  $n$  участников рынка – операторов грузовых перевозок, предлагают свои услуги по предоставлению под перевозки различных типов подвижного состава, называемых далее (с целью упрощения) вагонами. Предполагается, что каждый из участников рынка может владеть до  $m$  типов вагонов, а спрос на все предлагаемые и требуемые на рынке типы вагонов подчиняются некоторым балансовым ограничениям, имеющим форму систем линейных неравенств, причем возможности каждого из участников рынка также описываются (математически) системами линейных неравенств балансового типа. Каждый из участников рассматриваемого рынка стремиться «захватить» как можно большую долю рынка, изменяя свои тарифы на предоставление под перевозку принадлежащих ему вагонов, исходя из наличия у него конкрет-

ных типов вагонов, желаемого финансового результата (дохода) и имеющего у него (или предполагаемой им достоверной) информации о возможностях и намерениях других участников рынка. Далее рассматривается только «коммерческая» составляющая тарифа на предоставление под перевозку каждого типа вагонов, и анализ рассматриваемого рынка его участниками производится на некоторый определенный промежуток времени, в течение которого транспортная составляющая тарифа, определяемая ОАО «РЖД», остается неизменной для каждого типа вагонов. Требуется определить набор тарифов для каждого из участников рынка, по каждому из типов вагонов, обеспечивающий «компромиссное» распределение требуемых на рынке вагонов (к подаче их грузоотправителям) между участниками рынка в смысле ожидающего каждым из них дохода от предоставления вагонов под погрузку [8].

Пусть:

$n$  – число участников рынка;

$m$  – максимальное число типов вагонов, требуемых на рынке;

$y^i \in R^m$  – вектор, компонентами которого являются количества вагонов каждого типа, на спрос на которые может рассчитывать  $i$  участник рынка,

$i \in \overline{1, n}$ , т.е.,  $y_j^i$  – предполагаемое количество заказанных вагонов типа  $j$  у участника рынка  $i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ,  $j \in \overline{1, m}$ ;

$x^i \in R^m$  – вектор, компонентами которого являются тарифы на вагоны каждого типа, на спрос на которые может рассчитывать  $i$  участник рынка,  $i \in \overline{1, n}$ ,

т.е.,  $x_j^i$  – тариф на аренду вагона типа  $j$  для участника рынка  $i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ,  
 $j \in \overline{1, m}$ ;

$(x^*)^i \in R^m$  – вектор желаемых для  $i$ -го участника рынка тарифов на вагоны,

отклонение от которого рассматривается этим участником рынка как нежелательное;

$M^i \in R^m$  – выпуклый многогранник, образованный совместной системой линейных неравенств, описывающих ограничения, которым должны удовлетворять тарифы на аренду вагонов  $i$ -го участника рынка (по мнению остальных участников рынка),  $i \in \overline{1, n}$ ;

$\Omega^i \in R^m$  – выпуклый многогранник, образованный совместной системой линейных неравенств, описывающих ограничения, которым удовлетворяют возможности  $i$ -го участника рынка по поставкам вагонов на рынок (по мнению остальных участников рынка),  $i \in \overline{1, n}$ ;

$\Omega \in R^m$  – выпуклый многогранник, образованный совместной системой линейных неравенств, описывающей как потребности рынка по всем типам вагонов, так и возможности всех участников рынка по поставке вагонов на рынке (описываемые выпуклыми многогранниками  $\Omega^i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ).

Пусть далее

$$M^i = \left\{ x^i \in R_+^m : A^i x^i \geq b^i, i \in \overline{1, n} \right\} \neq \emptyset;$$

$$\Omega^i = \left\{ y^i \in R_+^m : B^i y^i \geq d^i, i \in \overline{1, n} \right\} \neq \emptyset;$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ y \in R_+^{mn} : y = (y^1, \dots, y^n), y^i \in \Omega^i, i \in \overline{1, n}, \underline{h} \leq \sum_{i=1}^n y^i \leq \bar{h}, \sum_{i \in I_k} y^i \geq T_k \right\} = \\ &= \left\{ y \in R_+^{mn} : \tilde{B}y \geq \tilde{d} \right\} \neq \emptyset; \end{aligned}$$

$\tilde{x}^i = (0, \dots, 0, x^i, 0, \dots, 0) \in R^{mn}$ , где  $0$  – нулевые векторы соответствующего размера.

$\tilde{M}^i = \left\{ \tilde{x}^i \in R_+^{mn} : \tilde{A}^i \tilde{x}^i \geq b^i, i \in \overline{1, n}, \tilde{A}^i = (\tilde{0}, \dots, \tilde{0}, A^i, \tilde{0}, \dots, \tilde{0}) \right\}$ , где  $\tilde{0}$  – нулевые матрицы соответствующих размеров, так что справедливо равенство  $\tilde{A}^i \tilde{x}^i = A^i x^i$ .

Здесь  $A^i$ ,  $B^i$ ,  $\tilde{B}$  – матрицы соответствующих размеров с действительными элементами:  $b^i$ ,  $d^i$ ,  $\tilde{d}$ ,  $\underline{h}$ ,  $\bar{h}$  – векторы соответствующих размеров с

действительными элементами;  $T_k$  – векторы с действительными элементами и  $I_k$  – подмножества множества натуральных чисел  $\overline{1,n}$ .

Взаимодействие всех участников рынка можно описать как игру  $n$  лиц на выпуклом многогранном множестве связанных стратегий игроков  $\Omega$  с функциями выигрыша:

$$\min_{\tilde{x}^i \in \tilde{M}^i} <(\tilde{x}^*)^i - (\tilde{x})^i, y>, i \in \overline{1,n},$$

которая является частным случаем игры  $n$  игроков с платежными функциями:

$$\min_{\tilde{x}^i \in \tilde{M}^i} <q^i, y> + <\tilde{x}^i, D_i y>,$$

где  $q^i = (\tilde{x}^*)^i$ ,  $D_i = (O_1, O_2, \dots, O_{i-1} - E_i, O_{i+1}, \dots, O_n)^T$ ,  $E_i$  – единичная матрица размера  $m$  и  $O_j$ ,  $j \in \overline{1,i-1}$ ,  $j \in \overline{i+1,n}$  – нулевые квадратные матрицы соответствующих размеров, и каждая из  $n$  платежных функций, являющихся суммой билинейной и линейной функции двух векторных переменных, подлежит максимизации на множестве  $\Omega$ .

При этом множество  $\Omega$  является множеством связанных стратегий игроков, поскольку в систему ограничений, описывающих множество  $\Omega$ , входят как ограничения, описывающие множества  $\Omega^i$ ,  $i \in \overline{1,n}$ , так и ограничения на сумму векторов  $y^i \in \Omega^i$ ,  $i \in \overline{1,n}$ . Таким образом, при поиске компромисса, каждый из  $n$  игроков выбирает множество приемлемых для него значений вектора  $y^i$  (числа вагонов каждого типа, которое он может предложить на рынке) и тариф на аренду вагонов каждого из этих типов вагонов, предоставляемых им на рынок услуг по перевозкам грузов на железной дороге.

Для этой задачи получены проверяемые достаточные условия равновесия [9], причем проверка этих условий сводится к решению задач математического программирования, с квадратичными ограничениями.

Результаты исследования в рамках настоящего подраздела отчета отражены в публикации [10].

#### 1.1.4 Построение новой математической модели для оптимизации стратегии перемещения порожних вагонов

Содержательная постановка рассматриваемой задачи может быть описана следующим образом. Рассматривается работа компании по предоставлению в аренду подвижного состава, которая стремится максимизировать прибыль, по крайней мере, сохранить, а по возможности увеличить число своих клиентов, минимизировать свои издержки и.т.д. Для достижения этой цели компании необходимо эффективно планировать использование (распределение) имеющегося у нее вагонного парка в условиях неопределенности спроса на вагоны со стороны клиентов и конкуренции со стороны аналогичных компаний-владельцев подвижного состава. Примером такой компании является ОАО "Федеральная Грузовая компания".

Хорошо известно, что для того, чтобы грузоотправитель мог отправить груз из одного пункта на сети железных дорог в другой, ему необходимо выбрать компанию-оператора грузовых перевозок, которая, в свою очередь, решает проблему доставки порожних вагонов в пункт отправления груза, заключая контракт на перевозку этих вагонов с ОАО РЖД. В частности, такая задача решается в случае, когда наблюдается нехватка свободных порожних вагонов в пункте отправления груза. Сложившаяся практика взаимодействия грузовладельцев с владельцами вагонов предполагает размещение клиентом (грузоотправителем) заказа на подачу вагонов за несколько дней до предполагаемого отправления груза. По этой причине, во многих случаях, в момент получения запроса на предоставление вагонов от конкретного владельца груза, владелец вагонов может не знать пункт назначения этого груза, что существенно усложняет проблему управления вагонным парком владельца вагонов, особенно такого крупного, как ОАО "Федеральная Грузовая компания". Таким образом, перед началом планирования подачи порожних вагонов компания-владелец вагонов (далее, оператор) имеет список заказов, каждый из которых "привязан" к некоторой станции отправки груза, к типу вагонов, к

числу требуемых клиентом вагонов и к моменту времени, к которому заказ на подачу вагонов должен быть выполнен, но пункты назначения подаваемых вагонов могут не быть известны оператору.

Пусть к моменту начала планирования получено некоторое множество заказов с известными требованиями к характеристикам подвижного состава и пусть известны количества вагонов компании в каждом пункте их дислокации. Пусть известны количества вагонов всех типов, которые в момент начала планирования движутся из пунктов назначения доставленных грузов в пункты дислокации порожних вагонов (в которых вагоны проходят необходимую обработку с целью их подготовки для перевозки других грузов). Ясно, что количество отправляемых вагонов ограничивается их запасом в пунктах дислокации порожних вагонов. Предполагая, что вагоны каждого типа могут быть направлены на выполнение очередного заказа только после прохождения одного из пунктов дислокации вагонов, а также, что оператор может арендовать вагоны у других (в частности, конкурирующих с ним) операторов, требуется составить оптимальный план перемещения собственных порожних вагонов компании и вагонов, арендованных ею, обеспечивающий выполнение поступивших заказов на подачу вагонов [11].

В результате исследования этой проблемы, рассмотренная задача сформулирована в виде задачи булева программирования, причем, при некоторых упрощающих предположениях, матрица этой задачи оказывается абсолютно унимодулярной, что позволяет отыскивать решение задачи симплекс-методом решения линейного программирования.

Результаты исследования в рамках настоящего подраздела отчета отражены в публикациях [12, 13].

### 1.1.5 Обобщение математической модели для отыскания оптимального расписания движения поездов

Железнодорожная сеть России является одной из крупнейших в мире, обеспечивая стабильную деятельность промышленных предприятий и осу-

ществляя огромные объемы грузовых и пассажирских перевозок. С ростом экономики Российской Федерации объемы грузоперевозок постоянно растут, вследствие чего возникает чрезмерная перегруженность некоторых участков пути, которая усугубляется еще и тем фактом, что примерно треть путей в стране по-прежнему остается одноколейной. Там, где из-за природных особенностей или нехватки инвестиционных ресурсов строительство двухколейного пути бывает практически невозможным, одноколейные участки пути являются наиболее нагруженными, причем по ним в обоих направлениях проходят пассажирские и пригородные поезда, график движения которых изменить крайне затруднительно, так что лишь свободные интервалы времени могут распределяться между грузовыми компаниями.

Проблема перегруженности одноколейных путей является одной из центральных для российской железнодорожной компании ОАО РЖД, для решения которой необходимо:

- а) составить расписание грузовых поездов таким образом, чтобы за ограниченные интервалы времени можно было пропустить максимальное количество поездов, следующих в обоих направлениях, с минимальным интервалом движения и при этом с соблюдением всех норм безопасности;
- б) извлечь максимальную прибыль от эксплуатации конкретного одноколейного пути;
- в) если невозможно пропустить все поезда, то, как определить, каким грузовым компаниям следует отдавать приоритет при составлении расписания.

Одним из возможных подходов к решению проблемы чрезмерной перегруженности одноколейных участков пути является проведение аукциона за право проезда по железной дороге, в результате которого его участники (грузовые компании), предложившие наибольшую цену за проезд, получат возможность проехать по напряженному участку пути, обеспечивая ОАО РЖД максимальную прибыль. Однако само по себе проведение аукциона не гарантирует того, что полученное расписание будет оптимальным и выполнимым с технической точки зрения. Возможно, например, в некоторых ситуациях

будет выгодней пустить два поезда, предложивших более низкую цену, но готовых подолгу стоять на станциях, соединяемых одноколейным участком пути, чем пропустить один поезд, предложивший более высокую цену за проезд, но при этом не готовый ожидать на этих станциях. Поэтому необходимо разработать механизм, который сможет выявлять наиболее оптимальное расписание при существующих предложениях цены и технических ограничениях одноколейного участка пути, а также будет определять победителя исходя не только из одного критерия – предложенной цены за грузоперевозку, но также руководствуясь другими критериями, такими как готовность пропускать поезда и ожидать на станциях, соединяемых одноколейным участком пути, перевозить груз в ночное время и т.д. [14].

Основной целью исследования являлось построение математической модели, которая будет учитывать возможность пропускать грузовые поезда партиями или «пакетами» (один грузовой состав вслед за другим через короткие интервалы времени) и разработка на ее основе механизма проведения одношагового аукциона. Такой механизм может быть применен в случае, если спрос на использование одноколейного пути превышает его пропускные способности и необходимо определить, каким грузовым компаниям следует отдать приоритет при составлении оптимального расписания. Предлагаемый подход является принципиально новым для российских железных дорог и может быть применим в реальных ситуациях, с которыми сталкивается ОАО РЖД в настоящее время.

Математическая модель для анализа возможностей напряженного участка пути по транспортировке грузовых составов партиями с учетом пассажирских и специальных перевозок формализует следующую практическую ситуацию. На двух железнодорожных станциях, разделенных напряженным участком пути (одноколейным участком) находятся грузовые составы, ожидающие прохода по этому участку в течение суток. Поэтому же участку в течение рассматриваемых суток перемещаются пассажирские и пригородные поезда в соответствии с некоторым расписанием. Для проезда указанных

выше грузовых поездов остается  $K$  промежутков времени длины  $\Delta_k$ ,  $k \in \overline{1, K}$ . Предполагается, что каждый промежуток имеет протяженность, позволяющую, по крайней мере, одному из ожидающих проезда грузовых поездов проехать между станциями в соответствующем направлении. Известно число грузовых поездов, ожидающих проезда на каждой станции и время, требуемое каждому из поездов для перемещения между станциями, а также стоимость проезда, которую может получить ОАО РЖД за проезд каждого из указанных грузовых поездов по рассматриваемому участку пути. Требуется определить какие поезда (из числа ожидающих проезда) следует пропустить по рассматриваемому напряженному участку пути с тем, чтобы железнодорожная компания получила максимальных доход от использования этого участка пути в указанные  $K$  промежутков времени.

В отличие от работы [9], где рассматривалась подобная задача, в рамках исследований в 2014 г. рассматривалось «пакетное» движение грузовых поездов, т.е. взаимосвязь отправки нескольких грузовых поездов с интервалом (длина которого определяется техническими нормами движения поездов), с тем, чтобы на каждом из  $K$  промежутков можно было бы пропустить «пакет» (или партию) грузовых поездов в одном или в другом направлении. Заметим, что хотя возможна ситуация, когда в течение одного из  $K$  промежутков можно было бы пропустить «пакеты» поездов в обоих направлениях, соответствующая задача представляет, все же, в основном теоретический, нежели практический интерес и поэтому не рассматривалась. Некоторые предварительные результаты проведенных исследований представлены в [14].

### 1.1.6 Некоторые выводы

Проведенные исследования показали, что предложенные подходы к построению математических моделей в рассмотренных в исследовании организационных системах позволяют формулировать задачи оптимизации функционирования этих систем в форме задач, для решения которых могут быть

использованы методы оптимизации, обладающие значительными вычислительными возможностями и, в первую очередь, методы линейного программирования. Установление такой возможности является принципиальным для столь крупномасштабных систем как региональные сети электроснабжения и транспортные системы с точки зрения практического использования результатов исследований.

В то же время, проведенные исследования показали, что указанные выше результаты существенно опираются на некоторые упрощающие предположения, использованные при построении математических моделей исследованных организационных систем. Поэтому, несмотря на принципиальную возможность использования разработанных математических моделей в практике планирования и управления работой рассмотренных систем, следует изучить возможность смягчения указанных выше упрощающих предположений. Представляется целесообразным провести это изучение с точки зрения получения более точного описания моделируемых объектов, оставаясь, однако, в рамках классов моделей, на основе которых можно формулировать задачи оптимизации, допускающими использование методов решения, обладающих значительными вычислительными возможностями.

Такого рода изучение предполагает проведение теоретических исследований, прежде всего, в части отыскания классов игр, для которых возможно установить не только проверяемые достаточные, но и проверяемые необходимые и достаточные условия равновесия, а также расширения классов прикладных задач дискретной оптимизации с линейными ограничениями, матрицы которых обладают свойством абсолютной унимодулярности.

## 1.2 Теоретико-игровое исследование по библиометрии

Возрастающее число работ с множеством соавторов создает новые задачи для библиометрии. Во многих работах, относящихся к ранжированию авторов, групп ученых, университетов или стран исследователи сталкиваются с проблемой разделения ценности публикаций [15]. Информация об истинном

вкладе соавторов часто отсутствует. В таком случае существует несколько подходов, которые не используют дополнительную информацию. Первый подход (стандартный подсчет) приписывает полную ценность публикации каждому соавтору [15]. Линдси [16] рассмотрел 40 работ по исследованию науки, и большинство из них использовало стандартный подсчет. Широко распространенный  $h$ -индекс основан на этом предположении [17]. Второй распространенный подход – равное разделение вклада между соавторами [16, 18]. Ценность публикации в данном случае делится поровну. Третий подход появился в библиометрических исследованиях сравнительно недавно [19, 20, 21, 22]. В данных исследованиях используется вектор Шепли [23] в качестве меры разделения вклада соавторов.

Вектор Шепли – концепция решения кооперативной игры. Он был разработан для разделения выгод от кооперации. Например, индивид  $A$  зарабатывает \$100, индивид  $B$  зарабатывает \$60. Совместно они зарабатывают \$180. Существуют четыре возможных коалиции:  $\emptyset$ ,  $\{A\}$ ,  $\{B\}$ ,  $\{A, B\}$ . Индивид  $A$  может присоединиться к коалиции  $\emptyset$ , и тогда его предельный вклад будет равен \$100, или он может присоединиться к коалиции  $\{B\}$ , и тогда его предельный вклад будет равен  $180 - 60 = \$120$ . Индивид  $B$  может присоединиться к коалиции  $\emptyset$ , и тогда его предельный вклад будет равен \$60, или он может присоединиться к коалиции  $\{A\}$ , и тогда его предельный вклад будет равен  $180 - 100 = \$80$ . Оба индивида имеют равные права на выгоды от кооперации. Эта идея воплощена в векторе Шепли, усредняя предельные вклады индивидов по всем возможным коалициям. Согласно вектору Шепли, индивид  $A$  в кооперативном взаимодействии будет иметь  $(\$120 + \$100)/2 = \$110$ . Аналогично индивид  $B$  будет иметь  $(\$60 + \$80)/2 = \$70$ .

Вектор Шепли имеет прозрачную интерпретацию в библиометрических исследованиях. Выгодой от кооперации является множество совместно написанных публикаций. Авторы являются игроками, которые делят общую ценность публикаций. Каждой коалиции (подмножеству авторов) ставится в со-

ответствие число публикаций. Вектор Шепли равен предельному вкладу автора, усредненному по всем возможным коалициям. Каждый автор получает справедливую часть публикаций.

Из-за сложности вычисления вектора Шепли в библиометрических исследованиях используют некоторые приближения. Толь [22] использовал вектор Шепли для ранжирования академических институтов. Толь рассчитывал средний предельный вклад каждого исследователя, он рассматривал вклад только в существующие академические институты, а не во всевозможные коалиции. Папапетру и др. [20] рассматривали группы авторов, которые имели совместную публикацию, а не все возможные коллaborации. Нарайанам и Нарахари [19] рассчитывали вектор Шепли, используя выборочный метод.

Другим подходом является поиск такого индекса, который был бы эквивалентным вектору Шепли, но более прост в расчёте. Такой подход был применен к проблемам управления цепями поставок [24] и в индексах филогенетического разнообразия [25], но не был применен к проблеме разделения вклада соавторов. Данный подраздел показывает эквивалентность вектора Шепли и метода равного разделения долей соавторов. Это создает возможность в точности рассчитать теоретическое значение вектора Шепли, а не его приближенные значения. Вектор Шепли и метод равного разделения вклада соавторов имеет множество обоснований, происходящих из различных областей.

Вектор Шепли удовлетворяет некоторым желательным математическим свойствам. Шепли [23] доказал, что четыре аксиомы однозначно задают данное решение. Во-первых, решение должно распределять полную ценность публикации (эффективность); во-вторых, решение должно давать равные доли авторам с равными предельными вкладами (симметричность); в-третьих, автор без публикаций не должен получить ничего (аксиома болвана); в-четвертых, решение должно быть аддитивно, т.е. для любых двух непересекающихся множеств публикаций решение, посчитанное по объединённому

множеству, должно быть равно сумме решений, посчитанных по каждому множеству публикаций отдельно (аддитивность). Существует несколько других аксиоматических обоснований вектора Шепли. Харт и Мас-Колей [26] описали вектор Шепли как единственное решение, удовлетворяющее симметричности, эффективности и согласованности. Чун [27] описал вектор Шепли как единственное решение, удовлетворяющее эффективности, тривиальности, коалиционной стратегической эффективности и справедливому ранжированию. Последние из перечисленных свойств означают, что относительные ранги агентов, относящихся к коалиции, не зависят от изменения богатства коалиции, что важно для нашей задачи.

Майерсон [28] рассматривал игры с коалиционными структурами, описанными графами. В библиометрическом контексте это может быть сеть соавторов. Он показал, что вектор Шепли является единственным справедливым правилом дележа для таких проблем. Справедливость в данном контексте означает, что соавторы имеют равный выигрыш от кооперации.

Существует множество подходов к задаче разделения публикационной ценности между соавторами, требующих дополнительную информацию: позиционные веса [29, 30, 31], гармонические веса [32], вклад в заметность публикации [26] и распределение всей ценности публикации главному соавтору [33] и другие подходы.

Следующий пункт демонстрирует разъясняющий пример. Математическая модель, определение игр и главная теорема представлена в пункте 1.2.2.

### 1.2.1 Примеры разделение соавторства

Этот пункт иллюстрирует задачу разделения авторства. Пусть три автора  $N = \{a, b, c\}$  создали шесть публикаций (Таблица 1.1). Публикация 1 имеет одного автора, а публикация 6 – трёх соавторов. Информация о вкладе соавторов в каждую публикацию отсутствует.

Таблица 1.1 – Множества соавторов

1	2	3	4	5	6
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$

Автор  $a$  наиболее выдающийся, но большинство его публикаций написаны в соавторстве. Проблема в том, как разделить шесть публикаций между тремя соавторами. Очевидно, что автор  $a$  имеет не менее двух публикаций, написанных без соавторов, но не более пяти публикаций (все публикации автора  $a$ , написанные в одиночку или в соавторстве). Нахождение точного числа публикаций каждого автора требует моделирования.

Первый подход использует метод равных весов. Ценность публикации делится поровну между соавторами. Таблица 1.2 представляет данное решение  $y^{EW} = (3.33, 1.83, 0.83)$ .

Таблица 1.2 – Метод равногого разделения долей соавторов

Авторы	$\varphi_i(v) = \sum_{j=1}^m \frac{\sum_{k \in S_j} w_k}{\sum_{k \in S_j} w_k} q_j$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$y_i^{EW}$
$a$	1	1	0	1/2	1/2	1/3	3.33
$b$	0	0	1	1/2	0	1/3	1.83
$c$	0	0	0	0	1/2	1/3	0.83

Подход, использующий вектор Шепли, сложнее. Прежде всего, следует определить соответствие между каждым подмножеством авторов и числом публикаций. Существуют два главных подхода. Первый подход называется игрой полных обязательств, где каждый соавтор необходим для публикации. Ценность публикации принадлежит коалиции, если все соавторы публикации входят в коалицию. Функция  $v_1(S)$ , отраженная в Таблице 1.3, сопоставляет каждому подмножеству авторов (коалиции) число публикаций для игры полных обязательств.

Таблица 1.3 – Игра полных обязательств

$i$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\varphi_i(v + w) = \varphi_i(v) + \varphi_i(w)$	$\varphi_i(v) = \sum_{j=1}^m \varphi_i(v^j)$
$v_1(S)$	0	2	1	0	4	3	1	6

По определению вектор Шепли задает средний предельный вклад авторов. В Таблице 1.4 рассмотрены все возможные перестановки авторов. Предельный вклад рассчитан для каждого автора и каждой перестановки.

Таблица 1.4 – Вектор Шепли для игры полных обязательств

Перестановки	Вклад автора $a$	Вклад автора $b$	Вклад автора $c$
$abc$	2	2	2
$acb$	2	3	1
$bac$	3	1	2
$bca$	5	1	0
$cab$	3	3	0
$cba$	5	1	0
Вектор Шепли	3.33	1.83	0.83

Таблица 1.4 построена следующим образом. Рассмотрим, например, третью строку. Автор  $b$  – первый в перестановке. Он вносит вклад  $v_1(\{b\})=1$ . Автор  $a$ , второй в перестановке, получает  $v_1(\{a,b\}) - v_1(\{b\}) = 3$ . Автор  $c$  имеет оставшиеся 2 публикации. Таким образом, рассматриваются все перестановки.

Игра полной ценности основана на максимальном количестве публикаций коалиции. Наличие только одного автора из множества соавторов достаточно для обладания публикационной ценностью. Функция  $v_2(S)$  представлена в Таблице 1.5.

Таблица 1.5 – Игра полной ценности

$S$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$v_2(S)$	0	5	3	2	6	5	4	6

Выполняя те же операции как в Таблице 1.4, расчет вектора Шепли представлен в Таблице 1.6. Более того Таблица 1.6 может быть получена из Таблицы 1.4 с помощью перестановки строк. Это не случайное совпадение. Вектор Шепли у двойственных игр совпадает [34]. По определению игры  $v_1$  и  $v_2$  являются двойственными.

Таблица 1.6 – Вектор Шепли для игры полной ценности

Перестановки	Вклад автора $a$	Вклад автора $b$	Вклад автора $c$
$abc$	5	1	0
$acb$	5	1	0
$bac$	3	3	0
$bca$	2	3	1
$cab$	3	1	2
$cba$	2	2	2
Вектор Шепли	3.33	1.83	0.83

Этот пример демонстрирует эквивалентность метода равного разделения долей соавторов и вектора Шепли для приведенных игр. Следующий пункт представляет общий результат об эквивалентности.

### 1.2.2 Основные результаты

Математическая модель проблемы разделения авторства включает множество авторов  $N = \{1, \dots, n\}$ , множество публикаций  $P = \{1, \dots, m\}$ . Каждая публикация соотносится с множеством соавторов  $S_j \in 2^N$  и значением публикационной ценности  $q_j \in R$ . В качестве публикационной ценности можно использовать количество цитирований, или приравнять ценности всех публикаций к единице. Задача состоит в том, чтобы найти показатель работы каждого автора  $y_i \in R$ . Сумма показателей работы авторов должна быть равна сумме ценностей публикаций

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^m q_j .$$

Существуют два основных подхода к данной задаче: метод равного разделения долей соавторов и вектор Шепли.

Метод равного разделения долей соавторов. Ценность публикации  $q_j$  делится поровну между соавторами

$$y_i^{EW} = \sum_{j=1}^m \frac{1_{i \in S_j}}{|S_j|} q_j , \quad (1.7)$$

где  $|S_j|$  мощность множества  $S_j$ , число соавторов и  $1_{i \in S_j} = 1$  если  $i \in S_j$  и  $1_{i \in S_j} = 0$  иначе.

До определения вектора Шепли зададим кооперативную игру. Кооперативная игра описывается характеристической функцией  $v(S)$ , которая соот-

носит некоторое число каждой коалиции. Существуют три разумных подхода к определению этой функции.

Игра полных обязательств. Отсутствие одного из соавторов не дает право коалиции присвоить ценность публикации. Для всех  $S \in 2^N$  задается характеристическая функция игры

$$v_1(S) = \sum_{j=1}^m 1_{S_j \subseteq S} q_j.$$

Игра полной ценности. Каждый соавтор получает полную ценность публикации

$$v_2(S) = \sum_{j=1}^m 1_{S_j \cap S \neq \emptyset} q_j.$$

Игра равных долей. Каждый соавтор получает равную долю ценности публикации

$$v_3(S) = \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^m \frac{1_{i \in S_j}}{|S_j|} q_j.$$

Вектор Шепли это средний предельный вклад автора в коалицию. Одним из возможных определений является средний предельный вклад игрока при случайному порядке формирования коалиций. Пусть  $\sigma$  будет перестановкой игроков и  $\sigma(i)$  – место игрока  $i$  в перестановке  $\sigma$ . Предельным вкладом игрока  $i$  является  $v(S_{\sigma(i)}^\sigma) - v(S_{\sigma(i)-1}^\sigma)$ , где  $S_{\sigma(i)-1}^\sigma$  множество первых  $\sigma(i)-1$  игроков в перестановке  $\sigma$  (множество игроков из  $N$ , которые находятся раньше игрока  $i$  в перестановке  $\sigma$ ). Принимая во внимание все возможные перестановки, формула для расчёта вектора Шепли получается следующей:

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} [v(S_{\sigma(i)}^\sigma) - v(S_{\sigma(i)-1}^\sigma)].$$

Теорема об эквивалентности показывает, что все четыре способа подсчета показателей работы авторов дает один и тот же результат.

Теорема 1.2 (об эквивалентности). Для всех задач разделения соавторства,  $\varphi_i(v_1) = \varphi_i(v_2) = \varphi_i(v_3) = y_i^{EW}$ .

Для всех игр, которые не различают авторов и публикации по именам или другим характеристикам мы получили, что метод равного разделения соавторства эквивалентен вектору Шепли. Тот же результат получается через аксиоматику вектора Шепли (см. [35]). Вектор Шепли удовлетворяет свойству аддитивности:

$$\varphi_i(v + w) = \varphi_i(v) + \varphi_i(w).$$

Вектор Шепли для всего множества публикаций равен сумме векторов Шепли игр, соответствующих дележу одной публикации

$$\varphi_i(v) = \sum_{j=1}^m \varphi_i(v^j),$$

где  $v^j$  – игра разделения ценности публикации  $j$ :  $v^j(S_j) = 1$ ,  $v^j(N \setminus S_j) = 0$ .

Ценность публикации должна быть разделена между соавторами в соответствии с аксиоматикой вектора Шепли: эффективность, симметричность, аксиома болвана, аддитивность. Единственный метод разделения ценности публикации в соответствии с этими принципами это равное разделение между соавторами.

Подход вектора Шепли применим к неоднородному множеству ученых, отличающихся некоторыми весами. Эти веса используются для определения распределения вероятностей на порядках авторов, и взвешенный вектор Шепли является ожидаемым вкладом авторов [36]. Существует несколько аксиоматических обоснований вектора Шепли [37, 38]. Согласно взвешенному подходу вклад каждого автора в публикацию — это его относительный вес в публикации. Таким образом, вектор Шепли это сумма относительных весов автора в каждой публикации

$$\varphi_i(v) = \sum_{j=1}^m \frac{\sum_{i \in S_j} w_i}{\sum_{k \in S_j} w_k} q_j. \quad (1.8)$$

Формула (1.8) обобщает формулу (1.7) на случай не равных весов авторов. Эквивалентом взвешенного вектора Шепли будет показатель, в котором ценность каждой публикации делится пропорционально весам соавторов.

### 1.2.3 Некоторые выводы

Данный раздел заполняет пробел в литературе, демонстрируя эквивалентность двух существующих решений задачи о разделении ценности публикаций между соавторами. Сформулированная в этом подразделе теорема эквивалентности показывает, что метод разделения ценности публикаций между соавторами, основанный на вычислении вектора Шепли, и метод равного разделения долей соавторов эквивалентны. Эта теорема, с одной стороны, дает теоретико-игровое обоснование метода равного разделения долей соавторов, с другой стороны, предлагает простой метод вычисления вектора Шепли, заменяя его подсчет вычислением суммы долей соавторов. Кроме того, в работе получена формула для расчета взвешенного вектора Шепли.

Результаты исследования в рамках настоящего подраздела отчета отражены в публикациях [39].

## 1.3 Исследования индексов влияния, учитывающих предпочтения участников в анонимных играх

При вычислении индексов влияния, как хорошо известных (Банцафа, Шепли-Шубика и других [40, 41]), так и новых (зависящих от предпочтений агента, [42]) необходимо перебрать почти все коалиции, то есть подмножества множества игроков, что делает расчеты невозможными, если количество игроков превышает пятьдесят.

Тем не менее, если все игроки имеют целое число голосов, есть игроки с одинаковым количеством голосов, многие партийные блоки имеют равное общее количество голосов или сумма голосов всех игроков мала, то становятся эффективными алгоритмы, использующие производящие функции.

Но эти алгоритмы разработаны только для классических индексов влияния и некоторых конкретных типов индексов влияния, зависящих от предпочтений агентов [43].

В этом разделе отчета мы рассмотрим важный частный случай, когда все игроки имеют равное количество голосов. Для классических индексов влияние всех игроков одинаково, но, если учесть предпочтения игроков, ситуация становится намного сложнее и интереснее.

В этом подразделе будут построены эффективные алгоритмы для расчета индексов влияния, зависящих от предпочтений агентов для большинства типов ([42]) этих показателей.

### 1.3.1 Основные обозначения и определения

Определение 1.1. Назовем простой игрой пару  $(N, v)$ , где  $N$  представляет собой множество игроков, а  $v$  – функция, сопоставляющая каждому подмножеству  $N$  или ноль или 1. Кроме того, функция  $v$  должна быть монотонной, то есть, если  $S$  и  $T$  являются подмножествами  $N$ , а  $S$  является подмножеством  $T$ , то  $v(T) \geq v(S)$ .

Коалиция  $S$  называется выигрывающей, если  $v(S) = 1$  и проигрывающей в противном случае.

Далее мы будем рассматривать наиболее распространенный тип простых игр – голосования с квотой.

Определение 1.2. Голосованием с квотой называется вектор из  $(n + 1)$ -го положительного числа  $(q; w_1, \dots, w_n)$ , первое из которых называется квотой, а остальные – числом голосов (или весом) соответствующего игрока.

Коалиция  $S$  – выигрывающая, если сумма голосов всех членов  $S$  не менее чем значение квоты  $\sum_{i \in S} w_i \geq q$ .

Пример 1.1. Пусть  $n = 4$  и  $v = (301; 238, 92, 64, 56)$ . Чтобы коалиция была выигрывающей, в нее должны входить первый игрок и либо второй, либо третий. Поэтому множество выигрывающих коалиций:

$$W = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

Определение 1.3. Игрок  $i$  называется ключевым в коалиции  $S$ , если  $S$  выигрывающая и  $S \setminus \{i\}$  – проигрывающая.

В предыдущем примере агент 1 ключевой в любой выигрывающей коалиции, а агент 3 – в коалициях  $\{1,3\}$ ,  $\{1,3,4\}$ .

Индекс влияния сопоставляет каждой простой игре вектор  $\Phi(v)$ . Его  $i$ -я компонента интерпретируется как влияние игрока  $i$ . Самые известные индексы влияния – индексы Банцафа и Шепли-Шубика.

Индекс влияния Банцафа (BI) [40] рассчитывается в предположении, что влияние игрока пропорционально количеству коалиций, в которых он ключевой.

Общий индекс Банцафа  $TB_{Z_i}$  для игрока  $i$  равен

$$TB_{Z_i} = |W_i|.$$

Индекс Банцафа ( $B_{Z_i}$ ) получается из общего индекса нормированием:

$$\beta_i(v) = \frac{TB_{Z_i}}{\sum_i TB_{Z_i}}.$$

Подсчитаем оба этих индекса в нашем случае. Первый игрок ключевой в любой выигрывающей коалиции, второй игрок – в двух коалициях ( $\{1,2\}$  и  $\{1,2,4\}$ ), третий также в двух коалициях и последний – не ключевой ни в одной из коалиций. Таким образом, общий индекс Банцафа равен

$$TB_{Z_1} = 6, \quad TB_{Z_2} = TB_{Z_3} = 2, \quad TB_{Z_4} = 0,$$

а нормированный индекс Банцафа

$$\beta_1(v) = 0.6, \beta_2(v) = \beta_3(v) = 0.2, \beta_4(v) = 0.$$

### 1.3.2 Индексы влияния, зависящие от предпочтений участников

Рассмотрим пример. Пусть  $N = \{A, B, C\}$  представляет собой набор агентов,  $v = (3; 2,1,1)$ . Выигрывающие коалиции –  $\{A, B\}$ ,  $\{A, C\}$ ,  $\{A, B, C\}$ . Индекс Банцафа индекс равен  $\beta_A = \frac{3}{5}, \beta_B = \frac{1}{5}, \beta_C = \frac{1}{5}$ . Предположим теперь, что агенты  $B$  и  $C$  не вступают в коалицию друг с другом. Должно ли это повлиять на их возможности в голосовании? Очевидно, коалиция  $\{A, B, C\}$  невозможна, но это снижает общий индекс Банцафа только для игрока  $A$ , потому что только он ключевой в этой коалиции. Новый индекс Банцафа равен  $\beta_A = \frac{1}{2}, \beta_B = \frac{1}{4}, \beta_C = \frac{1}{4}$ . Как видно, желание двух игроков не вступать в коалицию друг с другом повышает их возможности в этом голосовании. То же самое решение может дать также обратный эффект, например, если игроки  $A$  и  $B$  не вступают в одну коалицию.

Итак, влияние сильно зависит от предпочтений агентов.

Для того чтобы учесть желание игрока  $i$  сотрудничать с партией  $S$ , рассмотрим функцию интенсивности  $f(i, S)$  [42, 44]. Тогда значения функции  $\chi(i)$  вычисляется как

$$\chi(i) = \sum_S f(i, S),$$

где суммирование происходит по выигрывающим коалициям, в которой игрок  $i$  – ключевой. Тогда индексы влияния вычисляются, как

$$\alpha(i) = \chi(i)$$

и

$$N\alpha(i) = \frac{\chi(i)}{\sum_{j=1}^n \chi(j)}, \quad f^+(i, S, P) = \frac{1}{s-1} \sum_{j \in S} p_{ij}, \quad f^-(i, S, P) = \frac{1}{s-1} \sum_{j \in S} p_{ji},$$

$$f(i, S, P) = \frac{1}{2}(f^+(i, S, P) + f^-(i, S, P)),$$

$$f(S, P) = \frac{1}{s(s-1)} \sum_{i,j \in S} p_{ji}, \quad f_{\max}^+(i, S, P) = \max_{j \in S, j \neq i} p_{ij}, \quad f_{\min}^+(i, S, P) = \min_{j \in S, j \neq i} p_{ij},$$

$$f_{mf}(i, S, P) = \frac{1}{2} \left( f_{\max}^+(i, S, P) + f_{\min}^+(i, S, P) \right),$$

$$f_{\max}^-(i, S, P) = \max_{j \in S, j \neq i} p_{ji}, \quad f_{\min}^-(i, S, P) = \min_{j \in S, j \neq i} p_{ji},$$

$$f_{sm}^+ = \frac{1}{s-1} \sqrt[s]{\sum_{j \in S} p_{ij}^s}, \quad f_{sm}^- = \frac{1}{s-1} \sqrt[s]{\sum_{j \in S} p_{ji}^s},$$

$$f_{\max \min}(S, P) = \max_{i \in S} \min_{j \in S, j \neq i} p_{ij}, \quad f_{\min \max}(S, P) = \min_{i \in S} \max_{j \in S, j \neq i} p_{ij},$$

$$f_{mf}(S, P) = \frac{1}{2} \left( f_{\max \min}(S, P) + f_{\min \max}(S, P) \right).$$

В этом пункте мы будем говорить о самом важном и распространенном виде голосования с квотой. Предположим, что любой агент имеет только один голос. Это означает, что все игроки имеют одинаковые возможности. Таким образом, любой индекс влияния, не учитывающий предпочтений агентов, будет одинаков для всех игроков. Но реальные возможности агентов могут быть различными. Следовательно, для того, чтобы получить всю информацию об этом типе голосования необходимо принимать во внимание предпочтения агентов.

Как видно из формул, для вычисления  $\alpha$ -индексов мы должны перебрать все выигрывающие коалиции. Но иногда количество этих коалиций может быть слишком велико, чтобы сделать это. Пусть  $n$  – число агентов быть и квота  $k$  примерно равна  $\lceil \frac{n}{2} + 1 \rceil$ , тогда число выигрывающих коалиций будет равно

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \sim \frac{n!}{(n/2)!(n/2)!} \sim \frac{n^n \cdot \sqrt{\pi n} \cdot 2^n \cdot e^n}{e^n \cdot n^n \cdot (\pi n)} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Здесь мы используем формулу Стирлинга. Когда количество игроков больше, чем 500, значение этой функция будет более  $10^{148}$ . Ниже будет продемонстрировано, как эти индексы могут быть найдены вычислительно эффективными способами.

Во-первых, отметим, что нам не нужно вычислять  $\alpha$  – индекс для любой функции интенсивности [44]. Например, если  $\alpha^1(v)$  уже вычислен, то  $\alpha^2(v)$  может быть получен путем применения такого же метода к транспонированной матрице  $P$ . Одна функция вычисляет сумму элементов в строке, другая функция вычисляет тот же показатель в столбцах, и при транспонировании  $p_{ij}$  и  $p_{ji}$  меняются местами. Эта идея позволяет объединить эти индексы в несколько групп:

- 1) линейного типа;
- 2) симметричного линейного типа;
- 3) типа «максимум»;
- 4) типа Минковского;
- 5) типа «минимакс».

Есть три способа, которые помогают выразить  $\alpha$ -индексы один через другой:

- 1) при транспонировании элементы матрицы  $P$  в строках и столбцах меняются местами, поэтому меняются местами индексы  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ ,  $\alpha^5$  и  $\alpha^8$ ,  $\alpha^6$  и  $\alpha^9$ ,  $\alpha^{10}$  и  $\alpha^{11}$ ;
- 2) к замене каждого элемента  $p_{ij}$  матрицы  $P$  на  $1 - p_{ij}$  минимум по любому подмножеству превращается в максимум и наоборот, поэтому индексы  $\alpha^5$  и  $\alpha^6$ ,  $\alpha^8$  и  $\alpha^9$ ,  $\alpha^{12}$  и  $\alpha^{13}$  выражаются один через другой;
- 3) индексы  $\alpha^3$ ,  $\alpha^7$  и  $\alpha^{14}$  вычисляются как,  $\frac{1}{2}(\alpha^1 + \alpha^2)$ ,  $\frac{1}{2}(\alpha^5 + \alpha^6)$  и  $\frac{1}{2}(\alpha^{12} + \alpha^{13})$ , соответственно, для не нормированных индексов.

Поэтому достаточно научиться вычислять индексы только по одному представителю индексов каждого типа, например,  $\alpha^1$ ,  $\alpha^4$ ,  $\alpha^5$ ,  $\alpha^{10}$  и  $\alpha^{12}$ .

### 1. Линейный тип:

$$\alpha_i^1(v) = \sum_{S, i \in S, |S|=k} \sum_{j \in S, j \neq i} p_{ij}, \quad N\alpha_i^1(v) = \alpha_i^1(v) / \sum_{j=1}^n \alpha_j^1(v).$$

Отметим четыре ключевые особенности этого индекса. Во-первых, индекс показателя равен сумме элементов матрицы  $P$ . Только  $p_{ix}$ ,  $x \neq i$  включены в эту сумму с положительными коэффициентами. Кроме того, коэффициент для  $p_{ix}$ ,  $x \neq i$  не зависит от  $x$ , так что все эти коэффициенты равны. И, наконец, сумма всех коэффициентов равна  $C_{n-1}^{k-1}(k-1)$ , что не зависит от  $i$ .

Поэтому мы можем вычислить первый  $\alpha$ -индекс, как

$$c \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij},$$

где  $c$  – постоянная, которая не зависит от конкретного  $i$ . Таким образом, нормированный  $\alpha$ -индекс равен

$$N\alpha_i^1(v) = \frac{c \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij}}{c \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij}} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij}}, \quad N\alpha_i^2(v) = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ji}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ji}}.$$

Как мы уже говорили, коэффициент  $c$  не зависит от элементов матрицы  $P$ , поэтому этот коэффициент будет тем же самым и для транспонированной матрицы  $P$ . Следовательно, если  $\alpha_i^3 = \frac{1}{2}(\alpha_i^1 + \alpha_i^2)$ , то

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^3(v) = \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i^1(v) + \alpha_i^2(v))}{2} = \frac{1}{2} \cdot (c \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij} + c \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ji}) = c \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij}.$$

В результате получим

$$N\alpha_i^3(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_i^1(v)}{c \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij}} + \frac{\alpha_i^2(v)}{c \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij}} \right) = \frac{1}{2} (N\alpha_i^1(v) + N\alpha_i^2(v)).$$

## 2. Симметричный линейный тип:

$$\alpha_i^4(v) = \sum_{S, |S|=k} \sum_{j \in S, j \neq i} p_{kj}, \quad N\alpha_i^4(v) = \alpha_i^4(v) / \sum_{j=1}^n \alpha_j^4(v).$$

Этот индекс обладает всеми ключевыми особенностями предыдущего, за исключением второго признака. Кроме того, для каждого игрока  $x$  оба элемента  $p_{ix}$  и  $p_{ix}, x \neq i$  имеют одни и те же коэффициенты, равные числу коалиций, содержащих  $x$  и  $i$ , т.е.  $p_{ix}$  и  $p_{ix}, x \neq i$ . Кроме того, для двух игроков  $x$  и  $y$ ,  $x, y \neq z$ , это число будет равно  $C_{n-3}^{k-3}$ . Поэтому  $\alpha_i^4(v)$  может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \alpha_i^4(v) &= ((n-2) \cdot c \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^n (p_{ij} + p_{ji}) + (k-2) \cdot c \cdot \sum_{j,k=1, j \neq i, j \neq k}^n p_{jk}) = \\ &= ((n-k) \cdot c \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^n (p_{ij} + p_{ji}) + (k-2) \cdot c \cdot \sum_{j,k=1, j \neq k}^n p_{jk}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N\alpha_i^4(v) &= \frac{(n-k) \cdot c \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^n (p_{ij} + p_{ji}) + (k-2) \cdot c \cdot \sum_{j,k=1, j \neq k}^n p_{jk}}{2c \cdot (n-k) \cdot \sum_{j,k=1, j \neq k}^n p_{jk} + c \cdot n \cdot (k-2) \cdot \sum_{j,k=1, j \neq k}^n p_{jk}} = \\ &= \frac{(n-k) \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^n (p_{ij} + p_{ji}) + (k-2) \cdot \sum_{j,k=1, j \neq k}^n p_{jk}}{k \cdot (n-2) \cdot \sum_{j,k=1, j \neq k}^n p_{jk}} = \\ &= \frac{2(n-k)}{k(n-2)} N\alpha_i^3(v) + \frac{k-2}{k(n-2)} = \frac{2(n-k)}{k(n-2)} \cdot N\alpha_i^3(v) + \frac{(k-2)n}{k(n-2)} \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Как мы уже упоминали, индекс влияния Банцафа в этой игре равен  $\frac{1}{n}$ , поэтому мы можем определить  $N\alpha_i^4(v)$ , как

$$N\alpha_i^4(v) = \frac{2(n-k)}{k(n-2)} \cdot N\alpha_i^3(v) + \frac{(k-2)n}{k(n-2)} \cdot B_{Z_i}.$$

Пусть  $n \geq 1$ , тогда

$$N\alpha_i^4(v) = \frac{2}{k} \cdot N\alpha_i^3(v) + \left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdot B_{Z_i}.$$

Как видно из этой формулы, индекс  $N\alpha_i^4(v)$  примерно равен индексу Банцафа для больших  $k$  и  $N\alpha_i^3(v)$  при малых  $k$ . Поэтому с помощью данного индекса влияния невозможно сделать какие-либо выводы.

### 3. Тип «Максимум»:

$$\mathbf{a}_i^5(v) = \sum_{S, i \in S, |S|=k} \max_{j \in S, j \neq i} p_{ij}, \quad N\mathbf{a}_i^5(v) = \mathbf{a}_i^5(v) / \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j^5(v).$$

Требуемый индекс является суммой элементов матрицы  $P$  с различными коэффициентами. Пусть  $x$  таков, что  $p_{ix} = \max_{j \neq i} p_{ij}$ . Количество минимальных выигрывающих коалиций  $S$ , содержащих  $x$  и  $i$ , равно  $C_{n-2}^{k-2}$ . Следовательно,  $c_x = C_{n-2}^{k-2}$ . Теперь пусть  $y$  таков, что  $p_{iy} = \max_{j \neq i, x} p_{ij}$ , тогда  $c_y = C_{n-3}^{k-3}$ . Соответственно  $c_z = C_{k-2}^{k-2}$  и, наконец, и после этого каждый коэффициент будет равен нулю.

Итак, этот метод может быть разделен на два этапа. Сначала нужно упорядочить элементы, а потом просуммировать с надлежащими коэффициентами. Пусть  $(p_{ij_1}, \dots, p_{ij_{n+1-k}}, \dots, p_{ij_{n-1}})$ ,  $p_{ij_1} \geq p_{ij_2} \geq \dots \geq p_{ij_{n-1}}$ ,  $j_k \neq i$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Тогда не нормализованный индекс равен

$$\mathbf{a}_i^5(v) = C_{n-2}^{k-2} p_{ij_1} + C_{n-3}^{k-2} p_{ij_2} + \dots + C_{k-2}^{k-2} p_{ij_{n+1-k}}.$$

Сам индекс получается просто путем деления на сумму коэффициентов.

### 4. Тип Минковского:

$$\mathbf{a}_i^{10}(v) = \sum_{S, i \in S, |S|=k} \sqrt[k]{\sum_{j \in S, j \neq i} p_{ij}^s / (k-1)}, \quad N\mathbf{a}_i^{10}(v) = \mathbf{a}_i^{10}(v) / \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j^{10}(v).$$

В общем случае эта задача может быть слишком сложной, чтобы решить ее быстро. Например, если все элементы матрицы  $P$  различны, нужно перебирать все множества из  $k$  агентов. Конечно, можно использовать некоторые приблизительные статистические методы, но ошибки расчета индексов может быть выше, чем сами значения. Поэтому будем предполагать, что каждый элемент  $p_{ij} \in M = \{0, \frac{1}{m}, \dots, 1\}$ ,  $|M|=m+1$ . Такие модели широко распространены в реальной жизни. Благодаря этому предположению, мы не заборимся о предпочтениях любого агента, а имеем дело только с количеством одинаковых же элементов в каждом столбце. Рассмотрим вектор  $r = (r_0, \dots, r_m)$ , где  $r_i$  – число элементов в  $i$ -м столбце (кроме  $p_{ii}$ ), и вектор  $l = (l_0, \dots, l_m)$ ,  $l_i \leq r_i$ ,  $\sum_{j=0}^m l_j = k - 1$ . Для любого вектора  $l$  функция интенсивности может быть вычислена, и это значение учитывается  $C_{r_0}^{l_0} C_{r_1}^{l_1} \dots C_{r_m}^{l_m}$  раз. Таким образом, мы должны умножить каждое значение функции интенсивности на соответствующий коэффициент, и получить все необходимые числа для расчета данного индекса.

### 1.3.3 Некоторые выводы

В этом подразделе отчета построены эффективные алгоритмы для расчета индексов влияния в случае, когда все игроки имеют равное количество голосов и с учетом предпочтений агентов. При этом все множество различных индексов влияния было разбито на небольшое число классов, каждый из которых был исследован на независимость и возможность эффективного вычисления.

Быстродействия полученных алгоритмов достаточно для проведения соответствующего анализа всех существующих выборных органов с анонимным правилом принятия решения. В частности, предполагается продолжить исследование и проанализировать распределение влияния в Европарламенте.

## 2 Исследования по анализу данных и численному моделированию

В этом разделе отчета приведены результаты исследований по анализу данных и численному моделированию. Результаты исследований, отраженные в этом разделе, были получены в следующих теоретических и прикладных направлениях:

- применение мер релевантности строка-текст к автоматизации рубрикации научных статей;
- применение ординальных методов теории коллективного выбора к построению альтернативных версий глобального рейтинга промышленной конкурентоспособности стран;
- применение методов сравнений нечетких чисел к ранжированию вузов по гистограммам ЕГЭ и исследование устойчивости сравнения гистограмм;
- численный анализ поведения биржи методом имитационного моделирования.

### 2.1 Применение мер релевантности строка-текст к автоматизации рубрикации научных статей

Разработка надёжных средств автоматизации семантического анализа текстовых материалов является одной из самых насущных задач информатики. Уровень актуальности этой проблемы не может быть переоценён из-за взрывного накопления текстовых документов в интернете. В частности, внимание многих исследователей привлекает проблема категоризации или классификации текстовых документов: для заданной коллекции текстовых документов и заданного множества категорий, представленных текстовыми метками, требуется каждому документу приписать релевантные ему категории. Решение этой проблемы является основой таких важных направлений информатики как извлечение/ поиск информации [45], каталогизация документов [46], аннотирование текстов [47] и пр. Имеются два основных подхода к её решению: обучение с учителем, когда алгоритм «обучается» задаваемым

«учителем» категориям, и самообучение, когда алгоритм сам определяет, какие категории релевантны данному тексту. Первоначально речь шла о том, чтобы каждому тексту приписывалась единственная категория. В последнее время всё чаще допускается многоаспектная категоризация, когда один и тот же документ может сопровождаться многими категориями (multi-label classification). В частности, нас интересует проблема рубрикации документов, таких как научные публикации, в системе рубрик, заданных таксономией соответствующей области знания или технологии. Например, публикации в сфере информатики и вычислительных процессов могут индексироваться рубриками, так называемой Computing Classification System[48] – многоуровневой таксономии, разработанной международной Ассоциацией вычислительной техники (Association for Computing Machinery (ACM)) [49]. Мы будем обозначать эту таксономию через ACM CCS. Как и многие другие классификации, она представляет собой иерархическую систему, в которой каждая рубрика является частью более общей концепции и сама, в свою очередь, делится на более конкретные части. Например, согласно ACM CCS, «майнинг данных» – это часть «приложений информационных систем», в свою очередь, содержащая такие части как «кластерный анализ» и «ассоциативные правила». В [50] приводятся обзор и результаты экспериментального сравнения методов многоаспектной категоризации с учителем для ситуаций, в которых категории образуют иерархическую систему, а в [51] подобный метод предлагается применительно непосредственно к системе рубрик классификации ACM CCS.

Тематика построения систем рубрикации в режиме самообучения практически не привлекала исследователей, вероятно, потому, что не существовало адекватного аппарата. Вообще, задачи анализа данных и текстов в режиме самообучения пока решаются с значительно более низкими уровнями точности, чем аналогичные задачи в режиме обучения с учителем (см., например, [52, 53, 54]). В этом подразделе отчета отражены исследования возможности использования популярного в анализе текстов инструмента – мер

релевантности строка-текст – для рубрикации документов в режиме самообучения. Использование мер релевантности строк и текстов в различных задачах обработки текстов насчитывает относительно долгую историю (см., например, [55, 56, 57]) и включает довольно развитый математический аппарат вероятностного моделирования применительно к проблематике извлечения информации [56, 58]. Особенность данного подхода состоит в том, что используются только символные последовательности и частоты их фрагментов, т.е. отсутствует какая-либо привязка к синтаксису, грамматике и семантике языка, на котором написаны тексты. С одной стороны, это определённое преимущество, так как методы, основанные на мерах релевантности, не зависят от особенностей языка и, следовательно, универсальны. С другой стороны, взятые как есть, они не могут учесть такие особенности естественного языка как наличие и использование синонимов, не говоря уже об особенностях структуры предложений.

Мы рассматриваем три основных подхода к измерению релевантности строка-текст, разработанные в международной литературе:

- 1) подход, основанный на векторном представлении текстов, идущий от самых ранних работ в области информационного поиска [59, 60];
- 2) подход, основанный на вероятностной модели текстов и их тематики [58];
- 3) подход, основанный на представлении текстов аннотированными суффиксными деревьями [57, 61].

Последний подход дополнен оригинальной мерой релевантности, идея которой была сформулирована и описана авторами отчета в [55]. Эта мера отличается от других мер релевантности тем, что имеет чёткий операционный смысл – суммарной условной вероятности символа в «совпадении», в сокращённой форме, СУВСС. Цель исследований, отраженных в данном подразделе – подвергнуть эти меры экспериментальному сравнению в проблеме рубрикации.

В связи с этим следует упомянуть ещё одну инновацию данной работы – формирование относительно надёжной коллекции текстов для эксперимен-

тирования. В отличие от проблемы распознавания образов или, как её в последнее время называют, проблемы классификации, для которой имеется огромное количество данных, содержащих реальные классы объектов реального мира, в проблеме рубрикации таких «объективных» данных нет и быть не может. Любая рубрикация текстов порождена субъективными представлениями тех, кто рубрикацию выполняет. Поэтому важно, чтобы рубрикация была выполнена экспертами. В нашем случае речь идёт об аннотациях статей, опубликованных некоторыми журналами, издаваемыми вышеупомянутой Ассоциацией вычислительной техники АСМ. Авторы этих статей сами выполняли рубрикацию с помощью тематических единиц таксономии АСМ CCS, что даёт данной коллекции определённую степень добротности.

Мы постарались включить в эксперимент все наиболее популярные способы предобработки текстов. Для оценки результатов рубрикации мы использовали два популярных способа оценки, которые по-разному обобщают оценки точности и полноты, используемые для оценки результатов в традиционных задачах классификации, а также предложили ещё одну, в некоторых отношениях более адекватную меру. Наши эксперименты показывают существенные преимущества СУВСС по сравнению с другими мерами релевантности в разрезе всех трёх оценок, хотя и оставляют желать лучшего с точки зрения достигаемого качества рубрикации.

### 2.1.1 Меры релевантности

Мы рассматриваем три основных способа представления текстов: векторную модель, вероятностную модель и аннотированное суффиксное дерево АСД.

#### 2.1.1.1 Векторная модель

Согласно векторной модели [59], текстовый документ представляется множеством слов (или каких-нибудь других элементов документа), причём

каждому слову соответствует своя координата векторного пространства. В качестве значения обычно используется величина так называемой tf-idf кодировки, равная количеству вхождений слова в документ, делённому на логарифм относительного количества документов, содержащих это слово [59]. Таким образом, текст характеризуется вектором в многомерном пространстве слов. Релевантность строки вектору определяется в векторной модели так: строка представляется вектором в том же многомерном пространстве, а релевантность определяется по сходству двух построенных векторов. В соответствии со сказанным, будем рассматривать аннотацию научной статьи и таксономическую тему как два набора термов. Терм – это слово либо в том виде, в котором оно встретилось в тексте, либо после некоторой предобработки.

Пусть  $w_{ia} = tf \times idf = tf_{ia} \times \log \frac{|A|}{n(t_i)+1}$ , где  $tf_{ia}$  – частота терма  $t_i$  в аннотации  $a$ ,  $n(t_i)$  – число аннотаций, содержащих терм  $t_i$ ,  $|A|$  – общее число аннотаций. Каждой аннотации соответствует вектор в пространстве термов. Размерность этого вектора совпадает с количеством различных термов во всех аннотациях  $N$ , а компоненты вектора – это tf-idf веса. Составим аналогичный вектор для таксономической темы с использованием tf-idf весов для термов из этой темы. Уровень релевантности таксономической темы и аннотации определяется через косинусную меру близости между соответствующими векторами. Пусть  $w_{ia}$ ,  $w_{iq}$  – веса терма  $t_i$  в аннотации (abstract)  $a \in A$  и таксономической теме (topic)  $q$ . Сходство между таксономической темой и аннотацией определяется по формуле:

$$\text{relevance}(\text{topic}, \text{abstract}) = \cos(\vec{q}, \vec{a}) = \frac{\vec{q} \times \vec{a}}{||\vec{q}|| \times ||\vec{a}||} = \frac{\sum_{i=1}^N w_{ia} \times w_{iq}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N w_{ia}} \sqrt{\sum_{i=1}^N w_{iq}}}.$$

### 2.1.1.2 Вероятностная модель

Вероятностная мера релевантности используется, в основном, в задачах извлечения /поиска информации. Она построена в предположениях теорети-

ческой модели, согласно которой каждый текстовый документ представляется как смесь двух Пуассоновских распределений [58]. Одно из них отвечает за распределение обычных слов, другое – за распределение «элитных» слов, то есть, тех, на которых лежит основная смысловая нагрузка в разрезе рассматриваемой тематики. Обычно тематика задаётся тем запросом на извлечение информации, относительно которого и оценивается релевантность. Уровень релевантности данной строки данному тексту в этой модели определяется по вероятности того, что слова, принадлежащие строке, окажутся элитными в тексте.

Так же, как и векторная модель, вероятностная модель предполагает, что аннотация (abstract) и таксономическая тема (topic) – два набора термов. Ставшая очень популярной в последнее время мера релевантности BM25 придаёт больший вес «значимым» термам и меньший – «незначимым»:

$$\text{relevance}(\text{topic}, \text{abstract}) = \sum_{i=1}^N \text{IDF}(t_i) \frac{(k_1+1)t f_{ia}}{t f_{ia} + k_1(1-b+b \frac{|A|}{avgdl})},$$

где  $avgdl$  – среднее количество слов в аннотации, а  $b$ ,  $k_1$  – константы, равные, как правило 1.5 и 0.75, соответственно, согласно [58].

В качестве нормализующего сомножителя используется функция IDF, имеющая следующий вид:  $\text{IDF}(t_i) = \log \frac{|A|-n(t_i)+0.5}{n(t_i)+0.5}$ , где  $|A|$  – общее число аннотаций, а  $n(t_i)$  – число аннотаций, содержащих терм  $t_i$ . Функция IDF имеет смысл обратной частоты: чем больше документов содержат данный терм, тем менее он значим.

### 2.1.1.3 Модель аннотированного суффиксного дерева (АСД)

Согласно модели АСД [57, 55], текстовый документ характеризуется не совокупностью слов или термов, а фрагментами – последовательностями символов в том порядке, в котором они встречаются в тексте. Каждому такому фрагменту текста приписывают числовую характеристику, показывающую, какие фрагменты являются более важными в данном тексте.

Аннотированное суффиксное дерево – это структура данных, используемая для вычисления и хранения всех фрагментов текста совместно с их частотами. Она задаётся как корневое дерево, в котором каждый узел соответствует одному символу и помечен частотой того фрагмента текста, который кодирует путь от корня до данного узла.

Чтобы ограничить глубину конструируемого АСД, мы разбиваем текст на короткие фрагменты – «строки», состоящие из двух – четырех слов. Алгоритм построения АСД, представляющий собой модификацию известных методов построения суффиксных деревьев [57, 61], описан нами в [55] (рисунок 2.1). Там же приводится процедура сличения таксономической темы с АСД и экспериментально показано, что глубина дерева, построенного по строкам из 2-4 слов, вполне достаточна в задаче рубрикации научных статей в области информатики. По всей видимости, дело в том, что формулировки таксономических тем ACM CCS состоят из примерно такого же числа слов.

Каждую научную публикацию мы представляем своим АСД, с которым сличаем строки формулировок таксономических тем из таксономии ACM CCS для вычисления оценок релевантности. Оценка степени релевантности, или «присутствия» таксономической темы в данном АСД, вычисляется следующим образом:

Выделяются все суффиксы, т.е. конечные фрагменты, строки таксономической темы.

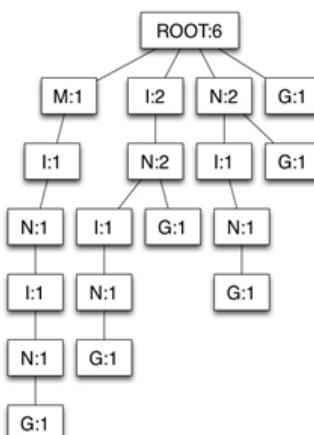


Рисунок 2.1 – Аннотированное суффиксное дерево (АСД) для строки “mining”

Для каждого суффикса вычисляется оценка его совпадения (match) с АСД:

$$\text{score}(\text{match}(suffix, ast)) = \sum_{node \in \text{match}} \frac{f(node)}{f(\text{parent}(node))},$$

где совпадение – это путь от корня дерева, кодирующий совпадающий с ним префикс суффикса или суффикс целиком,  $f(node)$  – частота, приписанная узлу АСД из совпадения,  $f(\text{parent}(node))$  – частота, приписанная родителю данного узла.

Оценка релевантности вычисляется как среднее всех оценок, приходящееся на один символ:

$$\text{relevance}(topic, abstract) = \text{SCORE}(topic, ast) = \frac{\sum_{suffix} \text{score}(\text{match}(suffix, ast)) / |suffix|}{|string|},$$

где  $|suffix|$ ,  $|string|$  – количество символов в суффиксе и в строке. В этой формуле score – это шкалирующая функция, переводящая оценку совпадения в уровень релевантности. Мы рассматриваем три вида шкалирующей функции  $\phi(x)$ , рекомендованных в [57] на основе экспериментов по категоризации электронной почты:

- линейная (обозначение – linear),  $\phi(x) = x$ ;
- логистическая (обозначение – logit),  $\phi(x) = \log \frac{x}{1-x} = \log(x) - \log(1-x)$ ;
- квадратный корень (обозначение – root),  $\phi(x) = \sqrt{x}$ .

Из этих трёх только линейная, ничего не меняющая функция, имеет очевидный операциональный смысл – средней условной вероятности символа в совпадении (СУВСС); две нелинейные шкалы из [57] использованы для контроля.

Оценка релевантности строки “dine” при использовании линейной шкалирующей функции для АСД, изображенного на рисунке 2.1 (АСД), равна, согласно вышеприведённому определению:

$$\frac{\left[ \text{score(dine,ast)}/4 + \text{score(ine,ast)}/3 + \text{score(ne,ast)}/2 + \text{score(e,ast)} \right]}{4} = 0 + \frac{\phi\left(\frac{2}{6}\right) + \phi\left(\frac{2}{2}\right)}{3*4} + \frac{\phi\left(\frac{2}{6}\right)}{2*4} + 0 = \\ \frac{\frac{1}{3} + 1}{12} + \frac{\frac{1}{3}}{8} = \frac{11}{72}.$$

В больших АСД на первых уровнях располагается довольно большое число узлов с относительно высокими частотами, которые дают примерно одинаково большой вклад в оценку любой строки, накладываемой на АСД. Первый уровень характеризует частоты отдельных символов, второй – частоты упорядоченных пар символов, третий – частоты упорядоченных троек и т.д. Очевидно, что такие короткие элементы текста не могут нести особой тематической направленности. Поэтому возникает гипотеза, что вклады узлов начальных уровней АСД в оценки релевантности носят характер шума, и оценка релевантности станет более адекватной, если ее очистить от вклада узлов начальных уровней. Для проверки этой гипотезы мы обнуляли частоты узлов на первом, втором и т.д. уровнях от корня и обозначали такие способы вычисления через  $\phi(X)$ , где  $\phi$  – вид шкалирующей функции, а  $X$  – уровень в АСД, до которого обнулялись частоты. Таким образом, мы использовали три семейства моделей АСД с различными шкалирующими функциями и три способа удаления «коротких» совпадений путём насильтственного приравнивания нулю частот на начальных уровнях АСД.

Результат использования любой из рассмотренных мер релевантности применительно к данному тексту – упорядочение всех рассмотренных тематических единиц по степени релевантности между ними и текстом.

### 2.1.2 Способы представления текста

Использование векторной и вероятностных моделей предполагает представление текста в виде неупорядоченного набора термов. Под термами понимаются либо слова в исходном виде, либо некоторые значимые фрагменты слов, как правило, основы, часто называемые «стемами», либо же словарные формы (леммы) слов [46]. Кроме этих двух традиционных способов представления текста, мы рассматривали способ, согласно которому в качестве

термов используются совпадения, получаемые при наложении всех ключевых словосочетаний на АСД. Понятно, что в «длинных» совпадениях фиксируется информация не только об отдельных словах, как обычно, но и об их упорядоченности, а в коротких – части слов, не учитываемые традиционными способами. Конкретные способы выбора термов из множества всех слов или всех совпадений, использованные в экспериментах, представлены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Способы представления текста как совокупностей термов

Обозначение	Описание
words	Все вхождения слов в неизменённом виде.
stems	Стемы (основы) всех слов. Для выделения стемов использован стеммер Портера [62] из библиотеки NLTK [63].
coll3	Все совпадения, полученные наложением всех таксономических тем на АСД для текстов, в качестве строк которых взяты последовательные тройки слов.
coll3.4	Те из термов coll3, которые состоят из 4 и более букв.
coll3.5	Те из термов coll3, которые состоят из 5 и более букв.
coll3.6	Те из термов coll3, которые состоят из 6 и более букв.
coll3_long	Те термы из coll3, которые являются самыми длинными из совпадений соответствующей таксономической темы с АСД.
coll3_long.4	Те из термов coll3_long, которые состоят из 4 и более букв.
coll3_long.5	Те из термов coll3_long, которые состоят из 5 и более букв.
coll3_long.6	Те из термов coll3_long, которые состоят из 6 и более букв.

Символьные совпадения фрагментов таксономических тем с фрагментами аннотаций могут до некоторой степени помочь решить проблему потери порядка слов при представлении текста в виде «мешка» термов. Допустим, например, что в текстовом документе встречаются последовательно два слова так же, как в какой-нибудь таксономической теме. Если эту таксономическую тему наложить на АСД, построенное по документу, то точно получится совпадение, состоящие из двух этих слов, а также и все их фрагменты. Если же будут учитываться только вхождения отдельных слов или их стемов (основ), то связь между такими двумя словами будет потеряна. При поиске совпадений по методу АСД мы использовали разные способы наложения таксономических тем на АСД, построенное для данной аннотации, и различные ограничения на минимальную длину совпадения (см. Таблицу 2.1).

### 2.1.3 Постановка эксперимента

Для того, чтобы поставить вычислительный эксперимент по сравнению относительных преимуществ использования различных мер релевантности в проблеме рубрикации научных публикаций, надо определить три основные составляющие такого эксперимента:

- 1) набор данных, на которых производится сравнение;
- 2) набор методов, участвующих в сравнении;
- 3) способ оценки качества результатов, получаемых при использовании того или иного метода.

Эти составляющие описаны в нижеследующих разделах.

#### 2.1.3.1 Выбор данных

Данные взяты из электронной библиотеки ACM Digital Library. В этой библиотеке хранятся архивы журналов ACM. В свободном доступе находятся аннотации большей части научных статей и вспомогательные сведения, такие как ключевые слова и таксономические темы таксономии ACM CCS, приписанные авторами к научным статьям для рубрикации статей в библиотеке, т.н. авторские темы. Задача заключается в том, чтобы подобрать к каждой научной статье несколько наиболее релевантных таксономических тем.

Эксперимент проводился для коллекции данных, состоящей из трех частей: аннотаций научных статей, таксономии ACM CCS 2012, а также приписанных статьям их авторами тем из этой таксономии (см. рисунок 2.2). Эти части кратко представлены ниже.

Аннотации всех научных статей, опубликованных за период с начала 2007 года по первый квартал 2013 года включительно, в следующих журналах, размещённых на портале ACM [49]:

- ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD);
- ACM Transactions on Internet Technology (TOIT);

– ACM Transactions on Speech and Language Processing (TSLP).

Выбор журналов определялся профессиональными интересами авторов. Общее число аннотаций в данной коллекции – 244.

Таксономия ACM CCS 2012, состоящая из 2074 таксономических тем [48]. В таксономии ACM CCS 2012 6 уровней. На первом уровне располагается 13 основных разделов (см. рисунок 2.2), на втором уровне – 90, на третьем – 547, на четвертом уровне находится большая часть листьев таксономии – 1074 тем. Некоторые из листьев появляются при дальнейшем дроблении тем – на пятом и шестом уровнях; но их сравнительно немного – 326 и 24.

Авторские темы, приписанные аннотации – это, как правило, 2-3 таксономические темы низших уровней таксономии, а также все темы, лежащие на пути от корня до них в дереве таксономии ACM CCS.

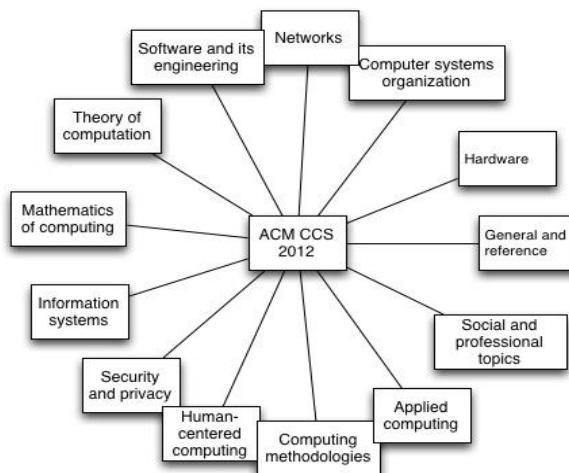


Рисунок 2.2 – Первый уровень таксономии ACM CCS 2012 [48]

Пример документа из рассматриваемого множества приведён в Таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Пример аннотации, участвующей в эксперименте. Статья выбрана случайно.

Discovering Knowledge-Sharing Communities in Question-Answering Forums	
Mohamed Bouguessa, Shengrui Wang, Benoit Dumoulin	
ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD), V. 5, no.1, December 2010	
<p>In this article, we define a knowledge-sharing community in a question-answering forum as a set of askers and authoritative users such that, within each community, askers exhibit more homogeneous behavior in terms of their interactions with authoritative users than elsewhere. A procedure for discovering members of such a community is devised. As a case study, we focus on Yahoo!Answers, a large and diverse online question-answering service. Our contribution is twofold. First, we propose a method for automatic identification of authoritative actors in Yahoo!Answers. To this end, we estimate and then model the authority scores of participants as a mixture of gamma distributions. The number of components in the mixture is determined using the Bayesian Information Criterion (BIC), while the parameters of each component are estimated using the Expectation-Maximization (EM) algorithm. This method allows us to automatically discriminate between authoritative and nonauthoritative users. Second, we represent the forum environment as a type of transactional data such that each transaction summarizes the interaction of an asker with a specific set of authoritative users. Then, to group askers on the basis of their interactions with authoritative users, we propose a parameter-free transaction data clustering algorithm which is based on a novel criterion function. The identified clusters correspond to the communities that we aim to discover. To evaluate the suitability of our clustering algorithm, we conduct a series of experiments on both synthetic data and public real-life data. Finally, we put our approach to work using data from Yahoo!Answers which represent users activities over one full year.</p>	
Таксономические темы ACM CCS, приписанные автором (авторские темы)	
Human-centered computing	Information systems
Human computer interaction (HCI)	Information systems applications
Interaction paradigms	Data mining
Web-based interaction	

Отметим, что авторы статьи, представленной в Таблице 2.2, в своей рубрикации предпочли оттенить взаимодействие человека и компьютера как её основной сюжет. На наш взгляд, это не очень согласуется с содержанием аннотации. Согласно аннотации, статья представляет собой скорее упражнение в применении вероятностной модели кластер-анализа для выявления сообществ на основе информации с сайтов, пользователи которых задают вопросы и получают ответы от других пользователей. Термины “cluster” и “clustering” 6 раз участвуют в различных подразделениях таксономии ACM CCS, но никак не отражены в авторской рубрикации. Подобные нюансы интерпретации должны учитываться при оценке систем автоматической рубрикации.

### 2.1.3.2 Выбор мер релевантности

В качестве мер оценки релевантности таксономической темы и аннотации научной статьи, берутся популярные меры, рассмотренные выше:

- косинусная мера близости на векторах tf-idf в векторной модели релевантности;
- мера релевантности BM25 в вероятностной модели релевантности;
- мера средней условной вероятности символа в совпадении, основанная на АСД, с тремя шкалирующими функциями.

Эти меры перечислены в Таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Обозначения рассматриваемых мер релевантности

Обозначение	Мера релевантности
cosine	косинусная мера релевантности
okapibm25	мера релевантности BM25
ast.linear	мера СУВСС с линейной шкалирующей функцией
ast.logit	мера СУВСС с логистической шкалирующей функцией
ast.root	мера СУВСС со шкалирующей функцией в виде квадратного корня

### 2.1.3.3 Оценка качества результатов

Зная авторские таксономические темы, можно оценить, насколько корректными получились упорядоченные списки таксономических тем, получаемые в результате применения той или иной меры релевантности. Мы использовали для оценки результатов две популярные характеристики точности: MAP (Mean Average Precision) и nDCG (normalized discounted cumulative gain) [56]. Они часто используются в тех вычислительных экспериментах и разработках, в которых возникает задача оценки качества ранжирований, например, при разработке рекомендательных систем [64] или систем извлечения новостей [65]. Другое приложение этим мерам – в работах по обучению ранжированию (learning to rank) [66]. В этих работах MAP и nDCG используются в качестве оптимизируемого критерия в ходе обучения. Меры MAP и nDCG применимы и для целей данной работы, так как результаты использо-

вания той или иной меры релевантности тоже ранжированы по значению этой меры. Для вычисления этих характеристик может использоваться следующая общая схема отбора таксономических тем:

- таксономические темы ранжируются по убыванию их релевантности;
- отбираются первые  $k$  (топ  $k$ ) таксономические темы, отсекая все остальные;
- вычисляется оценка получившегося ранжирования.

Мера MAP может быть представлена следующим образом:

$$\text{AveP} = \frac{\sum_{k=1}^n P(k) \times \text{rel}(k)}{|\text{relevant\_topics}|}, \text{MAP} = \frac{\sum_{a \in \text{abstracts}} \text{AveP}(a)}{|\text{abstracts}|},$$

где  $P(k)$  – точность на уровне  $k$  в упорядоченном по убыванию мере релевантности списке таксономических тем,  $\text{rel}(k)$  – бинарный показатель, принимающий значение 1, если  $k$ -тая таксономическая тема в списке является авторской, и 0 в обратном случае,  $|\text{relevant\_topics}|$  – число авторских таксономических тем,  $n$  – количество рассматриваемых таксономических единиц из топа списка. Здесь AveP – средняя точность – рассчитывается для каждого текста рассматриваемого множества. Мера MAP имеет смысл средней точности, нормализованной по всем аннотациям.

Мера nDCG – это отношение оценки полученного ранжирования к оценке идеального случая:  $\text{nDCG}_k = \frac{\text{DCG}_k}{\text{IDCG}_k}$ , где  $\text{DCG}_k = \text{rel}(1) + \sum_{i=2}^k \frac{\text{rel}(i)}{\log_2 i}$  – количество авторских таксономических тем среди топ  $k$  таксономических тем, нормированное на их место в ранжировании,  $\text{IDCG}_k = \text{rel}(1) + \sum_{i=2}^{|\text{relevant\_topics}|} \frac{1}{\log_2 i}$  – значение DCG у идеального ранжирования. Меру nDCG можно усреднять, что мы и делаем, чтобы получить общее значение nDCG для всех 244 рассматриваемых научных статей.

Мы выбрали  $k = 15$  для MAP и nDCG, чего заведомо должно хватить, так как это  $k$  больше, чем количества авторских таксономических тем в нашей коллекции.

Кроме мер MAP и nDCG, мы использовали также собственную меру оценки полученных результатов, имеющую простой операциональный смысл – количество публикаций, у которых авторские темы попали в топ  $k$  ранжированных таксономических тем. Другими словами, подсчитывается число авторских тем, попавших в топ  $k$ . Будем обозначать эту меру через  $I_k$  (Intersection at  $k$ ). Данная мера удобна тем, что позволяет легко отделить «хорошие» публикации – те, для которых удалось восстановить все или почти все авторские темы – от «трудных», для которых авторские темы находятся в конце соответствующего ранжирования, а также оптимальный порог отсечения  $k$ , т. е. число таксономических тем, которые могут быть использованы для рубрикации конкретной публикации.

В принципе, меры MAP и nDCG тоже позволяют устанавливать пороговые значения, но они имеют значительно менее интуитивных характер, чем пороговые значения, которые определяются мерой  $I_k$ .

#### 2.1.4 Результаты эксперимента

Полученные ранжирования тем оценивались по 6 характеристикам релевантности: четыре значения  $I_k$ , количество попаданий авторских тем в топ  $k$ , при  $k = 1, 5, 10, 15$ , а также меры MAP и nDCG при  $k=15$ . Эти оценки используются для сравнения, во-первых, рассматриваемых мер релевантности, во-вторых, рассматриваемых способов предобработки текстов. Результаты оценки сведены в Таблицы 2.4 – 2.6, соответствующие рассматриваемым мерам релевантности – косинусной (Таблица 2.4), BM25 (Таблица 2.5) и СУВСС (Таблица 2.6).

Таблица 2.4 – Оценка полученных при использовании различных способов предобработки текстов результатов с помощью косинусной меры релевантности

Способ предобработки Слов	Количество попаданий авторских тем в топ k				MAP_15	nDCG_15
	I_1	I_5	I_10	I_15		
Words	10	44	60	73	0.0748	0.0245
Stems	8	37	57	77	0.0788	0.0250
coll3	14	41	58	76	0.0911	0.0278
coll3.4	14	31	46	59	0.0727	0.0207
coll3.5	9	31	50	71	0.0642	0.0237
coll3.6	12	31	45	57	0.0633	0.0218
coll3_long	8	32	48	60	0.0599	0.0187
coll3_long.4	7	22	41	56	0.0570	0.0182
coll3_long.5	7	12	51	65	0.0643	0.0208
coll3_long.6	8	32	46	53	0.0444	0.0158

Таблица 2.4 показывает, что косинусная мера в целом работает лучше всего на совпадениях из coll3 (полный список). Этот факт подтверждается как значениями MAP\_15 и nDCG\_15, так и значением меры  $I_k$  при всех рассматриваемых  $k$ . Однако различия с результатами на словах и основах (word и stem) не так уж и значительны. Более того, последние в отдельных случаях могут даже дать несколько лучшие результаты.

Таблица 2.5 выявляет двух победителей, одного при  $k=1, 5$ , а другого – при  $k=10, 15$ . В первом случае побеждает использование основ (stems), как по  $I_k$ , так и по MAP\_15. Во втором случае слова (words) – наилучшие как по СУВСС, так и nDCG\_15. Вместе с тем, нельзя не отметить, что все результаты использования меры BM25 хуже, чем соответствующие результаты использования косинуса. Особенно чётко это проявляется по оценкам  $I_k$ .

Таблица 2.6 показывает, что, как и ожидалось, нешкалированная, т.е. линейная, СУВСС является наилучшей по всем рассматриваемым критериям, причём наилучшие результаты достигаются на первом уровне «очистки». Под уровнем очистки понимается тот ярус АСД, начиная с которого частоты считаются шумом и не учитываются при вычислениях.

Использование логистической шкалирующей функции даёт значительно худшие результаты. В то же время извлечение квадратного корня практически не ухудшает качества получаемых ранжирований.

Таблица 2.5 – Оценка полученных при использовании различных способов предобработки текстов результатов с помощью меры релевантности BM25

Способ предобработки слов	Количество попаданий авторских тем в топ k				MAP_15	nDCG_15
	I_1	I_5	I_10	I_15		
Words	1	14	40	52	0.0631	0.0279
Stems	7	21	30	36	0.0869	0.0259
coll3	3	15	30	46	0.0524	0.0224
coll3.4	4	13	28	45	0.0532	0.0212
coll3.5	4	16	29	46	0.0577	0.0228
coll3.6	4	17	30	43	0.0547	0.0214
coll3_long	2	12	26	37	0.0446	0.0188
coll3_long.4	3	11	27	42	0.0482	0.0199
coll3_long.5	3	14	27	46	0.0540	0.0223
coll3_long.6	3	17	28	46	0.0528	0.0217

Сравнение таблиц 2.4, 2.5 и 2.6 показывает, что использование меры СУВСС, основанной на методе АСД, приводит к результатам, значительно превосходящим те, которые получаются при использовании других мер. Например, использование СУВСС порождает ранжирования, в которых на первое место попадает 35-39 авторских тем, тогда как использование косинуса и BM25 приводит максимум к 14 и 7 авторским темам на первых местах, соответственно. Значения традиционных критериев, MAP\_15 и nDCG\_15, для ранжирований по СУВСС превышают значения, достигнутые на ранжированиях по косинусной мере и BM25, в 4-5 раз.

При этом гипотеза о том, что очистка меры от коротких, двух- и трехбуквенных сегментов текста улучшит результаты, не подтвердилась. Только однобуквенные сегменты оказались неинформативны.

Таблица 2.6 – Оценка полученных результатов при использовании меры релевантности, основанной на АСД, при использовании различных видов шкалирующих функций

Вид шкалирующей функции и глубина очистки	Количество попаданий авторских тем в топ k				MAP_15	nDCG_15
	I_1	I_5	I_10	I_15		
linear.0	38	75	84	102	0.3588	0.1124
linear.1	35	77	89	105	0.3550	0.1133
linear.2	35	75	88	103	0.3486	0.1120
linear.3	34	70	90	105	0.3192	0.1020
linear.4	33	68	88	105	0.3059	0.0978
root.0	39	75	88	102	0.3657	0.1125
root.1	36	77	91	104	0.3561	0.1122
root.2	34	77	89	106	0.3497	0.1126
root.3	34	72	90	105	0.3232	0.1030
root.4	32	66	88	105	0.3064	0.0983
logit.0	7	36	48	57	0.1214	0.0450
logit.1	4	18	26	33	0.0521	0.0216
logit.2	6	29	46	56	0.0780	0.0335
logit.3	8	24	42	58	0.0850	0.0348
logit.4	8	37	54	64	0.1201	0.0482

Сравнение мер релевантности в разрезе критерия  $I_k$  при разных  $k$  можно проводить графически, используя то, что можно назвать кривыми попадания, т.е. кривые или ломаные, соединяющие значения меры при различных  $k$  от 1 до 15 на координатной плоскости ( $k$ ,  $I_k$ ). Чем выше кривая попадания, тем точнее и лучше использованная мера релевантности (рисунок 2.3).

Сравнение кривых попадания позволяет убедиться, что кривые, соответствующие семействам мер релевантности ast.linear и ast.root, побеждают косинусную меру близости и меру близости BM 25, вне зависимости от того, какие параметры использованы. Из двух традиционных мер релевантности косинусная мера оказывается более эффективной, чем мера BM25.

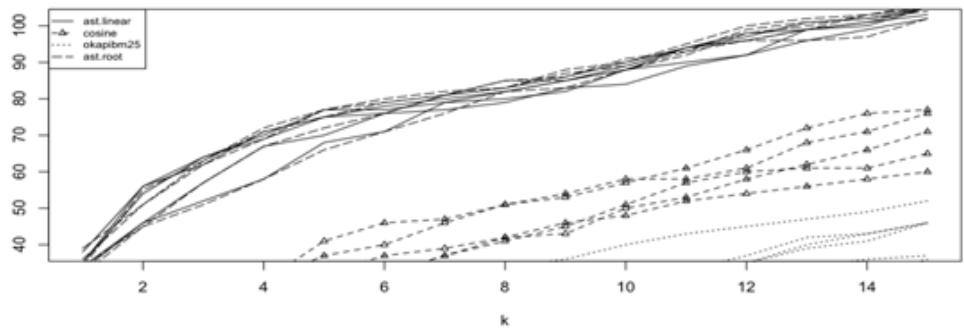


Рисунок 2.3 – Сравнение кривых попадания при использовании 4-х семейств мер релевантности: ast.linear, ast.root, cosine и okapibm25

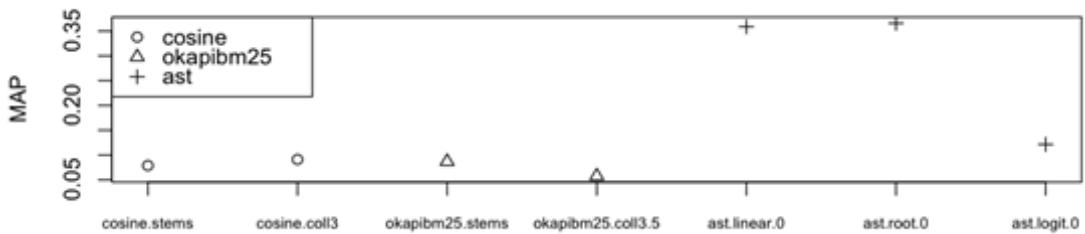


Рисунок 2.4 – Сравнение значений MAP при использовании разных мер релевантности

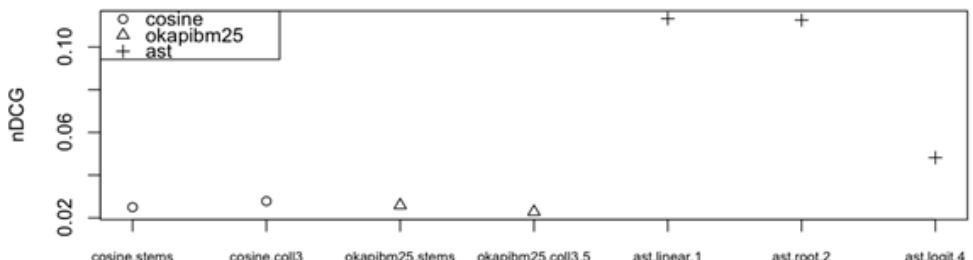


Рисунок 2.5 – Сравнение средних значений nDCG при использовании разных мер релевантности

То же видно и при сравнении лучших значений критериев MAP и nDCG (см. рисунки 2.4 и 2.5).

Обратим внимание на то, что оценки качества рубрикации по СУВБС, хотя и намного лучшие, чем по другим мерам, но всё же не очень высоки. Например, они почти вдвое ниже, чем те, которые были достигнуты в уже упомянутой выше работе [50], где, в общем и целом точность правильной рубрикации была порядка 70% текстов. Это можно объяснить двумя фактами. Во-первых, рубрикация в [50] делалась в режиме обучения с учителем,

а не самообучения; общеизвестно, что результаты первого, как правило, лучше, чем второго. Во-вторых, при рубрикации статей с учителем используются не всевозможные, а только популярные рубрики, для которых процедуры классификации работают значительно точнее, чем для непопулярных. Если же обратиться к результатам, основанным на учете всех рубрик, то они вполне сопоставимы с нашими. В этом смысле показательны результаты победителей многочисленных соревнований по классификации текстовых материалов, приведённые в [67]. Например, при рубрикации категорий известной коллекции веб-страниц DMOZ ([www.dmoz.org](http://www.dmoz.org)) участники различных соревнований (с фиксированными, и не очень большими, множествами категорий) показывали уровень успешности от 5% до 50% [67].

### 2.1.5 Некоторые выводы

В данном подразделе отчета приведены результаты исследования проблемы автоматизации рубрикации научных статей тематическими единицами таксономии соответствующей научной области. Так как данная проблема относится к области интерпретации ментальных, а не реальных объектов, то существенное значение приобретает адекватность эмпирического материала. Разметка множества публикаций тематическими единицами какой-либо иерархической классификации – непростое и не очень понятное дело. По нашему мнению, в качестве эмпирического материала лучше брать разметку, сделанную заинтересованными специалистами, чем заинтересованными дилетантами (см., например, использование DMOZ, иерархической системы вебсайтов, разработанной добровольцами, в [50]). Именно поэтому мы выбрали статьи, опубликованные в журналах, издаваемых наиболее авторитетной организацией в области информатики, ACM, и размеченные авторами согласно ACM CCS классификации, разработанной именно этой организацией. В этом плане мы в какой-то мере следовали [51], в которой тоже использовалась ACM CCS, хотя и в значительно более ранней версии 1998 г. Однако в [51] выбор публикаций и их рубрик оказался в какой-то мере случайным,

так что подавляющая часть отобранных документов была помечена только одной рубрикой или вообще не помечена: менее чем 10% выбранных текстов оказались пригодными для рубрикации. Наше множество текстов выбрано по-другому. Они все имеют иерархическую рубрикацию, приписанную самими авторами. Тем не менее, даже «при всём при том» рубрикация этой коллекции не может не вызывать вопросов, как отмечено в комментарии к Таблице 2.2.

Мы использовали оценку релевантности строка-документ как основной механизм автоматизации рубрикации документов строками из заранее заданного списка в режиме самообучения. Было проведено сравнение трёх различных подходов к измерению релевантности: (а) косинусная мера векторной модели, (б) популярная мера вероятности порождения рубрик в рамках вероятностной модели, (в) средняя условная вероятность символа в совпадающих частях рубрики и текста на основе модели аннотированного суффиксного дерева. Оказалось, что в задаче рубрикации предложенная нами мера (в) с большим отрывом превосходит две другие, более популярные меры. Эффективность аппарата АСД отмечалась и в других приложениях, таких как категоризация [57]. Проверка гипотезы о том, что короткие, одно-, двух- и трехбуквенные сегменты текста не вносят полезного вклада в качество рубрикации, её не подтвердила. Точнее, гипотеза оказалась верна только в той части, которая относится к однобуквенным сегментам. Конечно, абсолютный уровень достигнутой точности остаётся относительно низким, что характерно и для других задач анализа текстов в режиме самообучения [67, 68, 52, 54].

Однако ситуация представляется не безнадёжной. Мы собираемся в будущем исследовать два пути дальнейшего развития. Первый – учёт синонимических отношений при оценке релевантности строка-текст. Этот путь связан с необходимостью представления тематических единиц не одним словосочетанием, как сейчас, но множеством синонимичных словосочетаний, которые должны учитываться при сличении с АСД текста и, тем более, при оценке релевантности. Второй путь связан с использованием латентного се-

мантического анализа (LSA) [69] и/или аппарата латентных распределений Дирихле (ЛРД, LDA) [70, 71] для вывода новых мер релевантности, основанных на многопараметрическом погружении пар строка-текст [72]. В настоящее время эти подходы используются только для рубрикации (multi-label classification) с помощью элементов самих анализируемых текстов; следует их адаптировать к задаче рубрикации текстов с помощью внешней системы рубрикации.

Результаты исследования в рамках настоящего подраздела отчета отражены в публикациях [[73, 74, 75, 76].

**2.2 Применение ординальных методов теории коллективного выбора к построению альтернативных версий глобального рейтинга промышленной конкурентоспособности стран**

Под национальной конкурентоспособностью в широком смысле понимается способность национальной экономики, во-первых, производить товары и услуги, удовлетворяющие требованиям, возникающим вследствие международной конкуренции, а во-вторых, обеспечивать гражданам уровень жизни, который устойчив и непрерывно повышается [77]. Хотя консенсус в вопросе как определять национальную конкурентоспособность еще не достигнут, все согласны с тем, что понятие конкурентоспособности не является теоретически самодостаточным. Для того чтобы измерить конкурентоспособность необходимо определить набор факторов, чьи значения либо определяют уровень национальной конкурентоспособности, либо определяются им. Как только такой набор факторов определен, задача измерения национальной конкурентоспособности превращается в многокритериальную проблему.

### **2.2.1 Индекс конкурентоспособности промышленного производства**

Объектом данного исследования был индекс конкурентоспособности промышленного производства (Competitive Industrial Performance Index, CIP),

представленный в докладе ЮНИДО за 2012/2013 гг. [78]. Этот индекс основан на восьми переменных, объединенных в три группы, именуемые измерениями конкурентоспособности.

Измерение I. Способность производить и экспортовать промышленные товары. Она измеряется посредством двух переменных:  
MVApc – средняя добавленная стоимость в промышленности на душу населения;

MXpc – объем промышленного экспорта на душу населения.

Изменение II. Совершенствование и обновление технологий. Это измерение состоит из двух субизмерений.

Субизмерение IIa. Объем и качество индустриализации национальной экономики. Они измеряются с помощью двух переменных:  
MHVAsh – доля добавленной стоимости, созданной в секторе средне- и высокотехнологического промышленного производства, в добавленной стоимости, созданной в промышленности;  
MVAsh – доля добавленной стоимости, созданной в промышленности, в ВНП.

Субизмерение IIb. Качество промышленного экспорта. Оно измеряется двумя переменными:

MHXsh – доля продукции средне- и высокотехнологического промышленного производства в промышленном экспорте;  
MXsh – доля промышленного экспорта во всем экспорте.

Измерение III. Вклад в мировую экономику. Он измеряется с помощью двух переменных:

ImWMVA – доля добавленной стоимости, созданной в промышленности данной страны, в добавленной стоимости, созданной в промышленности всех стран;

ImWMT – доля промышленного экспорта страны в общемировом промышленном экспорте.

Две пары индикаторов ( $MVApc$ ,  $MXpc$  и  $MHXsh$ ,  $MXsh$ ) агрегируются в более крупные индикаторы посредством взятия их арифметических средних. Значение индекса СИР равно произведению шести факторов:

$$CIP = MVApc \cdot MXpc \cdot \frac{MHVash + MVAsh}{2} \cdot \frac{MNXsh + MXsh}{2} \cdot ImWMWA \cdot ImWMT.$$

В данном исследовании не ставились под сомнение ни определение конкурентоспособности, ни выбор ее наблюдаемых коррелятов. Объектом интереса был способ агрегирования. Метод агрегирования, предложенный авторами индекса СИР, является проблематичным с теоретической точки зрения. И сама формула агрегирования, и значения весов, использующиеся в ней, не являются единственно возможными. Поэтому цель работы, результаты которой отражены в данном подразделе, состояла в том, чтобы исследовать устойчивость рейтинга конкурентоспособности стран относительно изменения методологии агрегирования исходных переменных.

Был использован новый подход к построению агрегированных рейтингов, основанный на использовании ординальных методов ранжирования, впервые предложенных в теории коллективного выбора, а затем примененных в задачах многокритериального оценивания. Различными критериями, по которым оцениваются страны, в данном случае, являются значения факторов модели индекса СИР. Критериальные оценки агрегируются на основании мажоритарного правила (правила большинства). Результатом агрегирования становится бинарное отношение, называемое мажоритарным. Это отношение содержит информацию о парных сравнениях стран, то есть дает ответ на вопрос – какая из двух сравниваемых национальных экономик сильнее по большинству критериев. С помощью мажоритарного отношения можно определить те страны, которые следует считать сильнейшими с точки зрения всей совокупности показателей. Для этого можно использовать либо основанные на мажоритарном отношении правила ранжирования, такие как правило Коупланда и марковский метод, либо сортировку с помощью турнирных решений – правил оптимального выбора, основанных на обобщении

принципа выбора максимального (т.е. наилучшего) элемента отношения, например, с помощью отбора альтернатив, принадлежащих непокрытому множеству, или альтернатив, принадлежащих минимальному внешнеустойчивому множеству.

Данное исследование было построено по образцу исследований влиятельности научных журналов, проводившихся коллективом авторов [79, 80, 81] и отраженные в Отчете 2013г.

### 2.2.2 Ординальные правила коллективного выбора

Классическим решением задачи ранжирования альтернатив, оцениваемых по нескольким критериям, является вычисление взвешенных суммы или произведения значений критериев для каждой из альтернатив и их упорядочение по этой величине. Однако у этого подхода есть серьезные ограничения – необходимость теоретического обоснования возможности произведения математических операций над значениями различных переменных и выбор весов. Выходом из положения является возможность использования в много critериальных задачах ординальных методов, разработанных в теории коллективного выбора.

Основной задачей теории коллективного выбора является описание способов определения альтернатив, которые или будут выбраны, или должны быть выбраны из числа имеющихся в наличии вариантов на основании мнения о них индивидуальных участников процесса принятия коллективных решений. Применить методы теории коллективного выбора в задаче многокритериального оценивания можно, если оценку альтернатив по каждому из критериев считать мнением одного из членов группы, от каждого из которых зависит выбор коллектива.

Пусть дано множество доступных для выбора альтернатив  $A$ ,  $|A|=m$ ,  $m \geq 3$ , и группа  $G$ ,  $|G|=n$ ,  $n \geq 2$ , лиц, участвующих в процессе принятия коллективного решения, которое сводится к выбору определенных альтернатив из  $A$ .

Мнение отдельного участника  $i$ ,  $i \in G$ , об альтернативах из  $A$ , определяющее его индивидуальный выбор, моделируется бинарным отношением  $P_i$  на  $A$ ,  $P_i \subseteq A \times A$ , фиксирующим результаты попарного сравнения альтернатив. Если при сравнении пары альтернатив  $x$  и  $y$  участник  $i$  отдает предпочтение альтернативе  $x$ , то говорят, что упорядоченная пара  $(x, y)$  принадлежит отношению  $P_i$ ,  $(x, y) \in P_i$ , или, что альтернатива  $x$  доминирует над альтернативой  $y$  по отношению  $P_i$ ,  $xP_iy$ . Если выбирающий не способен решить, какая из двух альтернатив лучше, или считает их равноценными, то будем полагать, что он не предпочитает ни одну из них другой, то есть что справедливо утверждение  $(x, y) \notin P_i \& (y, x) \notin P_i$ .

Если известны предпочтения того, кто делает выбор (т.е. бинарное отношение на  $A$ ), и если задано правило выбора, определенное как функция, отображающая множество бинарных отношений на  $A$  в множество непустых подмножеств  $A$ , то можно предсказать, какие альтернативы должны стать результатом выбора. Таким образом, зная индивидуальные предпочтения, задачу коллективного выбора можно решить, если, во-первых, определить бинарное отношение  $\mu$ ,  $\mu \subseteq A \times A$ , моделирующее коллективные предпочтения (мнение коллектива об альтернативах из  $A$ ), а во-вторых, задать правило выбора  $S(\mu, A)$ :  $\{\mu\} \rightarrow 2^A \setminus \emptyset$ , называемое также решением. Обычно отношение  $\mu$  строится из отношений предпочтений индивидуальных участников с помощью мажоритарного правила и поэтому называется мажоритарным отношением:  $x$  доминирует над  $y$  по отношению  $\mu$ , если число тех членов группы, кто предпочитает альтернативу  $x$  альтернативе  $y$ , больше числа тех, кто предпочитает альтернативу  $y$  альтернативе  $x$ ,  $x\mu y \Leftrightarrow |G_1| > |G_2|$ , где  $G_1 = \{i \in G \mid xP_iy\}$ ,  $G_2 = \{i \in G \mid yP_ix\}$ .

Выбор в качестве способа агрегирования мажоритарного правила однозначно диктуется рядом естественных условий [82], справедливых и для рассматриваемой задачи. Кроме того, в многокритериальных задачах использование мажоритарного правила является способом получать агрегированные

оценки альтернатив, не прибегая к арифметическим действиям над критериями, обосновать законность которых, как было сказано выше, затруднительно или вообще невозможно.

Из определения следует, что отношение  $\mu$  асимметрично,  $(x, y) \in \mu \Rightarrow (y, x) \notin \mu$ . Если имеет место  $(x, y) \in \mu \& (y, x) \in \mu$ , то говорят, что альтернативы  $x$  и  $y$  находятся в отношении равенства голосов  $\tau$ ,  $\tau \subseteq A \times A$ ,  $(x, y) \in \tau \& (y, x) \in \tau$ . Очевидно, что отношение равенства голосов  $\tau$  – симметрично.

Для проведения компьютерных вычислений мажоритарное отношение  $\mu$  представляется с помощью мажоритарной матрицы  $M = [m_{xy}]$ , определяемой так:

$$m_{xy} = 1 \Leftrightarrow (x, y) \in \mu, \text{ или } m_{xy} = 0 \Leftrightarrow (x, y) \notin \mu.$$

Аналогично мажоритарной матрице  $M$  можно построить матрицу  $T = [t_{ij}]$ , представляющую отношение равенства голосов  $\tau$ .

Для определения правил выбора необходимы также понятия нижнего среза, верхнего среза и горизонта альтернативы  $x$ . Нижним срезом альтернативы  $x$  называется множество  $L(x)$  альтернатив, над которыми  $x$  доминирует,  $L(x) = \{y \mid x \mu y\}$ , верхним срезом – множество  $D(x)$  альтернатив, доминирующих над  $x$ ,  $D(x) = \{y \mid y \mu x\}$ , горизонтом  $x$  – множество  $H(x)$  альтернатив, находящихся с  $x$  в отношении равенства голосов,  $H(x) = \{y \mid y \tau x\}$ .

Одним из наиболее простых способов построения рейтинга альтернатив является правило Коупланда [83]. В основе этого правила лежит следующее соображение: чем больше число альтернатив, которые хуже (при парном сравнении), чем альтернатива  $x$ , тем лучше данная альтернатива в целом. Можно рассуждать и так: альтернатива  $x$  тем лучше в целом, чем меньше число альтернатив, которые лучше альтернативы  $x$ . Наконец, эти два правила можно комбинировать.

С формальной точки зрения, агрегированное ранжирование по Коупланду есть упорядочение альтернатив по числу очков  $s(x)$ , которые присуждаются одним из трех способов:

- версия 1:  $s_1(x) = |L(x)| - |D(x)|$ ;
- версия 2:  $s_2(x) = |L(x)|$ ;
- версия 3:  $s_3(x) = |A| - |D(x)|$ .

Векторы  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  очков, получаемых странами по первой, второй и третьей версиям правила Коупланда, вычисляется по формулам

$$s_2 = M \cdot a, \quad s_3 = (I - M^{\text{tr}}) \cdot a, \quad s_1 = s_2 + s_3 - m \cdot a,$$

где  $I$  и  $a$  – это матрица и вектор, все компоненты которых равны 1.

Для построения рейтинга также можно использовать известное решение задачи выбора наилучших альтернатив. Рассмотрим следующую итерационную процедуру. Решение  $S(\mu, A)$  определяет множество  $B_{(1)}$  наилучших альтернатив в  $A$ ,  $B_{(1)} = S(\mu, A)$ . По сравнению со всеми остальными альтернативами варианты из  $B_{(1)}$  – это альтернативы «первого сорта». Если повторить процедуру выбора для множества  $A \setminus B_{(1)}$ , то будет определено множество  $B_{(2)} = S(\mu, A \setminus B_{(1)}) = S(\mu, A \setminus S(\mu, A))$ , содержащее альтернативы, которые можно назвать альтернативами «второго сорта» (они хуже альтернатив из  $B_{(1)}$ , но лучше альтернатив из  $A \setminus (B_{(1)} \cup B_{(2)})$ ). Повторяя операцию удаления наилучших альтернатив, определенных на предыдущем этапе, за конечное число шагов мы разделим все множество  $A$  на группы альтернатив разных сортов,  $B_{(k)} = S(\mu, A \setminus (B_{(k-1)} \cup B_{(k-2)} \cup \dots \cup B_{(2)} \cup B_{(1)}))$ , что и будет искомым ранжированием.

В данном исследовании для построения агрегированного рейтинга с помощью вышеописанной процедуры сортировки были выбраны два решения: непокрытое множество и минимальное внешнеустойчивое множество.

Первое из этих решений основано на следующем принципе выбора: усилим условие доминирования, а затем выберем недоминируемые альтернативы. Если не усиливать условие доминирования, то выбор недоминируемой (по отношению  $\mu$ ) альтернативы в общем случае невозможен, так как таких альтернатив может не быть. Этот результат известен как «парадокс Кондорсе» (см., например, [84]).

Говорят, что альтернатива  $x$  покрывает альтернативу  $y$ , если  $x$  доминирует и над  $y$ , и над всеми альтернативами, над которыми доминирует  $y$ ,  $x \mu y$  &  $L(y) \subseteq L(x)$  [85]. Т.е. для большинства голосующих  $x$  лучше, чем  $y$ , и не существует такой альтернативы  $z$ , которая была бы хуже (для большинства), чем  $y$ ,  $y \mu z$ , и одновременно не хуже чем  $x$ ,  $z \mu x \vee z \tau x$ . Наилучшими являются альтернативы, не покрытые никакими другими альтернативами, их множество называется непокрытым множеством UC. Существуют и другие версии определения отношения покрытия и, соответственно, непокрытого множества. Их можно посмотреть, например, в [86].

Второе решение основано на принципе выбора альтернатив, принадлежащих множеству с каким-либо хорошим свойством. Множество ES обладает внешней устойчивостью (и, соответственно, называется внешнеустойчивым), если для любой альтернативы  $x$ , не принадлежащей ES, во множестве ES найдется альтернатива  $y$ , которая лучше (для большинства), чем  $x$ ,  $\forall x \notin ES \exists y: y \in ES \& y \mu x$  [87]. Внешнеустойчивое множество называется минимальным, если ни одно из его подмножеств, кроме него самого, не является внешнеустойчивым. Наилучшей считается альтернатива, принадлежащая хотя бы одному минимальному внешнеустойчивому множеству MES, поэтому решением является объединение минимальных внешнеустойчивых множеств, которое также обозначается MES [88]; см. также [86]. Минимальное внешнеустойчивое множество было введено Субочевым [88] по аналогии с другим решением – минимальным слабоустойчивым множеством (MWS), предложенным Алекскеровым и Курбановым [89]. Поэтому в [88, 90] минимальное внешнеустойчивое множество называется второй версией минимального слабоустойчивого множества и обозначается MWS<sup>II</sup>. Используемая в нашем анализе версия непокрытого множества в этих работах обозначена UC<sup>II</sup>.

Из данных определений непосредственно следует, что непокрытое множество и объединение минимальных внешнеустойчивых множеств всегда непусты и единственны. Они могут быть вычислены с помощью матриц  $M$  и

$T$ , введенных выше. Формулы, выражающие  $UC$  и  $MES$  через  $M$  и  $T$ , приведены в [86].

Определив  $UC$  (или, во втором случае,  $MES$ ) для исходного массива стран, мы приписываем изданиям, вошедшем в это множество, первое место в новом рейтинге и, как было сказано выше, удаляем эти страны из массива. После этого процедура нахождения  $UC$  (или  $MES$ ) повторяется для нового, усеченного массива стран и т.д. Поскольку при любом мажоритарном отношении  $\mu$  множества  $UC$  и  $MES$  содержат не меньше одного элемента, за конечное число повторений вышеописанной процедуры отбора и исключения массив будет полностью исчерпан, а страны разделены на конечное число рангов.

Наконец, мы хотели бы применить одну из версий метода, называемого марковским, поскольку он основан на исследовании марковского процесса случайного блуждания по ориентированному графу, представляющему бинарное отношение  $\mu$ . Первые варианты данного метода были предложены Даниелсом [91] и Ушаковым [92], ссылки на другие работы можно найти в статье Чеботарева и Шамис [93].

Рассмотрим действие этого правила на следующем примере. Предположим, что альтернативы из множества  $A$  – это игроки в настольный теннис. За теннисный стол могут встать только два человека, поэтому о силе игроков мы можем судить лишь на основании информации о парных сравнениях, то есть по результатам отдельных игр.

Наша задача – построение общего рейтинга игроков. Поскольку с помощью одной игры это сделать нельзя, мы устраиваем турнир, состоящий из множества игр.

Перед началом турнира мы разделяем игроков на группы, отделяя заведомо более слабых от заведомо более сильных, чтобы в каждой игре участвовали только игроки сопоставимые по своему мастерству. Сортировка игроков осуществляется так, как это описано выше, с помощью турнирного решения, называемого слабым максимальным циклом WTC. Это решение определяет-

ся следующим образом. Множество WTC называется слабым максимальным циклом, если, во-первых, любая альтернатива из WTC доминирует любую альтернативу, не принадлежащую WTC,  $\forall x \notin WTC, y \in WTC \Rightarrow y \succ x$ , и, во-вторых, ни одно собственное непустое подмножество WTC не обладает вышеуказанным свойством.

Относительная сила игроков, попавших в разные группы, считается определенной (отношением доминирования), поэтому необходимо определить только относительную силу игроков из одной группы, т.о. все игры проводятся только внутри групп, для чего каждой из них выдается игровой стол. Так как игровой стол у группы только один, то игры группы должны идти строго одна за другой.

Игроки, которые встанут за стол в данной игре, выбираются следующим способом: тот, кто был объявлен победителем в предыдущей игре, остается стоять за столом, а его противник по жребию выбирается из оставшихся игроков, в число которых входит также и игрок, в предыдущей игре объявленный проигравшим. Вероятность быть выбранным по жребию для всех одинакова. Если результатом предыдущей игры была ничья, то титул победителя переходит к игроку, который встал к столу, будучи выбран по жребию, то есть, несмотря на возможность ничьи, в каждой отдельной игре есть победитель и проигравший. Очевидно, что относительную силу игрока можно изменять, подсчитывая число игр, в которых он был объявлен победителем.

Для того чтобы начать турнир, одного из игроков нужно назначить победителем в фиктивной «нулевой» игре. Однако, чем больше будет идти турнир (чем больше в нем будет игр), тем меньше будет зависеть относительное число побед каждого участника от того, кого и как мы выбираем на роль «победителя в предыдущей игре» для самой первой игры. В пределе при стремлении числа игр в турнире к бесконечности относительное число побед никак не зависит от выбора победителя в нулевой игре.

Вместо предела относительного числа побед можно вычислять предел вероятности стать победителем в последней игре турнира, поскольку данные

величины равны. Эта вероятность вычисляется с помощью матриц  $M$  и  $T$ , определенных выше.

Допустим, по итогам предшествующих встреч мы знаем относительную силу игроков в каждой паре, и эта сила описывается бинарными отношениями  $\mu$  и  $\tau$ , являясь неизменной во времени величиной. Таким образом, если мы знаем, что имена игроков, которые собираются начать новую игру, –  $x$  и  $y$ , то, зная  $\mu$ , мы можем абсолютно точно предсказать результат встречи: победу  $x$  (если  $x\mu y$ ), победу  $y$  (если  $y\mu x$ ) и ничью (если  $x\tau y$ ).

Пусть  $\mathbf{p}^{(k)}$  – это вектор,  $i$ -ая компонента которого  $p_i^{(k)}$  есть вероятность  $i$ -го игрока получить титул победителя в  $k$ -ой игре. Возможны два взаимоисключающих случая. Если  $i$ -ый игрок был объявлен победителем в  $(k-1)$ -ой игре, то он станет победителем в  $k$ -ой игре, если по жребию будет выбран противник, которого  $i$ -ый игрок побеждает, то есть альтернатива из нижнего среза альтернативы  $i$ . Вероятность того, что  $i$  станет победителем в  $(k-1)$ -ой игре равна  $p_i^{(k-1)}$ , вероятность выбора альтернативы из  $L(i)$  равна  $\frac{s_2(i)}{m-1}$ , где  $s_2(i)$  – это число очков по второй версии правила Коупланда,  $s_2(x)=|L(x)|$ . Таким образом, вероятность данного исхода равна  $p_i^{(k-1)} \cdot \frac{s_2(i)}{m-1}$ .

Второй случай –  $i$ -ый игрок не был объявлен победителем в  $(k-1)$ -ой игре. Он станет победителем в  $k$ -ой игре, если  $i$  будет по жребию выбран противником победителя  $(k-1)$ -ой игры, вероятность чего равна  $\frac{1}{m-1}$ , и если победитель  $(k-1)$ -ой игры принадлежит к нижнему срезу или горизонту альтернативы  $i$ , вероятность чего равна  $\sum_{j=1}^m (m_{ij} + t_{ij}) \cdot p_j^{(k-1)}$ . Следовательно, вероятность  $p_i^{(k)}$  определяется равенством

$$p_i^{(k)} = p_i^{(k-1)} \cdot \frac{s_2(i)}{m-1} + \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{j=1}^m (m_{ij} + t_{ij}) \cdot p_j^{(k-1)}.$$

Последнюю формулу удобно записать в матрично-векторной форме

$$\mathbf{p}^{(k)} = W \cdot \mathbf{p}^{(k-1)} = \frac{1}{m-1} \cdot (M + T + S) \cdot \mathbf{p}^{(k-1)}.$$

Матрица  $S=[s_{ij}]$  определяется так:  $s_{ii} = s_2(i)$  и  $s_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

Таким образом, передача титула победителя от игрока к игроку есть марковский процесс с матрицей перехода  $W$ .

Нас интересует вектор  $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p^{(k)}$ . Нетрудно доказать, что вне зависимости от того каковы начальные условия (т.е. чему равен вектор  $p(0)$ ), искомый предел будет собственным вектором матрицы  $W$ , соответствующим собственному значению  $\lambda=1$  (см., например, [94]). Соответственно, найти  $p$  можно, решив систему линейных уравнений  $W \cdot p = p$ . Искомое внутригрупповое ранжирование есть упорядочение альтернатив по убыванию значений компонент  $p_i$ . Поскольку мы предварительно отсортировали игроков с помощью WTC, ни одна из компонент  $p_i$  не будет равна нулю [94].

### 2.2.3 Результаты ранжирования показателей модели СИР с помощью правил коллективного выбора

Новые версии глобального рейтинга стран, построенные на основании парных сравнений стран по восьми показателям модели СИР с помощью правила Коупланда, правила выбора альтернатив, принадлежащих непокрытому множеству, правила выбора альтернатив, принадлежащих минимальному внешнеустойчивому множеству, и марковского метода ранжирования даны в Таблица А.1 Приложения А. Списки стран упорядочены согласно исходному рейтингу ЮНИДО.

Номер позиции является ранговой переменной, поэтому для оценки согласованности двух различных рейтингов нужно использовать ранговые меры корреляции. В этом исследовании в качестве способов количественной оценки степени различия двух ранжирований использовались две схожие, но не идентичные величины, основанные на измерении расстояния Кендалла: коэффициент ранговой корреляции Кендалла [95,96] и доля совпадающих парных сравнений.

Рассмотрим пару альтернатив и сравним их позиции в двух рейтингах. Если в одном рейтинге позиция первой выше позиции второй, а в другом

рейтинге – ниже, то имеет место инверсия. Расстояние Кендалла между двумя ранжированиеми – это число инверсий  $N$ . (число неупорядоченных пар альтернатив, ранжированных противоположным образом), соответственно, чем больше между рейтингами инверсий, тем дальше они друг от друга.

Коэффициент ранговой корреляции Кендалла  $\tau_b$  зависит от расстояния Кендалла следующим образом:

$$\tau_b = \frac{N_+ - N_-}{\sqrt{(N-n_1) \cdot (N-n_2)}}.$$

Здесь  $N^+$  – это число пар, в которых позиция одной из альтернатив выше позиции другой альтернативы как в одном рейтинге, так и в другом,  $n_1$  – число таких пар, в которых обе альтернативы имеют одинаковый ранг в первом рейтинге, а  $n_2$ , соответственно, – это число таких пар во втором рейтинге.

Если же позиция одной из альтернатив выше позиции другой альтернативы как в одном рейтинге, так и в другом, или если номера позиций обеих альтернатив совпадают как в одном рейтинге, так и в другом, то можно сказать, что данные рейтинги совпадают в оценке данной пары. Соответственно, в качестве меры согласия рейтингов можно использовать выраженную в процентах долю (неупорядоченных) пар альтернатив, в оценке которых рейтинги совпадают друг с другом,  $r=100 \cdot \frac{N_+ + N_0}{N}$ , где  $N_0$  – число пар, в которых номера позиций обеих альтернатив совпадают как в одном рейтинге, так и в другом,  $N$  – общее число неупорядоченных пар. Результаты вычислений  $\tau_b$  и  $r$  приведены в Таблице А.2 Приложения А.

На основании значений мер согласованности ранжирований можно определить ранжирования, которые являются наилучшими представителями данной совокупности рейтингов (в данном случае восьми исходных ранжирований по значению соответствующего фактора модели). Для этого воспользуемся вышеописанной техникой парных сравнений с помощью правила большинства. Будем считать, что рейтинг  $A$  лучше представляет данную совокупность рейтингов, чем рейтинг  $B$ , если он лучше коррелирует с большинством рейтингов совокупности, которую нужно представить (т.е. агреги-

ровать). В итоге, на множестве рейтингов возникает мажоритарное отношение (свое для своей меры близости рейтингов). Само мажоритарное отношение о обоих случаях не является рейтингом (то есть слабым порядком). Однако вместо данного отношения можно использовать рейтинг, максимально «похожий» на него, то есть ближайший к мажоритарному отношению по расстоянию Кендалла. В итоге мы получаем ранжирование исходных и агрегированных рейтингов по степени их «представительности». Результаты вычислений для двух мер и представлены в Таблице 2.7. Рейтинги упорядочены от наиболее согласованного (ранг 1) до наименее согласованного (ранг 15).

Таблица 2.7 – Ранжирование ранжирований

Ранг	Упорядочены по значениям	
	$\tau_b$	$R$
1	UC	Коупланд (1)
2	Коупланд (1)	Марковский
3	Коупланд (3)	
4	Коупланд (2)	CIP, Коупланд (2), Коупланд (3)
5	CIP	
6	MES	UC
7	Марковский	
8	ImWMT	ImWMVA
9	ImWMVA	
10	MVApc	MVApc
11	MXsh	MXsh
12	MHXsh	MHXsh
13	MHVAsh	MHVAsh
14	MVAsh	MVAsh
15	MXpc	MXpc

## 2.2.4 Некоторые выводы

Индекс промышленной конкурентоспособности стран является агрегатом восьми эмпирически наблюдаемых величин. Его формула имеет полуординальный характер – она кардинальна по форме, но основана на чисто ординальном предположении: значение агрегированного индекса должно быть строго монотонной функцией каждого из факторов. Поэтому только парные сравнения данных значений имеют смысл, но не сами значения, их разности или частные. Поэтому было интересно проверить устойчивость итогового ранжирования, заменив исходную формулу чисто ординальной про-

цедурой агрегирования. Было предложено рассмотреть задачу агрегирования как многокритериальную проблему принятия решения и использовать ординальные методы ее решения, заимствованные из теории коллективного выбора.

Нами были вычислены шесть ранжирований, для построения которых использовалось мажоритарное отношение, построенное, в свою очередь, по ранжированием на основе исходных библиометрических показателей. Эти шесть ранжирований построены согласно трем версиям правила Коупланда, с помощью марковского метода, а также путем последовательного выделения непокрытого множества и минимального внешнеустойчивого множества.

Некоторые из полученных рейтингов (версии правила Коупланда, марковское ранжирование) характеризуются высокой степенью дискриминации, т.е. доля пар стран, имеющих одинаковый ранг очень мала.

Другие рейтинги (сортировка с помощью UC и MES) наоборот, представляют собой объединение стран в крупные группы, то есть «грубое» ранжирование, которое также может быть ценным. Такое более «грубое» разбиение лучше соответствует интуитивным представлениям о различии в конкурентоспособности стран. Возможность построения «грубых» рейтингов можно считать еще одним преимуществом предлагаемого подхода.

Корреляционный анализ показал, что величина корреляционных индексов для любого из построенных ранжирований при их сопоставлении с ранжированими по факторам модели превосходит значения, получающиеся при сравнении последних между собой, то есть переход от исходных рейтингов к агрегированным действительно является выигрышным. Иначе говоря, агрегированные ранжирования лучше представляют совокупность рейтингов, основанных на восьми выбранных факторах, чем любой из исходных рейтингов, и могут служить в качестве интегральных. Хотя корреляционный анализ и подтвердил, что исходная версия глобального рейтинга является устойчивой по отношению к изменению методологии агрегирования факторов, он

также показал, что есть версии рейтинга, которые представляют данную совокупность лучше, чем рейтинг ЮНИДО.

Общий вывод исследования таков. В условиях, когда есть очень много различных моделей и методов агрегирования, а степень неопределенности значений их параметров велика, для того чтобы прояснить вопрос о том, что такая национальная конкурентоспособность, и как ее измерять, необходима более глубокая теоретическая работа.

Результаты исследований данного подраздела опубликованы в [97]:  
Subochev A., Zakhlebin I. Alternative versions of the global competitive industrial performance ranking constructed by methods from social choice theory// Working paper WP7/2014/06. National Research University Higher School of Economics. Moscow: Higher School of Economics Publ. House, 2014.

## 2.3 Применение методов сравнений нечетких чисел к ранжированию вузов по гистограммам ЕГЭ и исследование устойчивости сравнения гистограмм

Во многих прикладных задачах появляется необходимость сравнения двух гистограмм. Такая задача возникает, например, при необходимости сравнения (и, в частности, ранжирования) результатов различных опытов (например, в известных работах под руководством С.Э. Шноля [98, 99] сравниваются формы гистограмм результатов измерений процессов разной природы, полученных в одно и то же местное время и в разных географических пунктах), при сравнении показателей функционирования каких-либо однородных (организационных, технических и пр.) систем [100], при принятии решений в условиях нечеткостной неопределенности [101], при моделировании нечетких предпочтений [102], при сравнении распределений доходов в рамках социально-экономического анализа [103, 104, 105], при ранжировании учащихся по результатам-гистограммам их оценок и т.д.

Сравнивать гистограммы можно по форме, по мере близости и т.д. В ряде задач необходимо сравнивать гистограммы по отношению типа «больше-меньше», т.е. надо ранжировать гистограммы. Например, речь может идти о построении отношения полного предпорядка (рефлексивного, полного и транзитивного отношения)  $\infty$ . Поскольку в этой работе в качестве базового приложения рассматривается задача ранжирования вузов по баллам ЕГЭ, то будем предполагать, что вектор аргументов (баллы ЕГЭ) гистограмм упорядочен по возрастанию их важности, т.е. если две гистограммы отличаются друг от друга только в двух «столбцах», то гистограмма, которая имеет «больший столбик» с большим номером, для нас более предпочтительна, чем гистограмма, имеющая «больший столбик» с меньшим номером (точное определение см. ниже).

В задаче ранжирования гистограмм можно выделить несколько подходов. Первый (в порядке перечисления, но не исторически) – вероятностный подход. В этом подходе сравниваются некоторые числовые характеристики случайных величин, связанных со сравниваемой парой гистограмм [106]. Кроме того, к вероятностному подходу можно отнести и принцип стохастического доминирования, который широко используется в теории риска [107, 108].

Другой подход связан с применением методов ранжирования распределений доходов в теории коллективного выбора [104]. В этом случае сравниваются гистограммы доходов вида  $U = (i, u_i)_{i=1}^{n_U} = (u_i)_{i=1}^{n_U}$ , где  $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n_U}$  с помощью функций благосостояния  $W(U)$ , удовлетворяющих определенным условиям (симметричности, монотонности, вогнутости и др.). Этот подход в случае, когда размерности векторов-гистограмм одинаковы, равносителен ранжированию упорядоченных по возрастанию векторов. В этом случае можно использовать, например, методы теории важности критериев [109], методы некомпенсаторного выбора [110] и др.

Третий подход к ранжированию гистограмм связан с применением инструментария сравнения нечетких чисел и будет подробно рассмотрен ниже.

При сравнении гистограмм необходимо учитывать, что сами гистограммы могут быть заданы с той или иной степенью неточности. Характер этих неточностей может быть различным. Например, при сравнении гистограмм как результатов опытов неточность может носить вероятностный характер. А при сравнении распределений доходов в теории коллективного выбора неточность может быть результатом намеренного искажения данных. В ходе выборных кампаний обсуждается анализ (в том числе и сравнение) гистограмм распределений избирательных участков или голосов избирателей по явке и по процентам голосования за различных кандидатов (партии). Такие гистограммы также могут быть искажены, и в том числе в результате фальсификаций или, в более общем случае, в результате манипулирования данными. Еще один часто встречающийся тип искажений – заполнение пробелов в данных.

Во всех этих и других ситуациях возникает задача определения, может ли данное искажение гистограмм изменить их сравнение определенным методом на противоположное. Или, для каких искажений результат сравнения не изменится?

В данном подразделе отчета приведены результаты исследований этих вопросов. При этом преследовались две цели:

- 1) проанализировать нечеткостные методы сравнения гистограмм с точки зрения возможности их использования в задаче ранжирования гистограмм вузов, построенных по результатам приема по баллам ЕГЭ;
- 2) проанализировать устойчивость к искажениям некоторых наиболее популярных вероятностных методов сравнения гистограмм.

Кроме того, в этом подразделе отчета отражены результаты по анализу гистограмм баллов ЕГЭ зачисленных в вузы абитуриентов. Предложена модель «идеального» зачисления абитуриентов и показано, что распределение зачисленных абитуриентов в вуз в такой модели будет унимодальным при

достаточно общих предположениях о функции предпочтения. Реальные же гистограммы зачисленных абитуриентов являются зачастую не унимодальными. В этом случае неунимодальность можно рассматривать как специальный случай искажения гистограмм. Вместе с тем, для большинства нечетко-стных методов сравнения требуется унимодальность гистограмм. Поэтому была поставлена и решена задача оптимального преобразования гистограмм, приводящей ее к унимодальному виду. Эти результаты работы также нашли своё отношение в отчете.

### 2.3.1 Постановка задачи ранжирования гистограмм

Под гистограммой в этой работе будем понимать пару двух упорядоченных наборов чисел  $U = (x_i, u_i)_{i \in I}$ ,  $(x_i)_{i \in I}$  – упорядоченный по возрастанию вектор различных аргументов гистограммы (т.е.  $x_i < x_{i+1}$ ,  $i \in I$ ),  $(u_i)_{i \in I}$  – вектор неотрицательных значений гистограммы,  $I$  – некоторое индексное множество.

Предположим, что задано множество гистограмм  $U = \{U\}$ , где  $U = (x_i^{(U)}, \tilde{u}_i)_{i \in I_U}$ ,  $x_i^{(U)} < x_{i+1}^{(U)}$ ,  $\tilde{u}_i \geq 0$  для всех  $i \in I_U$  и для всех  $U \in U$ . Необходимо задать ранжирование элементов множества  $U$ , т.е. построить отношение полного предпорядка (рефлексивного, полного и транзитивного отношения)  $R$ . Если гистограммы  $U$  и  $V$  находятся в отношении  $R$  (т.е.  $(U, V) \in R$ )), то будем обозначать это так:  $U \mu V$  и говорить, что « $U$  не меньше  $V$ ». Если же  $U \mu V$  и  $V \mu U$ , то будем называть эти гистограммы «равными» и обозначать это так:  $U \square V$ . Это отношение также должно удовлетворять условию упорядоченности аргументов гистограмм по возрастанию их важности: если  $U' = (x_i, u'_i)$ ,  $U'' = (x_i, u''_i)$  две такие гистограммы, что  $u'_i = u''_i$  для всех  $i \neq k, l$  и  $u'_l - u''_l = u''_k - u'_k \geq 0$ , то  $U'' \mu U'$  при  $k > l$  и  $U' \mu U''$  при  $k < l$ .

Без ограничения общности можно считать, что все гистограммы «выровнены по числу столбцов», т.е.  $I_U = I$  для всех  $U \in U$  и  $\{x_i^{(U)}\}_{i \in I_U} = \{x_i\}_{i \in I}$ .

Тогда  $U = (x_i, u_i)_{i \in I} = (u_i)_{i \in I}$  для всех  $U \in U$ . Действительно, для выравнивания гистограмм надо объединить все множества аргументов гистограмм:  $X^{(U)} = \{x_i^{(U)}\}_{i \in I_U}$ ,  $X = \bigcup_U X^{(U)} = \{x_i\}$  и применить какую-либо процедуру заполнения пробелов в данных. Например, можно использовать следующее правило:  $u_i = \tilde{u}_k$ , если  $x_k^{(U)} \leq x_i < x_{k+1}^{(U)}$ .

Пример 2.1. Пусть  $U = \{U_1, U_2\}$ , где  $U_1 = (x_i^{(U_1)}, \tilde{u}_i^{(1)})_{i \in I_{U_1}} = \{(1, 2), (2, 5), (4, 6), (6, 3)\}$ ,  $U_2 = (x_i^{(U_2)}, \tilde{u}_i^{(2)})_{i \in I_{U_2}} = \{(1, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 3)\}$ . Тогда  $X^{(U_1)} = \{1, 2, 4, 6\}$ ,  $X^{(U_2)} = \{1, 3, 4, 5\}$ . Следовательно,  $X = X^{(U_1)} \cup X^{(U_2)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  – объединённое множество аргументов гистограмм, а  $(u_i^{(1)})_{i \in I} = \{2, 5, 5, 6, 6, 3\}$ ,  $(u_i^{(2)})_{i \in I} = \{3, 3, 4, 5, 3, 3\}$  – новые значения гистограмм, выровненных по числу столбцов.

### 2.3.2 Нормирование данных

Многие методы ранжирования могут быть применены только к определенным образом нормированным гистограммам. И наоборот, некоторые способы нормирования определяют и класс возможных методов ранжирования. Например, если гистограммы выровнены по высоте, т.е.  $\bar{u} = \max_{i \in I} u_i = 1$  для всех  $U = (u_i)_{i \in I} \in U$  и удовлетворяют определенным условиям «выпуклости» (см. ниже), то для ранжирования возможно использование методов сравнения нечетких чисел. Если же гистограммы выровнены по площади, т.е.  $\sum_{i \in I} u_i = 1$  для всех  $U \in U$ , то возможно использование методов сравнения вероятностных распределений.

Выбранный способ нормирования должен быть интерпретируем с точки зрения ранжирования данного вида гистограмм. Например, если мы сравниваем гистограммы средних баллов ЕГЭ абитуриентов, принятых в вузы, то нормирование по площади означает, что мы сравниваем доли (относительно

общего числа абитуриентов принятых в вуз) числа студентов, имеющих определенный балл.

### 2.3.3 Вероятностные методы сравнения

Рассмотрим некоторый числовой индекс  $r(U,V)$  парного сравнения гистограмм  $U$  и  $V$  на  $\mathbb{U}^2$ , от которого потребуем только, чтобы он был согласован с условием упорядоченности аргументов гистограмм по возрастанию их важности: если  $U = (x_i, u_i)$ ,  $V = (x_i, v_i)$  две такие гистограммы, что  $u_i = v_i$  для всех  $i \neq k, l$  и  $u_l - v_l = v_k - u_k \geq 0$ , то  $r(U,V) \geq 0$  при  $k > l$  и  $r(U,V) \leq 0$  при  $k < l$ . Отсюда, в частности, следует, что  $r(U,U) = 0$ .

Если  $r(U,V)$  можно задать с помощью некоторой функции  $F(U)$  как  $r(U,V) = F(U) - F(V)$ , то введенное с помощью такого индекса  $r(U,V)$  отношение  $U \mu V \Leftrightarrow r(U,V) \geq r(V,U) \Leftrightarrow \Delta_r(U,V) = r(U,V) - r(V,U) \geq 0$  будет отношением полного предпорядка. В общем случае знак разностного индекса сравнения  $\Delta_r(U,V) = r(U,V) - r(V,U)$  может и не задавать транзитивное отношение.

Приведем примеры индексов парного сравнения гистограмм – вероятностных распределений. В этом случае считаем, что  $U = (x_i, u_i)_{i \in I}$  и  $V = (x_j, v_j)_{j \in I}$  – случайные величины, принимающие значения из множества  $\{x_i\}_{i \in I}$  с вероятностями  $\{u_i\}_{i \in I}$  и  $\{v_j\}_{j \in I}$  соответственно.

1. Сравнение по среднему значению:  $U \mu V$ , если  $E[U] \geq E[V]$ . Обобщением этого способа является:  $U \succ V$ , если  $E[f(U)] \geq E[f(V)]$ , где  $f$  – некоторая функция (функция полезности). Для того чтобы индекс сравнения принимал значения из промежутка  $[0,1]$ , нормируем его:  $E_0[U] = \frac{1}{\Delta x}(E[U] - x_{\min})$ , где  $\Delta x = x_{\max} - x_{\min}$ . Заметим, что  $E_0[U] = E[U_0]$ , где  $U_0 = (x_i^0, u_i)_{i \in I}$ ,  $x_i^0 = \frac{1}{\Delta x}(x_i - x_{\min}) \in [0,1]$  для всех  $i \in I$ . Соответствующий разностный индекс

сравнения будем обозначать через  $\Delta_E(U,V) = E_0[U] - E_0[V] = \frac{1}{\Delta x} (E[U] - E[V])$ .

2. Стохастическое доминирование:  $U \mu V$ , если  $F_U(x) \geq F_V(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , где  $F_U$  – функция распределения случайной величины  $U$ . Противоположное неравенство к сравнению объясняется необходимостью соответствия условию согласования сравнения с упорядоченностью аргументов гистограмм по возрастанию их важности. Это принцип стохастического доминирования 1-го порядка, который используется, например, в теории риска [107, 108]. Подход, основанный на применении принципа стохастического доминирования к широко используемым в микроэкономике кривым спроса, был реализован в [111] для сравнения образовательных программ по результатам ЕГЭ зачисленных студентов.

Соответствующий разностный индекс сравнения будем обозначать через  $\Delta_F(U,V) = \inf_x (F_U(x) - F_V(x))$ . Заметим, что если  $U = (x_i, u_i)_{i=1}^n$  и  $V = (x_j, v_j)_{j=1}^n$  – две случайные величины, то  $F_U(x) - F_V(x) = 0$  для всех  $x \leq x_1$  или  $x > x_n$ . Поскольку нас интересует свойство сохранения знака (точнее неотрицательности) разности  $F_U(x) - F_V(x)$ , то вместо разностного индекса сравнения  $\Delta_F(U,V) = \inf_x (F_U(x) - F_V(x))$  будем рассматривать индекс  $\inf_{x \in (x_1, x_n]} (F_U(x) - F_V(x))$ , который также будем обозначать через  $\Delta_F(U,V)$ . Заметим, что индекс  $\Delta_F(U,V)$  определен не на всем множестве  $\mathbb{U}^2$ .

3. Стохастическое предшествование:  $U \mu V$ , если  $P\{U \geq V\} \geq P\{U \leq V\}$ . Это так называемый принцип стохастического предшествования (stochastic precedence, распределение  $V$  предшествует распределению  $U$ ). Некоторые свойства стохастического предшествования можно найти в [112, 113]. Такой способ сравнения рассматривался, например, в [114]. Если считать, что случайные величины  $U = (u_i)_{i \in I}$  и  $V = (v_j)_{j \in J}$  независимы, то

$$P\{U \geq V\} = \sum_{(i,j): x_i \geq x_j} u_i v_j. \quad (2.1)$$

Соответствующий разностный индекс сравнения будем обозначать через  $\Delta_P(U, V) = P\{U \geq V\} - P\{U \leq V\}$ .

Пример 2.2. Пусть  $U = \{U, V\}$ ,  $U = (u_i)_{i=1}^5$ ,  $V = (v_i)_{i=1}^5$ , где  $u_1 = u_5 = 0.1$ ,  $u_2 = u_4 = 0.2$ ,  $u_3 = 0.4$ ,  $v_1 = v_5 = 0.15$ ,  $v_2 = v_3 = 0.25$ ,  $v_4 = 0.2$  (см. рисунок 2.6). Тогда  $P\{U \geq V\} = 0.605$ , а  $P\{U \leq V\} = 0.595$ . Следовательно,  $U \mu V$ .

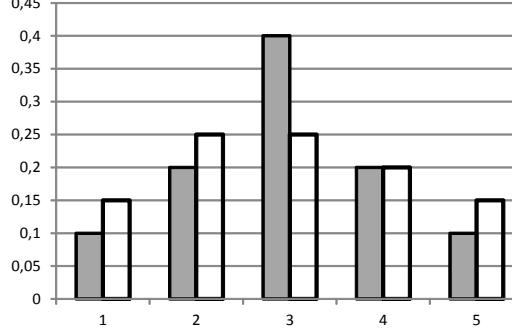


Рисунок 2.6 – Вероятностное сравнение двух гистограмм

Заметим, что неравенство  $\Delta_P(U, V) \geq 0$  не задает транзитивное отношение. Однако, как показывает численное моделирование, вероятность появления нетранзитивной тройки гистограмм при равномерной их генерации очень мала.

### 2.3.4 Ранжирование нечетких чисел

В этом случае все гистограммы должны быть выровнены по высоте, т.е.  $\bar{u} = \max_{i \in I} u_i = 1$  для всех  $U = (u_i)_{i \in I} \in U$ . Теперь каждой гистограмме  $U \in U$  можно поставить в соответствие нечеткое множество [115] с функцией принадлежности  $U = (u_i)_{i \in I}$ , определенной на универсальном множестве  $X = (x_i)_{i \in I}$ . Величина  $u_i$  может интерпретироваться как степень доверия к тому, что студент с оценкой  $x_i$  учится в вузе  $U$ . В теории нечетких множеств в большей степени развит математический аппарат сравнения так называемых нечетких чисел [116], которые являются обобщением обычных

(неразмытых) действительных чисел. В нашем случае гистограмма-нечеткое множество  $U = (u_i)_{i \in I}$  будет нечетким числом, если все так называемые  $\alpha$ -срезы  $U_\alpha = \{x_i : u_i \geq \alpha\}$  являются непустыми и выпуклыми множествами для любого  $\alpha \in (0,1]$ . Заметим, что некоторые методы ранжирования нечетких множеств (например, центроидный метод, см. ниже) нечувствительны к этому требованию, другие (в основном – те, где используются  $\alpha$ -срезы) – чувствительны. Это требование будет заведомо выполняться, если гистограммы являются унимодальными. В случае ранжирования гистограмм приема в вузы по результатам ЕГЭ, такие гистограммы будут близки к унимодальным при условии, что рассматривается прием только на одну специальность, один тип приема (например, по конкурсу) и выборка является достаточно большой. Абсолютной унимодальности гистограмм можно добиться путем применения определенных процедур сглаживания. Простейшей из них является метод группировки соседних разрядов. При этом, конечно, часть (иногда и значительная часть) информации о распределении баллов ЕГЭ абитуриентов вуза теряется. Кроме того, в методе группировки соседних разрядов результат будет существенно зависеть от порядка группировки разрядов. Более щадящими с точки зрения потери количества информации о гистограмме являются процедуры приведения к унимодальному виду с помощью минимальных преобразований. В данной работе при необходимости приведения к унимодальному виду использовались только простейшие процедуры группировки разрядов. Дальше будем считать, что  $U$  – это множество нечетких чисел. На рисунке 2.7 приведен пример выравнивания гистограммы распределения результатов ЕГЭ студентов, поступивших в 2012 году на специальность «Экономика» по конкурсному набору в Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва). Выравнивание осуществлено путем группировки двух соседних разрядов (отмечены фигурной скобкой). В результате этой процедуры два разновысотных столбца (отмечены пунктиром) были заменены двумя столбцами одинаковой «средней» высоты.

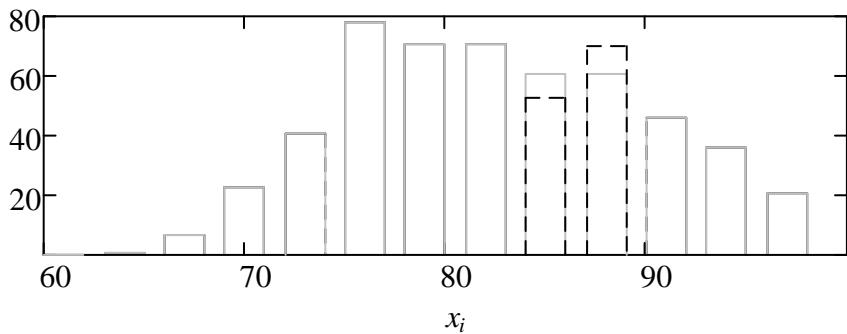


Рисунок 2.7 – Выравнивание гистограммы распределения результатов ЕГЭ студентов, поступивших в 2012 году на специальность «Экономика» по конкурсному набору в Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва)

Существует много способов ранжирования нечетких чисел, но все их условно можно разделить на три группы.

Первую группу составляют методы сравнения с помощью построения функции (индекса) ранжирования. В этом случае определяется некоторая функция  $F : U \rightarrow \square$ , которую также называют операцией дефазификации, и считают, что  $U \mu V$  ( $U \sqsubseteq V$ ), если  $F(U) \geq F(V)$  ( $F(U) = F(V)$ ).

Во вторую группу включают методы, основанные на вычислении меры близости между нечетким числом  $U$  и некоторым эталонным нечетким числом  $U_0$ . В качестве эталонного числа  $U_0$  чаще всего рассматриваются:

- максимизация нечетких чисел из  $U$  (т.е. число  $\bar{U} = \max\{U : U \in U\}$ );
- минимизация нечетких чисел из  $U$  (т.е. число  $\underline{U} = \min\{U : U \in U\}$ );
- некоторое «среднее» между максимальным и минимальным нечеткими числами.

Третью группу составляют методы, основанные на вычислении индексов парного сравнения всех нечетких чисел из  $U$  и последующего нахождения наилучшего элемента на графике парных сравнений.

Рассмотрим более подробно некоторые методы сравнений нечетких чисел в рамках указанных подходов.

#### 2.3.4.1 Построение функции (индекса) ранжирования

В качестве индексов ранжирования чаще всего рассматриваются либо некоторые функции границ отрезков  $\alpha$ -срезов  $U_\alpha = [u_1(\alpha), u_2(\alpha)]$  нечеткого числа  $U$ , либо некоторые средние значения нечетких чисел. Примерами индексов ранжирования являются следующие функции.

1. Индекс Адамо [117]  $F_\alpha(A) = u_2(\alpha)$  для некоторого фиксированного  $\alpha \in (0,1]$ . Другими словами, сравниваются только правые концы  $\alpha$ -срезов для определенного значения  $\alpha$ . Уровень  $\alpha$  при этом является мерой риска неправильного решения: чем больше  $\alpha$ , тем меньше риск неправильного решения.

2. Индекс Ягера [118]  $F(U) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_1(\alpha) + u_2(\alpha)) d\alpha$ , который представляет собой среднеинтегральное значение середин интервалов  $\alpha$ -срезов. С другой стороны, в ряде задач ранжирования более информативными для установления отношения «больше» между нечеткими числами являются правые концы  $\alpha$ -срезов, чем левые. Например, при ранжировании гистограмм поступления в вузы по результатам ЕГЭ правые концы  $\alpha$ -срезов информируют о максимальных баллах поступивших на этом  $\alpha$ -срезе. Поэтому в некоторых индексах ранжирования используется весовой коэффициент, регулирующий приоритет использования в индексе левых и правых концов  $\alpha$ -срезов.

3. Обобщенный индекс Ягера:  $F_\lambda(U) = \int_0^1 ((1-\lambda)u_1(\alpha) + \lambda u_2(\alpha)) d\alpha$ . Этот индекс совпадает с индексом Ягера при  $\lambda = 0.5$ . Большему значению  $\lambda$  соответствует меньший риск неправильного решения при сравнении двух нечетких чисел.

И в индексе Ягера, и в обобщенном индексе Ягера все  $\alpha$ -срезы интегрируются с одинаковыми весами. Если же мы хотим учесть с большим приоритетом баллы больших групп поступивших, то это можно сделать с помощью

неубывающей неотрицательной весовой функции  $r(\alpha)$ , удовлетворяющей условию нормировки  $\int_0^1 r(\alpha) d\alpha = 1$ . Тогда

$$F_{r,\lambda}(U) = \int_0^1 r(\alpha)((1-\lambda)u_1(\alpha) + \lambda u_2(\alpha)) d\alpha.$$

4. Центроидный индекс ранжирования. В качестве индекса ранжирования нечеткого числа  $U$  рассматривается алгебраическое (с учетом знака) расстояние между геометрическим центром фигуры  $\{(x, y) : 0 < y < \mu_U(x)\}$  и осью  $Oy$ :  $F_c(U) = \sum_i x_i u_i / \sum_i u_i$ .

#### 2.3.4.2 Методы, основанные на использовании меры близости

В этом случае по множеству нечетких чисел  $U$  вычисляется некоторое нечеткое число  $U_0$  (которое условно назовем эталонным). Далее вычисляется некоторая мера близости между найденным эталонным нечетким числом  $U_0$  и каждым числом из  $U$ . Исходя из значений этой меры близости между  $U_0$  и множествами из  $U$  принимается решение о ранжировании элементов множества  $U$ . В качестве эталонного множества  $U_0$  чаще всего рассматриваются число, равное максимизации нечетких чисел из  $U$ , т.е.  $\bar{U} = \max\{U : U \in U\}$ , или минимизация нечетких чисел из  $U$ , т.е.  $\underline{U} = \min\{U : U \in U\}$  или некоторое «среднее» число. В качестве меры близости, как правило, рассматривают некоторое расстояние  $d(U, U_0)$  от нечеткого числа  $U$  до эталонного нечеткого числа  $U_0$ , например, манхэттенское расстояние:  $d_1(U, V) = \sum_i |u_i - v_i|$ .

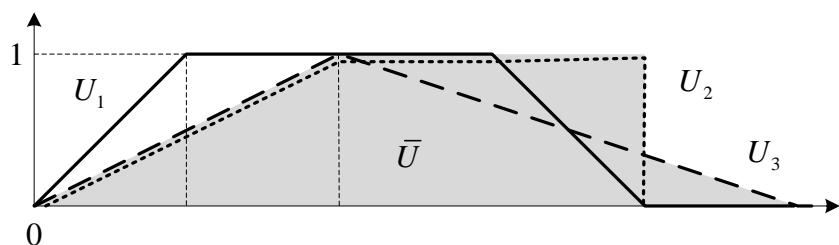


Рисунок 2.8 – Максимизация трех нечетких чисел

Широко известный индекс Керри [119] вычисляется, как  $F(U) = d_1(U, \bar{U})$ , и нечеткое число  $\bar{U} = \max\{U : U \in U\}$  вычисляется с помощью принципа обобщения Заде [116]. На рисунке 2.8 приведены графики функций принадлежности трех нечетких чисел  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  и их максимизации  $\bar{U} = \max\{U_1, U_2, U_3\}$ .

Заметим, что понятия максимального нечеткого числа и функции максимума от нечетких чисел (максимизации чисел) существенно (в отличие от неразмытой арифметики) различны. Чтобы найти максимальное нечеткое число из данного множества чисел, нужно произвести их ранжирование. Функция же максимума от нечетких чисел вычисляется и без ранжирования, но, в отличие от неразмытой арифметики, может не совпадать ни с одним из чисел данного множества. Нетрудно видеть, что максимум нечетких чисел является нечетким числом, у которого левая граница равна правой огибающей всех левых границ, а правая граница равна правой огибающей всех правых границ. На рисунке 2.9 приведена гистограмма-нечеткое число  $\bar{U}$ , равное нечеткому максимуму всех гистограмм-нечетких чисел распределения результатов ЕГЭ студентов, поступивших в 2012 году в вузы РФ на специальность «Экономика» по конкурсному набору. Бледным цветом показана гистограмма распределения  $U$  результатов ЕГЭ вуза из середины списка ранжирования. Видно, что носители этих гистограмм имеют небольшое пересечение.

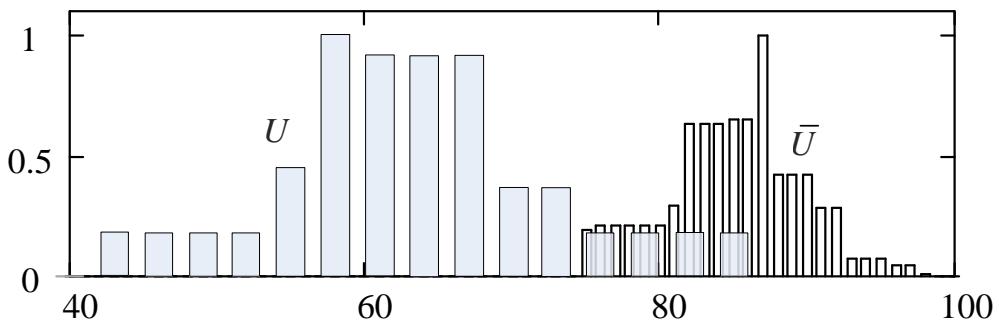


Рисунок 2.9 –  $\bar{U}$  – гистограмма-нечеткое число, равное нечеткому максимуму всех гистограмм-нечетких чисел распределения результатов ЕГЭ студентов, поступивших в 2012 году в вузы РФ на специальность «Экономика» по конкурсному набору;  $U$  – гистограмма

## распределения результатов ЕГЭ вуза из середины списка ранжирования

При использовании индекса Керри полагают, что  $U \mu V$ , если  $F(U) \leq F(V)$  и  $U \sqsubset V$ , если  $F(U) = F(V)$ .

Метод Керри и аналогичные методы, основанные на измерении расстояния до эталонного нечеткого числа, хорошо зарекомендовали себя при сравнении небольшого числа нечетких чисел. Если же необходимо ранжировать много нечетких чисел, то применение метода Керри и аналогичных ему оказывается менее эффективным. Действительно, если в качестве эталонного нечеткого числа рассматривается максимальное нечеткое число  $\bar{U} = \max\{U : U \in U\}$ , причем количество чисел в  $U$  довольно велико, то число  $\bar{U}$  может иметь «маленький» носитель  $\text{supp}\bar{U} = \{i : u_i > 0\}$ , который будет иметь непустое пересечение с носителями только тех нечетких чисел-гистограмм, которые «близки» к гистограмме максимального числа. В этом случае расстояние от гистограммы  $U$ , носитель которой не пересекается с носителем числа  $\bar{U}$  ( $\text{supp}\bar{U} \cap \text{supp}U = \emptyset$ ), не будет характеризовать «близость»  $U$  к  $\bar{U}$ . Другими словами, метод Керри при большом числе гистограмм будет эффективно ранжировать только «близкие» к  $\bar{U}$  гистограммы.

### 2.3.4.3 Методы, основанные на вычислении индекса парного сравнения нечетких чисел

В этой группе методов вводится некоторый индекс  $r(U, V)$  парного сравнения нечетких чисел  $U$  и  $V$ . В результате вычисления этого индекса для всех пар нечетких чисел из множества  $U$  мы получим матрицу  $R = (r_{ij})$ , где  $r_{ij} = r(U_i, U_j)$ ,  $U_i, U_j \in U$ . Матрицу  $R = (r_{ij})$  можно рассматривать как матрицу смежности взвешенного графа или как матрицу нечеткого отношения на  $U$  (если  $r_{ij} \in [0, 1]$ ). Далее рассматривается некоторая процедура поис-

ка наилучших элементов на этом графе. Затем найденные элементы исключаются из графа, процедура повторяется и т.д.

В качестве индекса парного сравнения нечетких чисел в литературе рассматривается, например, так называемый индекс ранжирования Бааса-Квакернаака [120]:

$$r(U, V) = \sup_{x_i \geq x_j} \min \{u_i, v_j\}. \quad (2.2)$$

Этот индекс представляет собой «нечеткий» аналог формулы (2.1) вычисления вероятности  $P\{U \geq V\}$ , если  $U$  и  $V$  – независимые случайные величины, в которой операции умножения и сложения заменяются на « $\min$ » и « $\max$ » ( $\sup$ ) соответственно.

Индекс Бааса-Квакернаака обладает следующими свойствами:

а) если  $\text{Ker}U \cap \text{Ker}V \neq \emptyset$ , то  $r(U, V) = r(V, U) = 1$ , где  $\text{Ker}U = \{x_i : u_i = 1\}$  – так называемое ядро нечеткого числа;

б) если найдутся два таких числа  $u' \in \text{Ker}U$  и  $v' \in \text{Ker}V$ , что  $u' > v'$ , то

$$r(U, V) = 1 \text{ и } r(V, U) = hgt(U \cap V), \text{ где } hgt(U) = \sup_i u_i \text{ – высота нечеткого}$$

множества.

Из этих свойств следует, что индекс Бааса – Квакернаака  $r(U, V)$  принимает максимальное значение, равное единице только в том случае, когда промежуток наиболее достоверных значений множества  $U$  расположен на числовой оси правее промежутка наиболее достоверных значений множества  $V$  (при этом считаем, что первый промежуток  $U_1$  расположен «правее» второго  $U_2$ , если найдутся таких два числа  $u_1 \in U_1$  и  $u_2 \in U_2$ , что  $u_1 > u_2$ ). Кроме того, используя свойства а) и б) можно вычислить индекс Бааса-Квакернаака, не прибегая к вычислению его по определению (2.2), как решению оптимизационной задачи.

Другой способ попарного сравнения был предложен в [106], а именно, каждой паре гистограмм-нечетких чисел  $U$  и  $V$  ставилось в соответствие

нечеткое множество  $S_{U,V}$ , определенное на универсальном множестве  $[0,1]$  с функцией принадлежности  $\mu_{S_{U,V}}(\alpha) = P\{U_\alpha > V_\alpha\}$ , равной вероятности события  $U_\alpha > V_\alpha$  при условии, что две случайные величины независимо и равномерно распределены на  $\alpha$ -срезах (четких отрезках)  $U_\alpha$  и  $V_\alpha$ . Тогда в качестве индекса (строгого) парного сравнения гистограмм-нечетких чисел  $U$  и  $V$  рассматривалась величина  $\bar{P}(U > V) = F(S_{U,V})$ , где  $F$  – некоторая операция дефазификации (см. пункт 5.1).

В [121] в случае вероятностных нечетких чисел  $U$  и  $V$  с функциями принадлежности  $\mu_U(x) = P_U[x, +\infty)$ ,  $\mu_V(x) = P_V[x, +\infty)$ , где  $P_U$ ,  $P_V$  – вероятностные меры, рассматривался следующий индекс включения  $\psi_\beta$ :

$$\psi_\beta\{U \subseteq V\} = P_U\{(V)_\beta | (U)_\beta\}, \quad (U)_\beta = \{x : F_U(x) < \beta\}, \quad F_U – \text{функция распределения случайной величины } U.$$

Тогда  $U \mu V$ , если  $\psi_\beta\{U \subseteq V\} \geq \psi_\beta\{V \subseteq U\}$ . Если  $F_U(x) > F_V(x)$  для всех  $x \in \square$ , то  $\psi_\beta\{U \subseteq V\} = 1$  для любого  $\beta \in [0,1]$  и  $U \mu V$ . Таким образом, с помощью индекса включения обобщается понятие стохастического доминирования.

В [122] дана интерпретация индекса Бааса-Квакернаака (2.2) в терминах теории возможностей [123]. А именно, с каждым нечетким числом  $U$  с функцией принадлежности  $U = (u_i)_{i \in I}$  можно связать так называемую меру возможности

$$\Pi_U(A) = \sup_{x_i \in A} u_i, \quad A \subseteq X, \quad (2.3)$$

которая характеризует возможность того, что истинная альтернатива принадлежит множеству  $A$ , если известно, что эта альтернатива находится в нечетком множестве  $U$ . Мера возможности удовлетворяет условиям:  
 а)  $\Pi_U(\emptyset) = 0$ ,  $\Pi_U(X) = 1$ ; б)  $\Pi_U(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\}$ ,  $A, B \subseteq X$ . Меру возможности можно определить и на множестве всех нечетких подмножеств данного универсального множества  $X$  по формуле

$$\Pi_U(V) = \sup_i \min\{u_i, v_i\}, V = (v_i)_{i \in I}, \quad (2.4)$$

которая является обобщением формулы (2.3). По аналогии с неразмытым промежутком  $[x, +\infty)$ ,  $x \in \square$ , для нечеткого числа  $V = (v_i)_{i \in I}$  вводится нечеткий промежуток  $[V, +\infty)$  с функцией принадлежности

$$\mu_{[V, +\infty)}(r) = \sup_{r \geq x_i} v_i = \Pi_V((-\infty, r]). \quad (2.5)$$

Тогда индекс Бааса-Квакернаака (2.2) с учетом (2.4) и (2.5) можно переписать так:

$$r(U, V) = \sup_{x_i \geq x_j} \min\{u_i, v_j\} = \sup_{x_i} \min\left\{u_i, \sup_{x_i \geq x_j} v_j\right\} =$$

$$\sup_{x_i} \min\left\{u_i, \mu_{[V, +\infty)}(x_i)\right\} = \Pi_U([V, +)).$$

Таким образом, величину  $r(U, V) = \Pi_U([V, +))$  можно интерпретировать как меру возможности того, что истинная альтернатива принадлежит нечеткому промежутку  $[V, +\infty)$ , если известно, что эта альтернатива находится в нечетком множестве  $U$ .

В то же время индекс Бааса-Квакернаака  $r(U, V) = \Pi_U([V, +))$  не различает, какое нечеткое число «больше», если  $\text{Ker}U \cap \text{Ker}V \neq \emptyset$ . Хотя может оказаться, что в этом случае одно число расположено правее другого (см. рисунок 2.10, где для наглядности показаны функции принадлежности двух «непрерывных» нечетких чисел), т.е.  $u_i \geq v_i$  для всех  $i \in I$ .

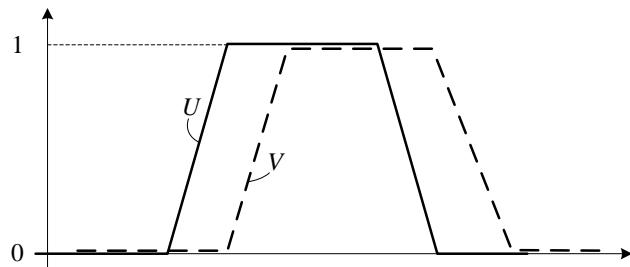


Рисунок 2.10 – Пример двух нечетких чисел, для которых  $r(U, V) = \Pi_U([V, +)) = 1$

Поэтому в [122] предложено вместе с индексом  $\Pi_U([V,+])$  рассматривать и такие связанные с ним величины, как

$$\Pi_U([V,+]) = \sup_{x_i} \inf_{x_j: x_j \geq x_i} \min \{u_i, 1 - v_j\}, \quad N_U([V,+]) = \inf_{x_i} \sup_{x_j: x_j \leq x_i} \max \{1 - u_i, v_j\},$$

$$N_U([V,+]) = 1 - \sup_{x_i \leq x_j} \min \{u_i, v_j\},$$

где  $N_U(A) = 1 - \Pi_U(\neg A)$ ,  $A \subseteq X$  – двойственная к мере возможности  $\Pi_U$ , так называемая мера необходимости. Четверка значений  $\Pi_U([V,+])$ ,  $\Pi_U([V,+])$ ,  $N_U([V,+])$ ,  $N_U([V,+])$  будет точнее характеризовать расположение нечетких чисел  $U$  и  $V$  относительно друг друга. Так, например, для чисел, изображенных на рисунке 2.10  $\Pi_U([V,+]) = N_U([V,+]) = 1$ ,  $\Pi_U([V,+]) = N_U([V,+]) = 0$ .

Ранжирование нечетких чисел-гистограмм из  $U$  на основе значений индексов парных сравнений  $r(U,V)$  можно получить с помощью некоторых правил коллективного выбора [124]. В этом случае граф парных сравнений с матрицей смежности  $R = (r_{ij})$ , где  $r_{ij} = r(U_i, U_j)$ ,  $U_i, U_j \in U$ , можно считать взвешенным мажоритарным графом в задаче коллективного принятия решения и использовать правила выбора на таком графе. Примерами таких правил являются правила, использующие мажоритарное отношение и правила, использующие вспомогательную числовую шкалу.

В первом случае, например, может быть использовано так называемое правило выбора минимального недоминируемого множества [124] относительно отношения  $\gamma$ :  $U \gamma W \Leftrightarrow r(U,W) < r(W,U)$ . Множество  $H$  называется недоминируемым относительно  $\gamma$ , если  $H = \{U : r(U,W) \geq r(W,U) \forall W \in U\}$ . Недоминируемое множество называется минимальным, если оно не содержит никакое собственное недоминируемое подмножество. Тогда процедура ранжирования нечетких чисел-гистограмм с помощью выбора минимальных недоминируемых множеств будет следующей. Пусть  $H_1$  – минимальное недоминируемое множество на  $U$ . Если  $U_1 = U \Gamma H_1 \neq \emptyset$ , то на  $U_1$  найдем ми-

нимимальное недоминируемое множество  $H_2$  и т.д., пока на очередном  $k$ -м шаге не окажется, что  $U_k = \emptyset$ . В результате мы получим  $k$  множеств  $H_1, \dots, H_k$ . Тогда считаем, что  $U \mu V$ , если  $U \in H_m$ ,  $V \in H_n$  и  $m < n$ . Если же  $U, V \in H_m$  для некоторого  $m$ , то  $U \sqsupseteq V$ . Заметим, что такая процедура применима для любого индекса парного сравнения  $r$ , который определяет ациклическое нечеткое отношение на  $U$ .

Примерами правил выбора, использующих вспомогательную числовую шкалу, являются следующие процедуры.

1. Пусть  $\rho_1(U) = \sum_W r(U, W)$ . Тогда  $U \mu V$ , если  $\rho_1(U) \geq \rho_1(V)$ . Заметим, что если вместо взвешенного мажоритарного графа с матрицей смежности  $R = (r_{ij})$  использовать ориентированный граф с матрицей смежности

$$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij}), \quad \tilde{r}_{ij} = \begin{cases} 1, & r_{ij} \geq r_{ji}, \\ 0, & r_{ij} < r_{ji} \end{cases}, \text{ то } \rho_1(U) = |\{V : \tilde{r}(U, V) \geq \tilde{r}(V, U)\}| \text{ и указанная про-}$$

цедура ранжирования фактически совпадает со вторым правилом Коуплена-да [124].

2. Пусть  $\rho_2(U) = \sum_W r(U, W) - \sum_W r(W, U)$ . Тогда  $U \mu V$ , если  $\rho_2(U) \geq \rho_2(V)$ . Это правило обобщает так называемое первое правило Коуплена-да [124].

3. Пусть  $\rho_3(U) = \sum_W r(W, U)$ . Тогда  $U \mu V$ , если  $\rho_3(U) \leq \rho_3(V)$  (обобщение третьего правила Коуплена-да).

### 2.3.5 Ранжирование вузов по результатам ЕГЭ абитуриентов, поступивших на специальность «Экономика», методами сравнения нечетких чисел

Базой исследования были результаты ЕГЭ абитуриентов, поступивших в 2012 году на специальность «Экономика» в один из вузов РФ и только по конкурсному набору. При этом рассматривались только те вузы, в которых число поступивших на данную специальность по конкурсу было не меньше

20 человек. Таким образом, в базу исследований попали данные 298 вузов РФ. Предварительно в этой базе были выполнены следующие процедуры: 1) построены для каждого вуза унимодальные гистограммы (путем группировки соседних разрядов гистограммы); 2) гистограммы выровнены по числу аргументов (столбцов); 3) гистограммы выровнены по высоте:  $\bar{u} = \max_{i \in I} u_i = 1$  для всех  $U = (u_i)_{i \in I} \in \mathbf{U}$ .

Результаты ранжирования первых 10 вузов, отобранных по убыванию среднего балла ( $M$ ), с помощью обобщенного индекса Ягера ( $Y_\lambda$ ) с  $\lambda = 0.25$ , 0.5 и 0.75, центроидным методом ( $Cen$ ) и методом Керри ( $Ker$ ) приведены в Таблице 2.8. В каждом столбце соответствующего метода указан порядок вуза в новом ранжировании.

Таблица 2.8 – Итоговая таблица результатов ранжирования

Вузы	$M$	$Y_{0.25}$	$Y_{0.5}$	$Y_{0.75}$	$Cen$	$Ker$
1) ВШЭ-М	1	2	2	4	2	4
2) МГИМО	2	1	1	1	1	1
3) ПермГНИУ	3	11	11	10	16	11
4) ФУ	4	18	16	16	13	18
5) ВШЭ-СП	5	8	7	7	9	6
6) СПГПУ	6	3	3	3	3	2
7) МГУ	7	4	4	2	6	3
8) ЮУ НИУ	8	10	12	14	10	9
9) РЭА	9	24	21	17	23	25
10) СПбГУ	10	12	9	5	11	10

Примечание 2.1. Использованы следующие аббревиатуры вузов:  
 1) ВШЭ-М – Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва; 2) МГИМО – Московский государственный институт международных отношений; 3) ПермГНИУ – Пермский государственный национальный исследовательский университет; 4) ФУ – Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва; 5) ВШЭ-СП – Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Санкт-Петербург; 6) СПГПУ – Санкт-Петербургский государственный политехнический университет; 7) МГУ – Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; 8) ЮУ НИУ – Национальный исследовательский

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; 9) РЭА – Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова, г. Москва; 10) СПбГУ – Санкт-Петербургский государственный университет.

Стандартный способ сравнения двух ранжирований осуществляется с помощью вычисления ранговых корреляций – коэффициента корреляции Спирмена, коэффициента Кендалла [125]. Коэффициент корреляции Спирмена между двумя ранжированиями вычисляется по формуле

$$r_s = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n d_i^2,$$

где  $d_i$  – разность между рангами двух ранжирований  $i$ -го вуза. Коэффициент корреляции Спирмена принимает значения из отрезка  $[-1,1]$  и характеризует степень линейной зависимости между двумя ранжированиями. Результаты вычисления коэффициента корреляции Спирмена приведены в Таблице 2.9.

Таблица 2.9 – Коэффициента корреляции Спирмена

$r_s$	$M$	$Y_{0.25}$	$Y_{0.5}$	$Y_{0.75}$	$Cen$	$Ker$
$M$	1	0.773	0.745	0.551	0.763	0.785
$Y_{0.25}$	0.773	1	0.988	0.944	0.975	0.994
$Y_{0.5}$	0.745	0.988	1	0.971	0.973	0.986
$Y_{0.75}$	0.551	0.944	0.971	1	0.922	0.953
$Cen$	0.763	0.975	0.973	0.922	1	0.97
$Ker$	0.785	0.994	0.986	0.953	0.97	1

Из Таблицы 2.9 видно, что наиболее близким к ранжированию по среднему значению являются ранжирования по методу Керри и по методу Ягера с небольшим весом  $\lambda$ . Кроме того, нечеткостные методы ранжирования гистограмм вузов дают очень близкие между собой результаты ранжирования относительно коэффициента корреляции Спирмена.

Другим стандартным способом сравнения двух ранжирований является коэффициент Кендалла. Коэффициент корреляции Кендалла вычисляется по формуле:

$$r_K = 1 - \frac{4}{n(n-1)} R,$$

где  $R$  – количество инверсий одного ранжирования, расположенных в порядке возрастания другого ранжирования. Коэффициент корреляции Кендалла также принимает значения из отрезка  $[-1,1]$  и характеризует степень линейной зависимости между двумя ранжированиеми. Но, если в коэффициенте Спирмена используется евклидова метрика между векторами-рангами, то коэффициент Кендалла основан на вычислении минимального преобразования, преобразующего одно ранжирование в другое. Результаты вычисления коэффициента корреляции Кендалла приведены в Таблице 2.10.

Таблица 2.10 – Коэффициент корреляции Кендалла

$r_K$	$M$	$Y_{0.25}$	$Y_{0.5}$	$Y_{0.75}$	$Cen$	$Ker$
$M$	1	0.378	0.378	0.2	0.333	0.289
$Y_{0.25}$	0.378	1	0.867	0.689	0.911	0.867
$Y_{0.5}$	0.378	0.867	1	0.822	0.867	0.867
$Y_{0.75}$	0.2	0.689	0.822	1	0.689	0.822
$Cen$	0.333	0.911	0.867	0.689	1	0.867
$Ker$	0.289	0.867	0.867	0.822	0.867	1

Из Таблицы 2.10 видно, что ранжирование по среднему значению слабо коррелирует с ранжированиеми нечеткостными методами относительно коэффициента Кендалла, но довольно сильно связаны между собой.

### 2.3.6 Унимодальность гистограмм

В случае ранжирования гистограмм приема в вузы по результатам ЕГЭ можно ожидать, что такие гистограммы будут близки к унимодальным при условии, что рассматривается прием только на одну специальность, один тип приема (например, по конкурсу) и выборка является достаточно большой. Ниже будет строго показано, что при достаточно общих условиях гистограммы распределений приема в вузы по результатам ЕГЭ будут унимодальными.

Пусть  $X = \{x\}$  – множество баллов ЕГЭ абитуриентов, которые собираются подать документы в один из вузов  $U_1, \dots, U_k$  на определенную специальность (например, «Экономика») и по одному типу набора (например, по конкурсу). Обозначим через  $f(x)$ ,  $x \in X$ , число абитуриентов с баллом  $x$ . В общем случае функция  $f(x)$  предполагается интегрируемой по Лебегу на пространстве с мерой  $(X, F, \mu)$  и  $\int_X f(x)\mu(dx) = \mu(X)$ . Но, в частности,  $X$  можно считать конечным и  $\sum_{x \in X} f(x) = |X|$ . Если функцию  $f(x)$  нормировать:  $\tilde{f}(x) = f(x)/\mu(X)$ , то получим функцию плотности распределения вероятностей того, что случайно выбранный студент имеет балл, равный  $x \in X$ .

Рассмотрим следующую модель зачисления: каждый абитуриент с баллом ЕГЭ  $x \in X$  может подать документы в один из вузов  $U_1, \dots, U_k$  и может быть зачислен в вуз  $U_j$  при условии, что  $x \geq N_j$ , где  $N_j$  – проходной балл поступления в университет  $U_j$ . Без ограничения общности можно считать, что  $N_1 < \dots < N_k$ . Проходные баллы могут быть известны абитуриенту точно, а могут и приближенно (например, это могут быть прошлогодние проходные баллы, которые в этом году могут и измениться). Предположим, что  $p_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, k$  – функции предпочтения абитуриентом с баллом  $x \in X$  вуза  $U_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $\max_x p_j(x) = p_j(N_j + \alpha_j)$ ;
- 2)  $p_j(x)$  невозрастают при  $x > N_j + \alpha_j$  для всех  $j = 1, \dots, k-1$  и  $p_k(x) = \text{const}$  при  $x > N_k + \alpha_k$ ; неубывают при  $x < N_j + \alpha_j$  для всех  $j = 1, \dots, k$ ;
- 3)  $\sum_{j=1}^k p_j(x) = 1$  для всех  $x > N_1$ .

Условие 1) означает, что максимальное предпочтение вузу  $U_j$  будет у абитуриента, набравшего  $N_j + \alpha_j$  баллов. Величина  $0 \leq \alpha_j < N_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, k-1$  характеризует оцениваемую абитуриентом меру риска, что проходной балл

будет преодолен, если он известен приближенно. Условие 2) означает, что наибольшее предпочтение абитуриент будет отдавать тому вузу, у которого проходной балл не превосходит балла абитуриента и является ближайшим из таких проходных баллов. Условие 3) означает, что абитуриент собирается подать документы хотя бы в один из вузов  $U_1, \dots, U_k$ .

Если известны функции  $p_j(x)$  предпочтения абитуриентом с баллом  $x \in X$  вуза  $U_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , то гистограмма распределения абитуриентов, желающих поступить в вуз  $U_j$ , будет равна  $f_j(x) = f(x)p_j(x)$ . Заметим, что из условия 3) следует, что  $\sum_{j=1}^k f_j(x) = f(x)\sum_{j=1}^k p_j(x) = f(x)$  для всех  $x > N_1$ . Возникает вопрос об унимодальности гистограммы  $f_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть  $f(x)$  – плотность нормального распределения с математическим ожиданием  $x_0$  и дисперсией  $\sigma^2$ , а функция предпочтения абитуриентов  $p_j(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , удовлетворяет условиям 1)-3), является дважды непрерывно дифференцируемой на  $\mathbb{R}$  и удовлетворяют условию:

$$p_j(x) + (x - x_0)p'_j(x) > \sigma^2 p''_j(x), \quad x \in \Delta(x_0, N_j + \alpha_j), \quad (2.6)$$

где  $\Delta(a, b)$  – интервал с концами в точках  $a$  и  $b$ . Тогда  $f_j(x)$  – унимодальная функция.

Условие (2.6) означает, что функция  $p_j(x)$  не должна меняться (возрастать или убывать) слишком быстро по сравнению с изменением плотности нормального распределения.

Если всё же гистограмма неунимодальна, то можно найти «блзкую» к исходной унимодальной гистограмме, применив определенную процедуру сглаживания. Простейшей из них является метод группировки соседних разрядов. При этом, конечно, часть (иногда и значительная часть) информации о распределении баллов ЕГЭ абитуриентов вуза теряется. Более щадящими с точки зрения потери количества информации о гистограмме являются проце-

дурь приведения к унимодальному виду с помощью минимальных преобразований.

Неформальная постановка задачи приведения гистограммы к унимодальному виду будет следующей. Данна гистограмма  $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ ,  $a_i \geq 0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Требуется найти такую гистограмму  $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ ,  $b_i \geq 0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , которая была бы «близка» к гистограмме  $A$  и была бы унимодальной, т.е. существовало бы такое целое  $k \in \{1, \dots, n\}$  что  $b_1 \leq \dots \leq b_k$ ,  $b_k \geq b_{k+1} \geq \dots \geq b_n$  (такую гистограмму будем называть унимодальной относительно  $k$ -го разряда). В качестве меры близости предлагается использовать минимальное изменение гистограммы  $A$ , в результате которого получается унимодальная гистограмма  $B$ .

Формальная постановка. Пусть  $h_{ij} \geq 0$  – величина, равная уменьшению гистограммы  $A$  в  $i$ -м разряде и увеличения ее  $j$ -м разряде. Значение  $h_{ij}$  можно интерпретировать как величину, на которое нужно уменьшить число абитуриентов в вузе с баллом  $i$  и увеличить число абитуриентов с баллом  $j$ .

Тогда  $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$  – матрица преобразований гистограммы. На эту матрицу должны быть введены следующие ограничения:

- 1)  $h_{ij} \geq 0$  для всех  $i, j = 1, \dots, n$ ;
- 2)  $\sum_{j=1}^n h_{ij} \leq a_i$  для всех  $i = 1, \dots, n$  (т.е. нельзя уменьшить количество абитуриентов на величину большую, чем их есть с баллом  $i$ ).

Кроме того, новая гистограмма  $B = \{b_i\}_{i=1}^n$  должна быть унимодальной. При осуществлении преобразований  $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$  новая гистограмма будет равна:  $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ , где  $b_j = a_j + \sum_{i=1}^n (h_{ij} - h_{ji})$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Унимодальность распределения  $B = \{b_i\}_{i=1}^n$  относительно  $k$ -го разряда означает, что

$$3) \begin{cases} b_j \leq b_{j+1} \text{ if } j \leq k-1, \\ b_j \geq b_{j+1} \text{ if } j \geq k \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (h_{ij} - h_{i,j+1} + h_{j+1,i} - h_{j,i}) \leq (a_{j+1} - a_j) \operatorname{sgn}(k-j) \text{ для всех } j = 1, \dots, n.$$

Пусть  $\mathbf{H}_k$  – множество всех матриц преобразований, удовлетворяющих условиям 1), 2) и 3) В качестве критерия оптимизации преобразования гистограммы  $A$  в гистограмму  $B$ , унимодальную относительно  $k$ -го разряда, будем использовать минимизацию общей стоимости преобразований

$$F(H) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} d_{ij}, \quad (2.7)$$

где  $d_{ij}$  – некоторая функция стоимости уменьшения числа студентов с баллом  $i$  и увеличения числа студентов с баллом  $j$ . Например, в качестве  $d_{ij}$

можно взять  $d_{ij} = \begin{cases} i - j, & \text{если } i > j, \\ \infty, & \text{если } i \leq j, \end{cases}$  т.е. в этом случае запрещен «перевод»

абитуриентов с низким баллом в разряд с высоким баллом. Теперь имеем следующую постановку задачи оптимального преобразования гистограммы к унимодальному виду. Пусть

$$H_k = \arg \min \{F(H) : H \in \mathbf{H}_k\} \quad (2.8)$$

– оптимальный план преобразований, приводящей к унимодальной гистограмме относительно  $k$ -го разряда. Тогда

$$H^{opt} = (h_{ij}^{opt})_{i,j=1}^n = \arg \min \{H_k : k = 1, \dots, n\} \quad (2.9)$$

– оптимальный план преобразований, приводящей к унимодальной гистограмме.

Задача (2.8) является задачей линейного программирования минимизации линейного функционала (2.7) при выполнении линейных ограничений-неравенств 1)-3). А задачу (2.9) можно решить прямым перебором. Величина  $F(H_k)$ , где  $H_k$  удовлетворяет (2.8), характеризует количество информации, потерянной при оптимальном преобразовании гистограммы.

Если  $H^{opt} = (h_{ij}^{opt})_{i,j=1}^n$  – оптимальный план преобразований, приводящей гистограмму  $A$  к унимодальной, то величину  $m(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}^{opt}$  можно считать мерой неунимодальности гистограммы  $A$ . Для базы вузов, описанных в пункте 2.3.5 этот индекс меняется от 0 до 0.6.

На сколько сильно может отличаться ранжирование в случае применения различных способов приведения гистограмм к унимодальному виду, продемонстрировано в Таблице 2.11, в которой приведены результаты ранжирования по методу Ягера с  $\lambda = 0.5$  вузов первой десятки (по среднему значению), гистограммы которых были приведены к унимодальному виду: а) методом группировки соседних разрядов (ранжирование  $R_1$ ); б) методом минимальных преобразований (ранжирование  $R_2$ ). В последнем столбце Таблицы 2.11 указаны значения меры неунимодальности  $m(A)$ .

Таблица 2.11 – Результаты ранжирования по методу Ягера гистограмм вузов, приведенных к унимодальному виду методом группировки соседних разрядов (ранжирование  $R_1$ ) и методом минимальных преобразований (ранжирование  $R_2$ )

	$R_1$	$R_2$	$m(A)$
1) ВШЭ-М	2	2	0.0163
2) МГИМО	1	1	0.0081
3) ПермГНИУ	11	4	0.0566
4) ФУ	16	12	0.0178
5) ВШЭ-СП	7	8	0.0172
6) СПГПУ	3	3	0.0263
7) МГУ	4	5	0.0162
8) ЮУ НИУ	12	15	0.0606
9) РЭА	21	19	0.127
10) СПбГУ	9	9	0.099

Коэффициент корреляции Спирмена двух приведенных ранжирований оказался равен  $r_s = 0.903$ . Нетрудно видеть, что чем больше мера неунимодальности, тем (в среднем) и больше расхождение между двумя ранжированиями. Из Таблицы 2.11 также видно, что вузы из первой десятки рейтинга имеют небольшое значение меры неунимодальности гистограмм распределения баллов.

### 2.3.7 Искажения гистограмм

Предположим, что вместо сравниваемых гистограмм  $U = (x_i, u_i)_{i \in I}$  и  $V = (x_j, v_j)_{j \in I}$  мы имеем две «близкие» к ним гистограммы  $\tilde{U} = (\tilde{x}_i, \tilde{u}_i)_{i \in I}$  и  $\tilde{V} = (\tilde{x}_j, \tilde{v}_j)_{j \in I}$ . Причины искажения гистограмм могут быть различными. Это может быть умышленное манипулирование данными, из которых формируются гистограммы. Это может быть результат действия случайных факторов. Это может быть результат применения процедур обработки гистограмм (сглаживания, приведения к унимодальному виду и пр.). Поэтому и само описание неопределенности гистограммы может быть разным. Например, эта неопределенность может иметь интервальный характер, может быть стохастическим процессом, может иметь нечеткостный характер и т.д.

Ниже рассмотрим интервальное искажение (зашумление) гистограмм. Пусть  $U = (x_i, u_i)_{i \in I}$  – «идеальная» гистограмма, а  $\tilde{U} = (\tilde{x}_i, \tilde{u}_i)_{i \in I}$  – ее интервальное зашумление:  $\tilde{u}_i = u_i + h_i$ ,  $i \in I$ , где  $\sum_{i \in I} h_i = 0$  и  $|h_i| \leq \alpha u_i$ ,  $i \in I$  где  $\alpha \in [0, 1]$ . Величина  $\alpha$  характеризует порог зашумления в том смысле, что изменение  $i$ -го столбика гистограммы не может больше  $100 \cdot \alpha\%$ . Будем называть такое зашумление  $\alpha$ -зашумлением. Обозначим через  $N_\alpha(U)$  класс всех  $\alpha$ -зашумлений гистограммы  $U = (x_i, u_i)_{i \in I}$ , т.е.

$$N_\alpha(U) = \left\{ H = (h_i)_{i \in I} : \sum_{i \in I} h_i = 0, |h_i| \leq \alpha u_i, i \in I \right\}. \quad (2.10)$$

Предположим, что  $\Delta_r(U, V) \geq 0$ . Основной вопрос, который исследуется ниже: в каком случае  $\Delta_r(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0$  для любых  $H \in N_\alpha(U)$  и  $G \in N_\beta(V)$ , т.е. сравнение зашумленных гистограмм не изменится после  $\alpha$ -зашумления гистограммы  $U = (x_i, u_i)_{i \in I}$  и  $\beta$ -зашумления гистограммы  $V = (x_j, v_j)_{j \in I}$ ?

Получим необходимые и достаточные условия сохранения сравнения в случае описанного интервального зашумления для разных типов сравнений.

### 2.3.7.1 Условия сохранения сравнения гистограмм

1. Условия сохранения сравнения гистограмм относительно индекса  $\Delta_E$ .

Для гистограммы  $U = (x_i, u_i)_{i \in I}$  рассмотрим величину

$$E_U = \sup \left\{ \sum_{i \in I} x_i^0 h_i : (h_i)_{i \in I} \in N_1(U) \right\},$$

где  $N_1(U)$  – множество вида (2.10) с  $\alpha = 1$ . Отметим следующие свойства величины  $E_U$ .

Лемма 2.1. Справедлива оценка  $0 \leq E_U \leq \min \{E_0[U], 0.5\}$ , причем неравенства являются точными.

Лемма 2.2. Для гистограммы  $U = (x_i, u_i)_{i=1}^n$  верно равенство

$$E_U = \sum_{s=s_0}^n x_s^0 u_s a_s - \sum_{s=1}^{s_0-1} x_s^0 u_s b_s,$$

где  $1 \geq a_n \geq \dots \geq a_{s_0} \geq 0$ ,  $1 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{s_0-1} \geq 0$ ,  $\sum_{s=s_0}^n u_s a_s = \sum_{s=1}^{s_0-1} u_s b_s$ , а индекс  $s_0$  удовлетворяет неравенству  $s_0 - 1 < m_U \leq s_0$ ,  $m_U$  – медиана распределения  $U$ .

Утверждение 2.1. Пусть  $\tilde{U} = (x_i, u_i + h_i)_{i \in I}$ ,  $\tilde{V} = (x_j, v_j + g_j)_{j \in I}$  –  $\alpha$ - и  $\beta$ -зашумления гистограмм  $U = (x_i, u_i)_{i=1}^n$  и  $V = (x_j, v_j)_{j=1}^n$  соответственно. Тогда  $\Delta_E(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0$  для любых  $(h_i)_{i \in I} \in N_\alpha(U)$  и  $(g_i)_{i \in I} \in N_\beta(V)$ ,  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  в том и только том случае, если

$$\Delta_E(U, V) \geq \alpha E_U + \beta E_V.$$

Пусть  $\bar{E}_U = \min \{E_0[U], 0.5\}$ . Тогда из леммы 2.1 вытекает справедливость следствия.

Следствие 2.1. Если

$$\Delta_E(U, V) \geq \alpha \bar{E}_U + \beta \bar{E}_V,$$

то  $\Delta_E(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0$  для любых  $(h_i)_{i \in I} \in N_\alpha(U)$  и  $(g_i)_{i \in I} \in N_\beta(V)$ .

## 2. Условия сохранения сравнения гистограмм относительно индекса $\Delta_F$

Аналогичные условия сохранения знака можно получить и для разностного индекса сравнения  $\Delta_F(U, V)$ . Введем в рассмотрение функцию

$$F_U(x) = \sup \left\{ \sum_{i: x_i < x} h_i : (h_i)_{i \in I} \in N_1(U) \right\},$$

где  $N_1(U)$  – множество вида (2.10) с  $\alpha = 1$ .

Лемма 2.3.  $F_U(x) = \min \{F_U(x), 1 - F_U(x)\}$  для всех  $x \in \square$ .

Утверждение 2.2. Пусть  $\tilde{U} = (x_i, u_i + h_i)_{i \in I}$ ,  $\tilde{V} = (x_j, v_j + g_j)_{j \in I}$  –  $\alpha$ - и  $\beta$ -зашумления гистограмм  $U = (x_i, u_i)_{i \in I}$  и  $V = (x_j, v_j)_{j \in I}$  соответственно. Тогда  $\Delta_F(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0$  для любых  $(h_i)_{i \in I} \in N_\alpha(U)$  и  $(g_j)_{j \in I} \in N_\beta(V)$ ,  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  в том и только том случае, если

$$F_U(x) - F_V(x) \geq \alpha F_U(x) + \beta F_V(x) \text{ для всех } x \in \square.$$

Следствие 2.2. Неравенство  $\Delta_F(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0$  верно для любых  $(h_i)_{i \in I} \in N_\alpha(U)$  и  $(g_j)_{j \in I} \in N_\beta(V)$  в том и только том случае, если

$$0 \leq \sup_x \frac{\alpha F_U(x) + \beta F_V(x)}{F_U(x) - F_V(x)} \leq 1$$

(считаем, что дробь равна нулю, если ее числитель и знаменатель равны нулю).

Следствие 2.3. Если

$$\Delta_F(U, V) \geq \sup_x \{\alpha F_U(x) + \beta F_V(x)\},$$

то  $\Delta_F(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0$  для любых  $(h_i)_{i \in I} \in N_\alpha(U)$  и  $(g_j)_{j \in I} \in N_\beta(V)$ .

## 3. Условия сохранения сравнения гистограмм относительно индекса $\Delta_P$

Для разностного индекса сравнения  $\Delta_P(U, V)$  справедливы следующие условия сохранения знака.

Утверждение 2.3. Пусть  $\tilde{U} = (x_i, u_i + h_i)_{i \in I}$ ,  $\tilde{V} = (x_j, v_j + g_j)_{j \in I}$  –  $\alpha$ - и  $\beta$ -зашумления гистограмм  $U = (x_i, u_i)_{i \in I}$  и  $V = (x_j, v_j)_{j \in I}$  соответственно. Тогда  $\Delta_P(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0$  для любых  $(h_i)_{i \in I} \in N_\alpha(U)$  и  $(g_j)_{j \in I} \in N_\beta(V)$ ,  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  в том и только том случае, если

$$\Delta_P(U, V) \geq \Delta\eta_{\alpha, \beta}(U, V),$$

где

$$\Delta\eta_{\alpha, \beta}(U, V) = \sup_{\substack{(h_i)_{i \in I} \in N_\alpha(U), \\ (g_j)_{j \in I} \in N_\beta(V)}} \sum_{(i, j): x_i < x_j} (u_i g_j + h_i v_j + h_i g_j - u_j g_i - h_j v_i - h_j g_i).$$

Следствие 2.4. Если

$$\Delta_P(U, V) \geq \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} (1 + P\{V = U\}), \quad (2.11)$$

то  $\Delta_P(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0$  для любых  $H = (h_i)_{i \in I} \in N_\alpha(U)$  и  $G = (g_j)_{j \in I} \in N_\beta(V)$ .

Следствие 2.5. Если

$$\Delta_P(U, V) \geq \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta}{1 + \alpha + \beta + \alpha\beta}, \quad (2.12)$$

то  $\Delta_P(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0$  для любых  $H = (h_i)_{i \in I} \in N_\alpha(U)$  и  $G = (g_j)_{j \in I} \in N_\beta(V)$ .

Примечание 2.2. Нетрудно показать, что  $\frac{\alpha + \beta + \alpha\beta}{1 + \alpha + \beta + \alpha\beta} \cdot \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} < 1$  для всех  $\alpha, \beta \in (0, 1]$ . Поэтому правая часть в (2.11) не меньше, чем правая часть в (2.12). Следовательно, условие (2.12) задает более слабые ограничения на зашумления гистограмм, при которых сохраняется их сравнение относительно разностного индекса  $\Delta_P(U, V)$ .

### 2.3.7.2 Сравнение множеств допустимых зашумлений

Рассмотрим множество всех тех  $\alpha$ - и  $\beta$ -зашумлений гистограмм  $U$  и  $V$  соответственно, при которых сохраняется сравнение гистограмм относительно определенного индекса  $\Delta_r(U,V)$  при условии, что он равен  $c > 0$ :

$$\Omega_r^c(U,V) = \{(\alpha, \beta) : \Delta_r(U, V) = c, \Delta_r(\tilde{U}, \tilde{V}) \geq 0 \forall H \in N_\alpha(U), G \in N_\beta(V)\}.$$

Такое множество назовем множеством допустимых зашумлений гистограмм  $U$  и  $V$  для данного сравнения  $\Delta_r(U,V)=c$ . Нетрудно видеть, что множество  $\Omega_r^c(U,V)$  является звездным [126] с центром в начале координат, т.е. если  $(\alpha_0, \beta_0) \in \Omega_r^c(U,V)$ , то и  $(t\alpha_0, t\beta_0) \in \Omega_r^c(U,V)$  для всех  $t \in [0,1]$ . Известно [126], что звездному множеству с центром в начале координат можно взаимно однозначно сопоставить такую лучевую функции  $\Phi_r^c(\alpha, \beta)$  (т.е. непрерывную, неотрицательную и однородную:  $\Phi_r^c(t\alpha, t\beta) = t\Phi_r^c(\alpha, \beta)$  для всех  $t \geq 0$ ), что

$$\Omega_r^c(U,V) = \{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \Phi_r^c(\alpha, \beta) \leq 1\}.$$

Функции  $\Phi_E^c(\alpha, \beta)$ ,  $\Phi_F^c(\alpha, \beta)$  и  $\Phi_P^c(\alpha, \beta)$  множеств допустимых зашумлений для индексов  $\Delta_E(U,V)$ ,  $\Delta_F(U,V)$  и  $\Delta_P(U,V)$  соответственно, как следует из утверждений 2.1 – 2.3, будут равны

$$\Phi_E^c(\alpha, \beta) = \frac{1}{c}(\alpha E_U + \beta E_V), \quad \Phi_F^c(\alpha, \beta) = \sup_x \left\{ \frac{\alpha F_U(x) + \beta F_V(x)}{F_U(x) - F_V(x)} \right\},$$

$$\Phi_P^c(\alpha, \beta) = \frac{1}{c} \Delta \eta_{\alpha, \beta}(U, V).$$

Вообще говоря, функция  $\Phi_F^c(\alpha, \beta)$  в случае дискретных распределений является кусочно-линейной. Однако можно выделить широкий класс пар распределений, для которых эта функция будет линейной. Опишем этот класс.

Пусть  $U$  и  $V$  две случайные величины с функциями распределений  $F_U$  и  $F_V$  соответственно, а  $m_U$  и  $m_V$  – медианы соответствующих распределений. Заметим, что если  $F_U(x) \geq F_V(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , то  $m_U \leq m_V$ . Обозначим

$$\text{через } \varphi_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha F_U(x) + \beta F_V(x)}{F_U(x) - F_V(x)}.$$

Лемма 2.4. Пусть  $F_U(x) \geq F_V(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$  и функции распределения  $F_U$  и  $F_V$  удовлетворяют условиям:

- а)  $F_V(x) \leq 2F_U(x)F_V(m_U)$  для всех  $x \leq m_U$ ;
- б)  $1 - F_U(x) \leq 2(1 - F_V(x))(1 - F_U(m_V))$  для всех  $x \geq m_V$ ;
- в) на промежутке  $(m_U, m_V)$  выполняется либо неравенство а), либо б).

Тогда  $\Phi_F^c(\alpha, \beta) = \max\{\varphi_{\alpha,\beta}(m_U), \varphi_{\alpha,\beta}(m_V)\}$ . Причем

$$\Phi_F^c(\alpha, \beta) = \begin{cases} \varphi_{\alpha,\beta}(m_U) \text{ при } F_U(m_V)F_V(m_U) \geq \frac{1}{4}, \\ \varphi_{\alpha,\beta}(m_V) \text{ при } (1 - F_U(m_V))(1 - F_V(m_U)) \geq \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Если же

$$\begin{cases} F_U(m_V)F_V(m_U) < \frac{1}{4}, \\ (1 - F_U(m_V))(1 - F_V(m_U)) < \frac{1}{4}, \end{cases} \quad (2.14)$$

то

$$\Phi_F^c(\alpha, \beta) = \begin{cases} \varphi_{\alpha,\beta}(m_U) \text{ при } \alpha < \beta \frac{\frac{1}{4} - F_U(m_V)F_V(m_U)}{\frac{1}{4} - (1 - F_U(m_V))(1 - F_V(m_U))}, \\ \varphi_{\alpha,\beta}(m_V) \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что если  $F_U(m_V)F_V(m_U) \geq \frac{1}{4}$ , то  $(1 - F_U(m_V))(1 - F_V(m_U)) \leq \frac{1}{4}$ .

Поэтому другие случаи знаков, кроме описанных в лемме неравенствами (2.13) и (2.14) исключены.

Условие (2.14) выполняется, если значения  $F_U(m_V)$  и  $F_V(m_U)$  расположены приблизительно симметрично относительно  $\frac{1}{2}$ . В этом случае функция

$\Phi_F^c(\alpha, \beta)$  будет составлена из двух линейных функций. Если же значения  $F_U(m_V)$  и  $F_V(m_U)$  расположены «сильно несимметрично» относительно  $\frac{1}{2}$ , то функция  $\Phi_F^c(\alpha, \beta)$  будет линейной.

Для численного измерения степени устойчивости сравнения к искажениям введем следующее понятие. Назовем сравнение  $r(U, V)$  для пары гистограмм  $U$  и  $V$  с  $r(U, V) = c > 0$   $\delta$ -устойчивым к  $\alpha$ - и  $\beta$ -искажениям соответственно, если

$$\delta = \max \left\{ k(\alpha, \beta) : \Phi_r^c(\alpha, \beta) \leq 1 \right\},$$

где  $k(\alpha, \beta)$  – некоторая критериальная функция, в качестве которой могут выступать, например:

$$k_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad k_2(\alpha, \beta) = \min\{\alpha, \beta\}.$$

Другими словами,  $\delta$ -устойчивость характеризует максимальный уровень зашумлений гистограмм, при котором знак сравнения этих гистограмм не изменится. Через  $\delta_r^{(i)}(U, V)$  будем обозначать значение  $\delta$ -устойчивости сравнения гистограмм  $r(U, V)$  относительно критериальной функции  $k_i$ . В частности, нетрудно видеть, что

$$\delta_E^{(1)}(U, V) = \frac{c}{2 \min\{E_U, E_V\}}, \quad \delta_E^{(2)}(U, V) = \frac{c}{E_U + E_V}.$$

Пример 2.3. Рассмотрим сравнение двух гистограмм результатов ЕГЭ абитуриентов, поступивших в 2012 году на специальность «Экономика» и только по конкурсному набору в Московский государственный институт международных отношений (МГИМО, гистограмма  $U$ ) и Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ, гистограмма  $V$ ). На рисунке 2.11 приведены гистограммы этих вузов.

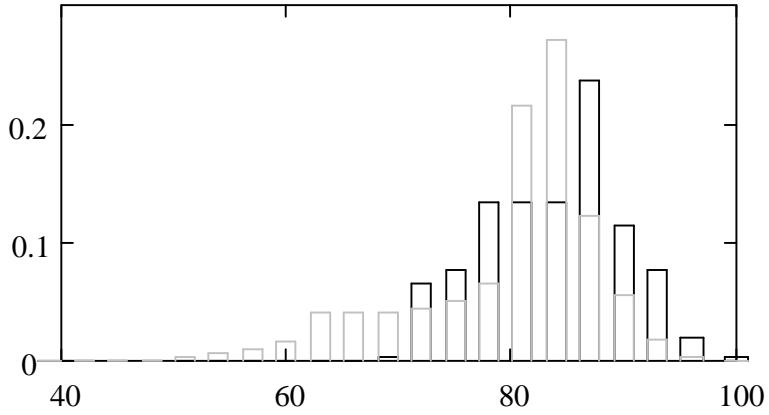


Рисунок 2.11 – Гистограмма результатов ЕГЭ абитуриентов, поступивших в 2012 году на специальность «Экономика» в МГИМО (темный цвет) и МГУ (светлый цвет)

Для этих гистограмм нормированные математические ожидания равны  $E_0[U]=0.732$  и  $E_0[V]=0.669$ , разностный индекс сравнения относительно математических ожиданий равен  $\Delta_E(U,V)=E_0[U]-E_0[V]=0.063$ , разностный индекс сравнения относительно функций распределения равен  $\Delta_F(V,U)=\inf_{x \in (x_1, x_n]} (F_V(x)-F_U(x))=0.0031$ , вероятности  $P\{U \geq V\}=0.684$ ,  $P\{U \leq V\}=0.434$ , разностный индекс сравнения относительно вероятностей равен  $\Delta_P(U,V)=P\{U \geq V\}-P\{U \leq V\}=0.25$ . Графики функций  $\Phi_E^c(\alpha, \beta)=1 \Leftrightarrow \alpha E_U + \beta E_V = c$  для  $c=\Delta_E(U,V)=0.063$ ,  $\Phi_F^c(\alpha, \beta)=1 \Leftrightarrow \sup_x \left\{ \frac{\alpha F_U(x) + \beta F_V(x)}{F_U(x) - F_V(x)} \right\} = c$  для  $c=\Delta_F(V,U)=0.0031$  и  $\Phi_P^c(\alpha, \beta)=1 \Leftrightarrow \Delta \eta_{\alpha, \beta}(U, V) = c$  для  $c=\Delta_P(U,V)=0.25$  приведены на рисунке 2.12.

Заметим, что  $F_U(m_V)F_V(m_U)=0.415 \cdot 0.801=0.332 \geq \frac{1}{4}$ . Поэтому функция  $\Phi_F^c(\alpha, \beta)=1$  является линейной и  $\Phi_F^c(\alpha, \beta)=\varphi_{\alpha, \beta}(m_U)$ .

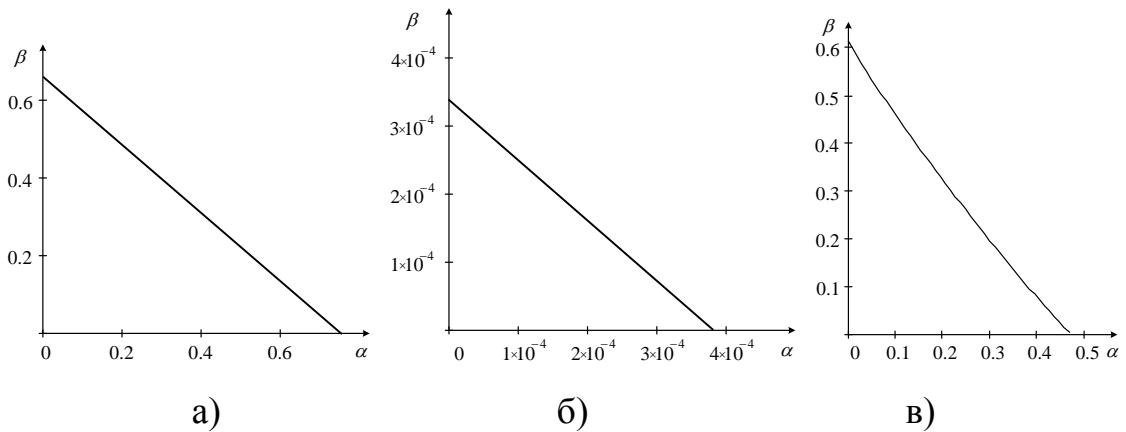


Рисунок 2.12 – Графики функций: а)  $\Phi_E^c(\alpha, \beta) = 1$ ; б)  $\Phi_F^c(\alpha, \beta) = 1$ ;  
в)  $\Phi_P^c(\alpha, \beta) = 1$

Тогда для сравнений относительно:

- а) математических ожиданий:  $\delta_E^{(1)}(U, V) = 0.375$ ,  $\delta_E^{(2)}(U, V) = 0.351$ ;
- б) функций распределения:  $\delta_F^{(1)}(U, V) = 0.001989$ ;  $\delta_F^{(2)}(U, V) = 0.001788$ ;
- в) вероятностей:  $\delta_P^{(1)}(U, V) = 0.306$ ,  $\delta_P^{(2)}(U, V) = 0.254$ .

Таким образом, наибольшую устойчивость (на уровне 35-40%) демонстрирует сравнение с помощью математического ожидания. Немного уступает ему (25-30%) сравнение с помощью вероятностей. Самая низкая устойчивость (0.15-0.20%) у сравнения с помощью функции распределения.

### 2.3.7.3 Анализ устойчивости сравнений гистограмм результатов ЕГЭ

Исследуем устойчивость к  $\alpha$ -зашумлению сравнений гистограмм с помощью математических ожиданий результатов ЕГЭ абитуриентов, поступивших в 2012 году на специальность «Экономика» и только по конкурсному набору. Результаты исследований для 10 вузов из верхней части ранжирования по среднему баллу приведены на рисунке 2.13. Вузы расположены в порядке убывания среднего балла. Для каждой пары «соседних» гистограмм  $U$  и  $V$  двух вузов в верхней половине ячейки указано значение индекса

$\Delta_E(U, V)$ , а в нижней – значение  $\delta$ -устойчивости  $\delta_E^{(2)}(U, V) = \frac{c}{E_U + E_V}$  относительно максиминного критерия.

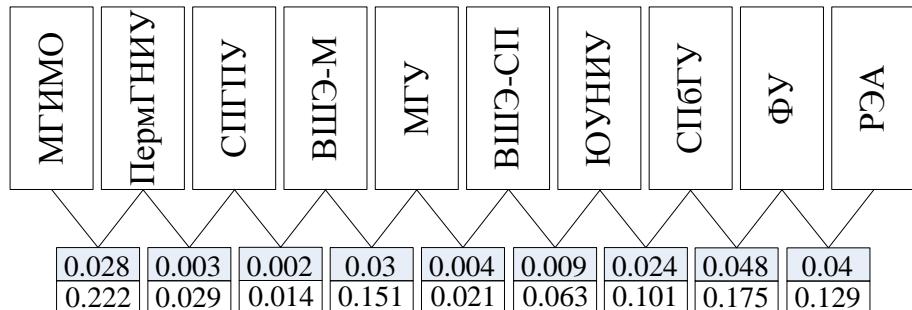


Рисунок 2.13 – Значения индекса  $\Delta_E(U, V)$  (вверху) и  $\delta$ -устойчивости  $\delta_E^{(2)}(U, V)$  (внизу)

Примечание 2.3. Использовались те же аббревиатуры вузов, что и в пункте 2.3.5.

Таким образом, на рисунке 2.13 представлены максимальные значения зашумлений, при которых сравнения в парах не нарушается. Эти значения колеблются от 1.4 до 22.2%.

### 2.3.8 Некоторые выводы

В данном подразделе отчета приведены результаты численного анализа применения нечеткостных методов сравнения к ранжированию вузов по гистограммам средних баллов ЕГЭ зачисленных в вузы абитуриентов. Приведенный анализ показал, что результаты ранжирования нечеткостными методами могут довольно сильно отличаться от ранжирования по среднему баллу. В то же время ранжирования, осуществленные совершенно разными нечеткостными методами, зачастую ближе друг к другу, чем к ранжированию по среднему значению. Это говорит о том, что учет всей полноты информации, отраженной в гистограммах средних баллов ЕГЭ зачисленных в вузы абитуриентов, довольно сильно меняет результат ранжирования.

Оценивая применимость методов нечеткостного сравнения к ранжированию большого числа гистограмм, можно сделать вывод, что в целом эти методы дают более адекватное ранжирование, чем метод средних значений, поскольку учитывают всю полноту информации о гистограммах. Вместе с тем были выявлены и определенные трудности, связанные с:  
а) необходимостью для ряда методов приведения гистограмм к унимодальному виду с потерей части информации; б) неэффективностью применения некоторых методов именно к ранжированию большого числа гистограмм. Основной же трудностью «внедрения» этих методов в практику ранжирования является, по нашему мнению, невозможность для ряда методов дать простую наглядную интерпретацию сравнения (в баллах, абитуриентах и т.д.).

Во второй части подраздела приведены некоторые прикладные результаты, связанные с анализом гистограмм баллов ЕГЭ зачисленных в вузы абитуриентов. Предложена модель «идеального» зачисления абитуриентов и показано, что распределение зачисленных абитуриентов в вуз в такой модели будет унимодальным при достаточно общих предположениях о функции предпочтения. Поставлена и решена задача оптимального преобразования гистограмм, приводящей ее к унимодальному виду.

Наконец, в третьей части работы найдены (и это отражено в отчете) необходимые и достаточные условия на уровень искажений гистограмм, при выполнении которых результат сравнения гистограмм вероятностными методами не изменится.

Из умозрительных соображений априори было понятно, что «интегральные» методы сравнение, такие как метод сравнения математических ожиданий, метод сравнений вероятностей неравенств, будут более предпочтительными, чем методы поточечного сравнения, такие как стохастическое доминирование. Однако в результате проведенных исследований были не только подтверждены эти предположения, но и получены точные теоретические оценки возможных значений искажений гистограмм, при которых результат

сравнения не будет меняться. Показано, что большой «зазор» между гистограммами не всегда обеспечивает устойчивость сравнения к искажениям.

Найденные условия неизменности сравнения гистограмм могут быть использованы для оценивания надежности результатов различных ранжирований, обработки данных и пр. в условиях различных типов неопределенности: стохастической неопределенности; неопределенности, связанной с умышленным искажением данных, с заполнением пробелов в данных и т.д.

Дальнейшие исследования в направлении оценивания устойчивости сравнений могут быть связаны как с исследованием других методов сравнения (в том числе наиболее популярных и важных в приложениях нечеткостных методов сравнения), так и с другим описанием неопределенности.

Результаты исследования в рамках настоящего подраздела отчета отражены в публикациях [127, 128, 129, 130, 131].

## 2.4 Численный анализ поведения биржи методом имитационного моделирования

С помощью имитационной модели мы исследуем вопрос об эффективности торговли на рынке для мелкого инвестора. Предполагается, что такие игроки являются спекулянтами, поскольку мелкому трейдеру с долгосрочными инвестиционными целями выгоднее вложить средства в инвестиционный фонд, управляемый профессиональными менеджерами. Грамотное вложение требует специальных знаний и навыков работы с финансовыми инструментами, анализа доступной экономической информации, иногда и доступа к инсайдерской информации. Как правило, у индивидуальных инвесторов нет ни времени, ни опыта, ни необходимых знаний для принятия таких «информированных» решений. В [132] показано, что в среднем ежегодный оборот портфеля составляет 75%, а у тех трейдеров, кто торгует часто, ежегодный оборот может доходить до 250%. Это косвенно подтверждает спекулятивный характер торговли мелких трейдеров.

Спекулянты стараются заработать на краткосрочных и среднесрочных колебаниях цен. Если такой трейдер ожидает увеличения цены в ближайшем будущем, то он покупает ценные бумаги сейчас с целью продажи их после повышения цены. И наоборот, если он ожидает падения цен, то продав сейчас и купив позже по более низкой цене, спекулянт заработает на этой разнице цен. Таким образом, ключевым фактором успешности спекулятивной торговли является способность агента правильно предсказывать направление движения цен. Но, как показывают исследования, многие трейдеры не обладают такой способностью. В [133] были проанализированы сделки частных инвесторов одной брокерской фирмы (данные брались за семилетний период по 10 тысячам брокерских счетов) и показано, что в среднем акции, проданные трейдерами, имели большую доходность, чем купленные ими впоследствии, т.е. трейдеры принимали неверные решения. Анализ сделок 66,5 тысяч брокерских счетов за пятилетний период [132] показал, что при доходности рыночного портфеля в 17,9% средняя доходность трейдеров составляет 16,4%, а среди активно торгующих трейдеров средняя доходность составляет лишь 11,4%. Даже у финансовых аналитиков доля верных прогнозов часто не достигает даже 50% [134]. В [135] оценивалась эффективность прогнозов аналитиков и экспертов российского рынка акций – лишь 56,8% экспертов были правы.

Поэтому в базовой модели мы будем рассматривать агентов с одной характеристикой – вероятностью верного распознавания будущего движения цен. В [136] было показано, что успешное распознавание движения цен в периоды стабильной экономической жизни с вероятностью чуть выше  $\frac{1}{2}$  позволяет трейдерам получать в среднем положительный выигрыш при долгосрочной игре.

Еще одним следствием того, что индивидуальные инвесторы, как правило, не имеют ни специальных знаний, ни времени для принятия информированных решений является их склонность к «имитации», когда трейдеры копируют действия какого-либо другого трейдера или группы трейдеров. Пер-

вый случай относится к ситуации, когда на рынке есть трейдеры (так называемые «гуру»), которых другие считают более опытными, или удачливыми, или имеющими доступ к закрытой для других информации (инсайдерами). Даже профессиональные игроки принимают во внимание решения других игроков, хотя склонность к следованию толпе ниже у профессиональных инвесторов, чем у любителей [137]. Как было показано в [138], у трейдеров есть причины для имитации чужих решений, и это может быть выгодно для них, а при исследовании активности мелких трейдеров на рынке валютных фьючерсов в [139] был особо отмечен факт повторения мелкими спекулянтами действий крупных спекулянтов. Поэтому мы рассматриваем также стратегию «последователь», которая является простейшим случаем имитирующего поведения.

Мы рассматриваем также такую разновидность стратегии «торговля против рынка» (*contrarian investing*), как «искатели Черного лебедя», основанную на ожидании кризиса и возможности заработать там, где все остальные терпят колossalные убытки. Н.Н. Талеб, автор [140], является основателем хедж-фонда «Эмпирика», который скупает не акции и ценные бумаги, а опционы и фьючерсы на них, причем опционы с высоким страйком (цена, по которой будет реализован опцион) для опционов call и низким – для опционов put, так как чем ниже вероятность наступления какого-либо ценового события, тем дешевле сделать ставку на него. Таким образом, «Эмпирика» ждет возможности заработать огромные деньги в один день с приходом кризиса (по терминологии Талеба – Черного лебедя), теряя каждый день понемногу на премиях, выплаченных за купленные опционы. Такая стратегия эффективна в периоды экономических потрясений и кризисов, но является ли она выгодной в долгосрочном периоде для мелких трейдеров?

Цель настоящего исследования состоит (1) в исследовании зависимости между вероятностью трейдера верно предсказывать направление движения цен и его финансовым благополучием, (2) анализе последствий торговли с кредитным плечом, (3) в сравнении различных инвестиционных стратегий,

доступных мелким инвесторам, из числа описанных выше. Мы используем для этого агентно-ориентированную модель рынка, реализованную в среде R.

### 2.3.1 Общее описание модели поведения биржи

Мы моделируем рынок одного актива, на котором торгуют  $N$  агентов. Все агенты в этой модели являются спекулянтами и заинтересованы не в самом активе как долгосрочном вложении, а в возможности заработать на разнице в цене актива. Поэтому все заявки рассчитаны на краткосрочную перспективу и агенты торгуют на дневных колебаниях цен. Временной горизонт в модели – 10 лет.

Агенты в нашей модели выставляют только рыночные заявки (market order). В такой заявке указывается объем и не указывается цена, поэтому она немедленно совершается по текущей рыночной цене. Более сложные заявки агенты не выставляют, и все выставленные заявки могут быть удовлетворены в полном объеме.

Также мы исследуем влияние использования маржинальных сделок (в том числе при совершении продаж без покрытия) на благосостояние и возможность банкротства трейдеров. Маржинальными сделками называются торговые сделки, которые трейдер совершает на суммы, превышающие его реальный капитал в несколько раз, пользуясь маржинальным кредитом под залог оговоренной суммы (маржи). Маржинальный кредит отличается от обычного тем, что выдаваемая сумма в несколько раз больше размера требуемого залога. Соотношение между суммой залога и получаемой суммой называется кредитным плечом (leverage). Продажей без покрытия (короткой позицией) называется продажа ценных бумаг, взятых взаймы, в расчёте на падение их стоимости, с последующим выкупом таких же ценных бумаг и возвратом их кредитору. Трейдер открывает короткую позицию в надежде на снижение стоимости ценной бумаги, что позволит купить ее позднее за меньшие деньги и вернуть кредитору, при этом разница в цене покупки и

продажи и составит прибыль трейдера. В нашей модели короткие продажи запрещены в кризис, что связано с появлением у заемщиков опасений невоз-врата кредитов.

Для оценки успешности деятельности агентов мы рассчитываем в конце дня после проведения торгов показатель общего благосостояния агента, суммируя количество имеющихся у него денег с количеством имеющихся акций, умноженных на рыночную цену следующего дня. Использование следующей рыночной цены связано с тем, что агент сможет продать имеющиеся у него акции лишь на следующий день. В случае снижения благосостояния агента до критического уровня (половины начального состояния) агент объявляется банкротом и прекращает участие в торговле. Общепринятое определение банкрота как человека, неспособного удовлетворить в полном объеме требования кредиторов, не подходит для случая базовой модели с отсутствием маржинальной торговли, поскольку в этом случае даже проигрыш всего начального капитала является событием невозможным. Порог в 50% от начального капитала выбран как адекватная оценка деятельности трейдера на 10-летнем интервале. Можно рассматривать такой порог также как уровень стоп-лосс (заявка, выставленная в с целью ограничить свои убытки при достижении ценой заранее определённого уровня), только не в терминах цен, а в терминах общего благосостояния игрока.

В качестве критериев для оценки успешности стратегий мы рассматриваем три простых критерия: ожидаемое благосостояние в конце 10-летнего периода, вероятность получения положительной доходности за этот период и вероятность обанкротиться за эти 10 лет. Для этого мы оцениваем (1) среднее благосостояние агентов на финальную дату, (2) долю агентов, чье благосостояние на финальную дату превысило начальное благосостояние и (3) долю банкротов в общей выборке.

Поскольку в данной работе агенты являются мелкими участниками рынка, не имеющими влияния на цену актива (в зарубежной литературе таких трейдеров называют price-takers), то цену необходимо задавать экзогенно –

для этого мы использовали дневные данные мировых фондовых индексов за период 01.01.2000-31.12.2009. Временной ряд состоит из цен закрытия. Мы использовали американский индекс S&P500 (2514 наблюдений), французский CAC 40 (2552 наблюдения), немецкий DAX (2542 наблюдения), британский FTSE 100 (2525 наблюдений), японский Nikkei 225 (2453 наблюдения), гонконгский Hang Seng (2488 наблюдений).

Для выделения дней, потенциально подходящих для ограничительных мер по продажам без покрытия, мы использовали волатильность индекса, рассчитанную со скользящим интервалом в 20 значений, и применяли пороговое правило из [136]: если значение волатильности не превышает соответствующего значения индекса, умноженного на заранее заданное значение порога, то будем считать этот день регулярным (экономика стабильна) и обозначать буквой Q, а в случае превышения будем считать, что рынок испытывает некоторые потрясения (кризис) и будет введен запрет на открытие коротких позиций – такие дни обозначим R. Окно в 20 значений приблизительно соответствует одному календарному месяцу и позволяет использовать эффект «долгой памяти» – в течение месяца после прекращения резких колебаний цен трейдеры не смогут использовать продажи без покрытия и будут вынужденно осторожны. Эксперименты проводились для значения порога в 4%.

### 2.3.2 Описание экспериментов

В начальный момент времени все агенты обладают  $c_0 = 10\ 000$  условных единиц и  $s_0 = 0$  акций. Агенты в этом эксперименте являются спекулянтами и принимают решения в краткосрочной перспективе, поэтому в каждый момент времени  $t$  их заботит только направление движения цены в следующий момент времени  $price_{t+1} - price_t$ , вероятность того, что направление будет ими предсказано верно, равна  $p$ . Эта характеристика выбирается в начальный момент существования агента и неизменна в течение жизни агента на рынке.

На каждой  $t$ -ой итерации  $i$ -й агент принимает решение о продаже ( $d_{i,t} = -1$ ) или покупке ( $d_{i,t} = +1$ ) актива. Если в момент времени  $t$  агент прогнозирует рост цены актива, то агенту выгодно купить акции по цене  $price_t$ , так как его благосостояние в следующий момент времени увеличится. Если агент ожидает снижения цены, то ему выгодно сейчас продать по текущей цене, чтобы не допустить снижения благосостояния в следующий момент времени.

После принятия решения агенты выставляют заявки. Агенты во всех моделях могут выставлять только рыночные заявки, в которую входит только объем ценных бумаг, который агент хочет купить или продать. Если решение  $d_{i,t} = +1$  (купить), то объем заявки при запрете использования заемных средств выставляется по формуле  $vol_{i,t} = z \cdot cash_{i,t}/price_t$ , где  $z$  – случайная величина, распределенная по закону  $R[0, 1]$ . Если маржинальные сделки разрешены, то агент выставляет заявку на покупку в объеме  $vol_{i,t} = z \cdot wealth_{i,t} \cdot leverage/price_t$ , где  $leverage$  обозначает кредитное плечо (соотношение залога и заемного капитала). Наличие случайной величины  $z$  отражает тот факт, что агент может хотеть продать не все имеющиеся у него акции или купить не на все деньги в случае торговли без кредитного плеча или использовать не полностью максимально доступный заемный капитал в случае маржинальной торговли. Как правило, агентные модели учитывают такую возможность, например, в [141] агенты могут торговать, используя только 2% капитала в одной заявке.

Аналогично для случая  $d_{i,t} = -1$  (продать), в случае запрета коротких продаж при наличии у агента в собственности некоторого количества акций он выставит на продажу их часть в объеме  $vol_{i,t} = z \cdot stocks_{i,t}$ ,  $z \sim R[0, 1]$ , а если короткие продажи не запрещены, то агент может использовать заемные средства и выставить на продажу акций больше, чем имеет. Недостающие акции агент вернет заемщику, выкупив их на следующий день по рыночной

цене следующего дня. Объем заявки в этом случае равен  $vol_{i,t} = z \cdot wealth_{i,t} \cdot leverage/price_t$ .

После совершения всех сделок с учетом выставленных заявок пересчитывается число имеющихся у агента акций и собственных средств  $cash_{i,t+1}$  и  $stocks_{i,t+1}$  – с этими средствами агент приступит к торгу на следующий день – и пересчитывается текущее благосостояние агента  $wealth_{i,t+1} = cash_{i,t+1} + stocks_{i,t+1} \cdot price_{t+1}$ . Если агент  $i$  становится банкротом в момент времени  $t$ , что происходит при условии  $wealth_{i,t} \leq wealth_0/2 = 5000$ , то он уходит с рынка.

В модели «Лидеры и последователи» агенты делятся на две равные группы – первая из них ведет себя так же, как и в базовой модели, т.е. пытается предсказать движение цен с вероятностью  $p$ , а вторая группа копирует действия агентов из первой группы с опозданием на один шаг и агент-последователь  $j$ , наблюдая предыдущее действие своего лидера  $i$   $d_{i,t-1}$ , повторяет его на следующем шаге  $d_{j,t} = d_{i,t-1}$ . Для каждого агента из первой группы (будем называть их лидерами) существует только один агент из второй группы (будем называть его последователями), копирующий его действия. Последователь не знает значение вероятности  $p$  у своего лидера.

В модели с «искателями Черного лебедя» агенты делятся на две группы, условно называемые «обычные трейдеры» и «искатели черного лебедя» – первые из них хорошо предсказывают движение цен в период спокойной экономической жизни, но не могут сориентироваться в кризис, а вторые, наоборот, не очень хорошо предсказывают движение в регулярные периоды, зато практически не ошибаются в кризисное время (стратегия Талеба). Разница в характеристиках выглядит следующим образом. «Обычные трейдеры» в дни, соответствующие регулярным дням (т.е. экономика стабильна, такие дни для краткости назовем -днями), угадывают направление движения цен и принимают верные решения с вероятностью  $p^Q$ , которая назначается агенту с помощью равномерно распределенной на интервале  $[p_{min1}, p_{max1}]$  случайной

величины, причем  $p_{min1} \geq 0.5$ . В кризисные дни (назовем их -дни) эта вероятность падает:  $p^R = p^Q - \delta_1$ . «Искатели черного лебедя», наоборот, принимают верные решения в регулярные дни с меньшей вероятностью, чем в кризисные:  $p^Q \sim R[p_{min2}, p_{max2}]$ ,  $p_{max2} \leq 0.5$  и  $p^R = p^Q + \delta_2$ . Таким образом, агенты из группы «обычных трейдеров» показывают лучшие результаты в условиях стабильной экономической ситуации и мало результативны в кризис, а агенты, использующие стратегию Талеба, больше нацелены на кризис и в условиях стабильного рынка чаще терпят убытки.

### 2.3.3 Результаты моделирования поведения биржи

Для всех моделей мы рассматриваем три характеристики: 1) среднее благосостояние на финальную дату, 2) доля агентов из всей выборки, чье благосостояние на финальную дату превышало начальное благосостояние, 3) доля банкротов среди всех агентов (напоминаем, что мы называем банкротами тех агентов, чье благосостояние опустилось ниже порога в 5 000).

Мы проводили серии экспериментов с параметром  $p$ , разыгрываемым не с помощью случайной величины из некоторого интервала, а заданным конкретным числом для всех агентов на одну серию экспериментов. Как правило, в одной серии проводилось 100-150 экспериментов. Эксперименты проводились для значений  $p$  от 0.3 до 0.7 с шагом 0.01.

Основные результаты первой модели:

Если агент принимает решения, подбрасывая монетку ( $p = 0.5$ ) и не торгуется с кредитным плечом, то после 10 лет торговли он получит доход с вероятностью 0.35 и обанкротится с вероятностью 0.06. Ожидаемое благосостояние в этом случае составит 9500. Такой агент мало проигрывает на рынке, но вряд ли обанкротится.

Если агент не использует заемных средств для торговли, то достаточно торговать с долей верных решений  $p \geq 0.52$ , чтобы с вероятностью 0.99 не обанкротиться за 10 лет. Вероятность получения дохода в этом случае со-

ставляет 0.7. А если  $p \geq 0.56$ , то агент не обанкротится и получит доход с вероятностью 0.99. Такие небольшие значения  $p$  по сравнению со стратегией случайного принятия решений с помощью бросания монеты могут объяснить, почему так много людей стремится попробовать себя в торговле ценными бумагами.

Если же агент, стремясь увеличить свою прибыль, прибегает к заемному кредитованию, то ситуация меняется кардинальным образом. Агент, принимающий решения случайным образом, «выживет» на рынке с вероятностью 0.48 при использовании рычага 1:2, с вероятностью 0.11 при использовании рычага 1:5 и с вероятностью только 0.01, если кредитный рычаг 1:10. Несмотря на тот факт, что 10-летняя доходность составит 50%, 300% and 2000% в этих случаях, соответственно, риск подобной стратегии для агента с  $p = 0.5$  очевиден.

Для использования маржинальной торговли агенту нужно иметь как минимум  $p \geq 0.7$  для того, чтобы не обанкротиться с вероятностью 0.99, и  $p > 0.85$ , чтобы не обанкротиться с вероятностью 0.001, что достижимо лишь для инсайдеров. Для обычного мелкого трейдера такая доля успешных прогнозов на протяжении 10 лет выглядит недостижимой.

Основные результаты модели «лидеры и последователи»:

Эффективность стратегии «последователь» мало зависит от значения  $p$  его лидера. Моделируемая стратегия простого повторения действий лидера и особенности данных выявили небольшое преимущество тех агентов, кто следует за менее квалифицированными лидерами.

Практически независимо от значения  $p$  лидера, последователь будет иметь практически нулевую доходность в случае  $leverage = 0$ . Преимуществом стратегии «последователь» является небольшая вероятность банкротства.

Если агент торгует с кредитным плечом, то вероятность стать банкротом увеличивается, а вероятность получить доход снижается.

В целом, все три параметра для стратегии «последователь» весьма схожи с параметрами случайной стратегии.

Если трейдер не знает своё  $p$  (новичок на рынке ценных бумаг), то стратегия «быть последователем» оправдана с точки зрения меньшей вероятности банкротства.

Основные результаты модели с «искателями черных лебедей»:

В среднем 10-летняя доходность «искателей Черных лебедей» сравнима с доходностью обычных трейдеров, несмотря на различный, даже противоположный характер их стратегий – обычные трейдеры зарабатывают в периоды стабильной экономики, а «искатели Черных лебедей», наоборот, в дни сильных экономических потрясений.

Однако, для «искателей Черных лебедей» вероятность обанкротиться намного выше. Черные лебеди – слишком редкие события, чтобы строить длительные успешные долгосрочные торговые стратегии на их основе.

#### 2.3.4 Некоторые выводы

Мы проанализировали различные торговые стратегии мелких трейдеров, не имеющих возможности оказывать влияние на цену актива, и последствия использования маржинальной торговли. Результаты наших экспериментов показывают, что существует некоторый критический уровень опыта (или удачливости) агентов, такой что агенты, имеющие показатель успешности распознавания движения цен равный или превышающий этот критический уровень, почти наверняка «выживут» на рынке. Если агент не использует возможности маржинальной торговли и заключает сделки только на собственный капитал, то такой критический уровень располагается чуть выше  $\frac{1}{2}$ . Такой показатель является интуитивно привлекательным и сулит достаточно высокие шансы на выживание и получение прибыли, что может объяснить, почему так много людей стремится попробовать себя в торговле цennыми бумагами. Однако если трейдер торгует с использованием заемных средств

(особенно с большим кредитным плечом), то критическое значение будет намного выше и для успешной долговременной торговли на рынке потребуется высокая вероятность принятия верных решений.

Для мелких инвесторов без большого опыта или доступа к инсайдерской информации для принятия решений стратегия имитирования представляется достаточно разумной, особенно если агент не использует маржинальных сделок. Оборотной стороной стратегии «последователя» является «эффект толпы», который может вызвать хаос и спекулятивные пузыри на рынке (см., например, [142]). В данном исследовании мы оставили в стороне вопрос о том, насколько «эффект толпы» влияет на динамику цен и проанализировали, насколько выгодно мелкому инвестору использовать стратегию «последователя».

Еще один интересный вывод из наших экспериментов касается стратегии «искателей Черных лебедей». В долгосрочной перспективе в экономике период стабильной экономической жизни и отсутствия серьезных потрясений на рынке может быть настолько продолжительным, что трейдер может просто обанкротиться в ожидании Черных лебедей, на которых зарабатывают последователи подобной стратегии.

Подробные результаты исследований представлены в работах [143, 144].

### 3 Исследование моделей коллективного и многокритериального принятия решений

В этом разделе отчета приведены результаты исследований моделей коллективного и многокритериального принятия решений. Результаты исследований, отраженные в этом разделе, были получены в следующих теоретических и прикладных направлениях:

- исследования по терии важности критериев при решении многокритериальных задач;
- построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений;
- исследование качественных характеристик индексов поляризованности социальных групп;
- исследование свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции.

#### 3.1 Исследования по терии важности критериев при решении многокритериальных задач

В отличие от всех известных методов анализа многокритериальных задач принятия решений, использующих оценки важности критериев [145, 146, 147], теория важности критериев (ТВК) основана на точных определениях понятий равенства и превосходства в важности одних критериев над другими (библиографию см.[148, 149, 150]). В ней разработаны решающие правила для ряда комбинаций различных видов информации о важности критериев и их шкале, задающие соответствующие бинарные отношения предпочтения и безразличия.

В отчете представлено решающее правило для задач, в которых имеется несколько равноважных групп критериев, состоящих из критериев равной важности; введено определение понятия превосходства в важности в  $h$  раз для групп критериев; дано простое аналитическое правило для случая, когда критерии с порядковой шкалой ранжированы по важности.

### 3.1.1 Сведения из теории важности критериев

Дальнейшее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия (индивидуального) решения в условиях определенности при многих критериях:

$$\mathbb{M} = \langle \tau, X, f_1, \dots, f_m, Z_0, R \rangle,$$

где  $\tau$  – тип постановки задачи (выбрать один наилучший вариант или же заданное число лучших вариантов, упорядочить все варианты по предпочтительности и т.д.);  $X$  – множество вариантов (число вариантов не менее двух);  $f_1, \dots, f_m$  – (частные) критерии ( $m \geq 2$ ),  $Z_0 = \{1, \dots, q\}$  – множество шкальных градаций, или, кратко, шкала критериев ( $q \geq 2$ ),  $R$  – отношение нестрогого предпочтения. Под критерием  $f_i$  понимается функция, определенная на  $X$  и принимающая значения из  $Z_0$ . Отметим, что критерии с общей шкалой называются однородными [151, 148]. Критерии  $f_i$  образуют векторный критерий  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Каждый вариант  $x$  из множества  $X$  характеризуется его векторной оценкой  $y(x) = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ . Множество всех векторных оценок есть  $Z = Z_0^m$ . Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок.

Отношение нестрогого предпочтения  $R$  моделирует предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР) и определяется на множестве  $Z$ :  $yRz$  означает, что векторная оценка  $y$  не менее предпочтительна, чем векторная оценка  $z$ . Отношение  $R$  порождает отношение безразличия  $I$  и (строгого) предпочтения  $P$ :  $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$ ;  $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$  (запись  $zRy$  означает, что  $zRy$  неверно). Далее полагается, что отношение  $R$  есть частичный квазипорядок (оно рефлексивно:  $yRy$  верно для любого  $y \in Z$ , и транзитивно: для любых  $y, z, u \in Z$  из  $yRz$  и  $zRu$  следует  $yRu$ ), так что отношение  $P$  – строгий частичный порядок (оно иррефлексивно:  $yRy$  для любого  $y \in Z$ , и транзитивно), а отношение  $I$  – эквивалентность (оно рефлексивно, транзитивно и симметрично: для любых

$y, z \in Z$  из  $yRz$  следует  $zRy$ ). При разработке математической модели  $M$  отношение  $R$  строится (выявляется полностью или только частично) на основе информации о предпочтениях ЛПР. Правило, задающее указанным образом отношение  $R$ , называется решающим правилом.

Предполагается, что каждый из критериев независим по предпочтению от остальных и его большие значения предпочтительнее меньших. Другими словами, если  $v_k$  – (неизвестная) ценность градации  $k \in Z_0 = \{1, \dots, q\}$ , то

$$v_1 < v_2 < \dots < v_q \quad (3.1)$$

(это и означает, что предпочтения возрастают вдоль шкалы критериев). Таким образом, если о ценах градаций известно лишь, что выполнены неравенства (3.1), то шкала критериев является порядковой, а числа  $k$  в  $Z_0$  отражают лишь упорядоченность градаций по предпочтительности.

Далее для векторов из  $\mathbb{R}^n$  (при  $n \geq 2$ ) будем использовать следующие обозначения:

$$a \leqq b \Leftrightarrow (a_i \geq b_i, i = 1, \dots, n); \quad a \geq b \Leftrightarrow (a \geqq b, a \neq b);$$

$$a > b \Leftrightarrow (a_i > b_i, i = 1, \dots, n).$$

Если никакой информации о предпочтениях ЛПР (кроме заданных критериев) нет, то в роли отношения  $R$  выступает отношение Парето  $R^\varnothing$ , которое с учетом принятого допущения о том, что с ростом номера градации растет ее ценность, определяется на  $Z$  следующим образом:

$$yR^\varnothing z \Leftrightarrow y \geqq z.$$

Отметим, что отношение нестрогого предпочтения  $R^\varnothing$  порождает отношение безразличия  $I^\varnothing$ , являющееся отношением равенства векторов, и отношение (строгого) предпочтения  $P^\varnothing$ , определяемое так:  $yP^\varnothing z \Leftrightarrow y > z$ .

Для расширения этого отношения требуется дополнительная информация  $\Gamma$  о предпочтениях ЛПР, в роли которой выступают сведения о важности критериев и характере изменений предпочтений вдоль шкалы критериев. Ка-

ждый фрагмент (одно или нескольких сообщений)  $\gamma$  накопленной информации  $\Gamma$  о важности критериев или характере роста предпочтений вдоль их шкалы  $Z_0$  задает на множестве векторных оценок  $Z$  соответствующее отношение предпочтения  $P^\gamma$  или безразличия  $I^\gamma$ . В соответствии с фрагментарным подходом, разработанным в ТВК (см. также [152]) на основе этой информации на множестве векторных оценок  $Z$  определяется отношение нестрогого предпочтения  $R^\Gamma$  (рефлексивное и транзитивное отношение) как транзитивное замыкание объединения всех этих отношений и отношения  $R^\emptyset$ : соотношение  $yR^\Gamma z$  верно тогда и только тогда, когда существует цепочка вида

$$yR^{\gamma^1} u^1, u^1 R^{\gamma^2} u^2, \dots, u^{r-1} R^{\gamma^r} z, \quad (3.2)$$

где  $u^k$  – векторные оценки, а  $\gamma^k$  – фрагменты из  $\Gamma$  (так что  $R^{\gamma^k}$  есть  $I^{\gamma^k}$  или  $P^{\gamma^k}$  в зависимости от смысла  $\gamma^k$ ) или же символ  $\emptyset$ . Если существует цепочка (3.2), в которой все  $R^{\gamma^k}$  есть  $I^{\gamma^k}$ , то векторные оценки  $y$  и  $z$  безразличны:  $yI^\Gamma z$ . В противном случае (т.е. когда в цепочке (3.2) хотя бы одно  $R^{\gamma^k}$  есть  $P^{\gamma^k}$ ), векторная оценка  $y$  предпочтительнее, чем  $z$ :  $yP^\Gamma z$ .

Отношение  $R^\Gamma$  индуцирует аналогичное по смыслу отношение  $R_\Gamma$  на множестве вариантов:  $x'R_\Gamma x'' \Leftrightarrow f(x')R^\Gamma f(x'')$ . Оно непосредственно используется для формирования решения поставленной задачи. Например, один лучший вариант следует выбрать из множества вариантов, недоминируемых по отношению строгого предпочтения  $P_\Gamma$ .

Обозначим через  $y^{ij}$  векторную оценку, полученную из  $y$  перестановкой ее компонент  $y_i$  и  $y_j$ . Следующие определения являются исходными в ТВК [151, 153].

Определение 3.1. Критерии  $f_i$  и  $f_j$  равноважны, или одинаково важны (такое сообщение обозначается  $i \approx j$ ), когда всякая векторная оценка  $y$ , в которой  $y_i \neq y_j$ , и векторная оценка  $y^{ij}$  одинаковы по предпочтительности.

Определение 3.2. Критерий  $f_i$  важнее критерия  $f_j$  (такое сообщение обозначается  $i \succ j$ ), когда всякая векторная оценка  $y$ , в которой  $y_i > y_j$ , предпочтительнее векторной оценки  $y^{ij}$ .

Пусть все критерии равноважны, а шкала у них порядковая. Такую информацию будем обозначать буквой  $S$ . Для нее известны несколько аналитических решающих правил, задающих отношение  $R^S$ . Разумеется, все они равносильны. Одно из них выглядит так [151]:

$$yR^S z \Leftrightarrow y_{\uparrow} \geq z_{\uparrow}, \quad (3.3)$$

где  $y_{\uparrow} = (y_{(1)}, \dots, y_{(m)})$  и  $z_{\uparrow} = (z_{(1)}, \dots, z_{(m)})$  – векторы, полученные из векторных оценок  $y$  и  $z$  соответственно путем упорядочения их компонент по неубыванию. Если верно  $y_{\uparrow} \geq z_{\uparrow}$ , то  $yP^S z$ ; если же  $y_{\uparrow} = z_{\uparrow}$ , то  $yI^S z$ .

Обозначим через  $W(y, z)$  множество чисел, являющихся компонентами векторов  $y$  или  $z$ . Расположив элементы этого множества по возрастанию, получим упорядоченное множество

$$W(y, z)_{\uparrow} = \langle w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_g \rangle,$$

где  $w_1 < w_2 < \dots < w_j < \dots < w_g$ ,  $g \leq m$ . Обозначим через  $\sigma_j(y)$  число компонент вектора  $y$ , которые не больше, чем  $w_j$ , и пусть  $\sigma(y) = (\sigma_1(y), \dots, \sigma_{g-1}(y))$ . Другое решающее правило для  $R^S$  таково [152]:

$$yR^S z \Leftrightarrow \sigma(y) \leq \sigma(z). \quad (3.4)$$

Пусть  $q > 2$ , критерии имеют шкалу первой порядковой метрики [154], причем рост предпочтений вдоль  $Z_0$  замедляется (информация  $\Delta$ ). Тогда в цепочке (3.2) могут участвовать и отношения  $P^{i \approx j \Delta}$ , определяемые так:

$$\begin{aligned} yP^{i \approx j \Delta} z \Leftrightarrow & (y = [(z \| z_i + \delta, z_j - \delta), z_i + \delta \leq z_j - \delta] \text{ или} \\ & [(z \| z_j + \delta, z_i - \delta), z_j + \delta \leq z_i - \delta]), \end{aligned}$$

где  $\delta$  – натуральное число, а  $(z \parallel z_i + \delta, z_j - \delta)$  – векторная оценка, полученная из  $z$  заменой компоненты  $z_i$  на  $z_i + \delta$  и  $z_j$  на  $z_j - \delta$ . Решающее правило для отношения  $R^{S\Delta}$ , задаваемого информацией  $S\&\Delta$ , таково [155,156]:

$$yR^{S\Delta}z \Leftrightarrow \sum_{i=1}^l \sigma_{(i)}(y) \leq \sum_{i=1}^l \sigma_{(i)}(z), \quad l = 1, \dots, q-1. \quad (3.5)$$

Приведем определение равноважности групп критериев [157]. Пусть в векторной оценке  $y$  компоненты  $y_i$  с номерами из  $A$  равны между собой и все компоненты  $y_i$  с номерами из  $B$  равны между собой (т.е.  $y_i = y_j$  при  $i, j \in A$  и при  $i, j \in B$ ). Обозначим через  $y^{AB}$  векторную оценку, полученную из векторной оценки  $y$  с указанной структурой путем замены каждой компоненты  $y_j$ ,  $j \in B$ , на любую компоненту  $y_i$ ,  $i \in A$ , и замены каждой компоненты  $y_i$ ,  $i \in A$ , на любую компоненту  $y_j$ ,  $j \in B$ .

Определение 3.3. Группы критериев  $\{f_i\}_{i \in A}$  и  $\{f_i\}_{i \in B}$  равноважны, или одинаково важны (такое сообщение обозначается  $A \approx B$ ), если векторные оценки  $y$  и  $y^{AB}$ , в которых  $y_i \neq y_j$  при  $i \in A$  и  $j \in B$ , одинаковы по предпочтительности.

Согласно этому определению, которое является обобщением определения 3.1, сообщение  $A \approx B$  задает на множестве  $Z$  отношение безразличия  $I^{A \approx B}$  так:  $yI^{A \approx B}z \Leftrightarrow z = y^{AB}$ ,  $y_i \neq y_j$ ,  $i \in A, j \in B$ .

Теперь приведем определение превосходства в важности одного критерия над другим в  $h$  раз [158, 159]. Оно основано на понятии  $N$ -модели. Для вектора  $N = (n_1, \dots, n_m)$  под  $N$ -моделью, соответствующей исходной модели  $M$  с  $m$  критериями и множеством векторных оценок  $Z = Z_0^m$ , понимается модель с  $n = n_1 + \dots + n_m$  критериями и множеством векторных оценок  $Z(N) = Z_0^n$ , в которой все  $n$  критериев являются равноважными. Каждой векторной оценке  $y \in Y$  соответствует  $N$ -оценка  $y^N$ , первые  $n_1$  компонент которой равны  $y_1$ , следующие  $n_2$  компонент равны  $y_2$ , и т.д. И наоборот, каждой такой  $N$ -оценке соответствует векторная оценка  $y$ .

Количественная информация о важности критериев  $\Theta$  состоит из сообщений вида «Критерий  $f_i$  важнее критерия  $f_j$  в  $h_{ij}$  раз».

Определение 3.4. Критерий  $f_i$  в  $h_{ij}$  раз важнее критерия  $f_j$  (такое сообщение обозначается  $i \succ^{h_{ij}} j$ ), когда для  $N$ -модели, заданной  $\Theta$ , справедливо равенство  $n_i/n_j = h_{ij}$ .

Далее предполагается, что информация  $\Theta$  непротиворечива и полна, т.е. на ее основе можно построить матрицу важности  $H = (h_{ij})$ , для положительных элементов которой справедливы равенства  $h_{ij} = 1/h_{ji}$  и  $h_{ij} \cdot h_{jk} = h_{ik}$ ,  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ . Говорят, что  $N$ -модель, соответствующая исходной модели, задана информацией  $\Theta$  (или соответствующей ей матрицей  $H$ ), если  $n_i/n_j = h_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ .

Пусть  $R^\Theta$  – отношение нестрогого предпочтения, порождаемое на  $Z$  информацией  $\Theta$ . Оно задается следующими равносильными решающими правилами [158, 159], полученными на основе решающих правил для задач с равноважными критериями:

$$yR^\Theta z \Leftrightarrow y_\uparrow^N \geqq z_\uparrow^N, \quad yR^\Theta z \Leftrightarrow \sigma(y^N) \geqq \sigma(z^N), \quad (3.6)$$

Пусть  $\alpha_i$  – (количественные, или кардинальные) коэффициенты важности критериев – положительные числа, в сумме равные единице и удовлетворяющие условию:  $\alpha_i / \alpha_j = h_{ij}$ . Пусть, далее,

$$\alpha_{ik}(y) = \begin{cases} \alpha_i, & y_i > w_k, \\ 0, & y_i \leq w_k, \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, g - 1;$$

$$\alpha_k(y) = \alpha_{1k}(y) + \dots + \alpha_{mk}(y), \quad k = 1, \dots, g - 1; \quad \alpha(y) = (\alpha_1(y), \dots, \alpha_{g-1}(y)).$$

Решающее правило, использующее коэффициенты важности, таково:

$$yR^\Theta z \Leftrightarrow \alpha(y) \geqq \alpha(z). \quad (3.7)$$

Если верно  $\alpha(y) \geq \alpha(z)$ , то  $yP^\Theta z$ ; если же  $\alpha(y) = \alpha(z)$ , то  $yI^\Theta z$ . Решающее правило (3.7), в отличие от (3.6), не требует, чтобы числа  $h_{ij}$  были рациональными.

Заметим, что поскольку шкала критериев конечна:  $Z_0 = \{1, 2, \dots, q\}$ , то множество  $Z_0$  можно использовать в решающих правилах (3.4), (3.5)) и (3.6) вместо  $W(y, z)$  для любой пары векторных оценок  $y, z$ ; при этом  $g = q$ .

### 3.1.2 Отношение предпочтения для равноважных групп критериев, состоящих из критериев равной важности

Для иллюстрации введенных выше определений и конструкций рассмотрим следующий пример, который пригодится в дальнейшем.

Пример 3.1. Пусть в пятикритериальной задаче ( $m = 5$ ) множество критериев разбито на две равноважные (в смысле определения 3.3) группы  $\{f_1, f_2, f_3\}$  и  $\{f_4, f_5\}$ , так что  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5\}$  и  $A \approx B$ . Пусть, далее, все три критерия в первой группе равноважны и оба критерия во второй группе равноважны, т.е.  $1 \approx 2 \approx 3$  и  $4 \approx 5$ . Таким образом, имеем информацию  $E = \{A \approx B, 1 \approx 2 \approx 3, 4 \approx 5\}$ .

Пусть шкала критериев порядковая. Тогда векторная оценка  $y = (3, 3, 3, 2, 1)$  предпочтительнее векторной оценки  $z = (1, 1, 1, 3, 2)$ , т.е. верно соотношение  $yP^E z$ , так как существует цепочка вида (3.2), записанная в сокращенном виде:

$$y = (3, 3, 3, 2, 1) P^\varnothing (3, 3, 3, 1, 1) I^{A \approx B} (1, 1, 1, 3, 3) P^\varnothing (1, 1, 1, 3, 2) = z,$$

и она содержит  $P$ . Нетрудно видеть, что для векторных оценок  $y$  и  $u = (1, 3, 3, 2, 3)$  построить искомую цепочку (3.2) невозможно, так что они по отношению  $R^E$  несравнимы, т.е. неверно ни  $yR^E u$ , ни  $uR^E y$ .

Для объяснения идеи построения новых решающих правил рассмотрим информацию  $E$  из примера 3.1 подробнее. Её можно интерпретировать следующим образом, если полагать важность критериев аддитивной. Общая важность всех пяти критериев, равная, скажем, единице, «распределена» ме-

жду двумя группами критериев поровну, так что важность каждой группы равна  $\frac{1}{2}$ . Далее, важность каждой группы «распределена» поровну между входящими в нее критериями, так что важность каждого из первых трех критериев оказывается равной  $\frac{1}{6}$ , а важность каждого из последних двух равна  $\frac{1}{4}$ .

Для получения из исходной пятикритериальной задачи с неравноважными частными критериями из разных групп такой задачи, в которой все критерии равноважны, воспользуемся идеей построения  $N$ -модели из теории количественной важности и учтем количество критериев в группах. Пусть  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  – произвольная векторная оценка. Поставим ей в соответствие расширенную векторную оценку, построенную путем повторения первой группы оценок  $y_1, y_2, y_3$  дважды и второй группы оценок  $y_4, y_5$  трижды:

$$y^N = (y_1, y_2, y_3; y_1, y_2, y_3; y_4, y_5; y_4, y_5; y_4, y_5),$$

которую будем рассматривать как векторную оценку в двенадцатикритериальной задаче с равноважными критериями: важность каждого из них равна  $\frac{1}{12}$ . При этом суммарная важность каждого из первых трех исходных критериев (оценки по ним повторяются по 2 раза) равна  $2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ , а важность каждого из последних двух исходных критериев (оценки по ним повторяются по 3 раза) равна  $3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ , так что эти величины важности равны ранее рассчитанным.

Перейдем к рассмотрению общего случая задачи с  $m$  критериями. Пусть множество критериев разбито на  $s > 1$  попарно различных равноважных групп критериев  $\{f_i\}_{i \in A^1}, \dots, \{f_i\}_{i \in A^s}$ , каждая из которых состоит из равноважных критериев, причем, по крайней мере, одна из групп содержит не менее двух критериев. Такую информацию о важности будем обозначать  $E$ .

Для простоты записи без ограничения общности (при необходимости критерии можно перенумеровать) будем полагать, что первая группа включает в свой состав первые  $m_1$  равноважных критериев, вторая – следующие  $m_2$

равноважных критериев, ..., и последняя,  $s$ -я группа – последние  $m_s$  равноважных критериев, т.е. исходный векторный критерий  $f$  можно представить в таком виде:

$$f = (\underbrace{f_1, \dots, f_{m_1}}_{m_1}, \underbrace{f_{m_1+1}, \dots, f_{m_1+m_2}}_{m_2}, \dots, \underbrace{f_{m_1+\dots+m_{s-1}+1}, \dots, f_m}_{m_s}),$$

причем  $m_1 + m_2 + \dots + m_s = m$ . Информацию  $E$  можно формально записать в таком сокращенном виде:

$$E = \{A^1 \approx \dots \approx A^s; i \approx j, i, j \in A^t, t = 1, \dots, s\}. \quad (3.8)$$

Качественная информация о важности  $E$ , согласно общему определению, порождает на  $Z$  отношение нестрогого предпочтения  $R^E$ . Пусть  $\mu$  – наименьшее общее кратное натуральных чисел  $m_1, \dots, m_s$  и

$$n_1 = \frac{\mu}{m_1}, n_2 = \frac{\mu}{m_2}, \dots, n_s = \frac{\mu}{m_s}.$$

Поскольку числа  $n_1, n_2, \dots, n_s$  являются взаимно простыми, то  $N$ -модель с  $N = (n_1, n_2, \dots, n_s)$  оказывается базовой [158]. Согласно этой модели исходной векторной оценке  $y = (y_1, \dots, y_m)$  ставится в соответствие  $N$ -оценка

$$y^N = (\underbrace{y_1, \dots, y_{m_1}; \dots, y_1, \dots, y_{m_1}}_{n_1}; \dots; \underbrace{y_{m_1+\dots+m_{s-1}}, \dots, y_m; \dots, y_1, y_{m_1+\dots+m_{s-1}}, \dots, y_m}_{n_s}).$$

Заметим, что число компонент в  $y^N$ , полученных из  $t$ -й группы компонент векторной оценки  $y$ , равно  $n_t m_t = \mu$ , т.е. это число одно и то же для всех групп. Компоненты  $N$ -оценки рассматриваются как значения  $n = n_1 + \dots + n_m$  равноважных критериев. Множество всех  $N$ -оценок есть  $Z_0^n$ . Поэтому отношение  $\bar{R}^E$ , порождаемой информацией  $E$ , определим, согласно (3.3), следующим образом:

$$y \bar{R}^E z \Leftrightarrow y_\uparrow^N \geqq z_\uparrow^N. \quad (3.9)$$

Понятно, что  $y \bar{I}^E z \Leftrightarrow y_\uparrow^N = z_\uparrow^N$ ,  $y \bar{P}^E z \Leftrightarrow y_\uparrow^N \geq z_\uparrow^N$ .

Отношение  $\bar{R}^E$  можно определить, согласно (3.3), и так, если принять, что  $\sigma_j(y^N)$  – число компонент вектора  $y^N$ , которые не больше, чем  $w_j$ , и  $\sigma(y^N) = (\sigma_1(y^N), \dots, \sigma_{g-1}(y^N))$ :

$$y\bar{R}^E z \Leftrightarrow \sigma(y^N) \leq \sigma(z^N). \quad (3.10)$$

Теорема 3.1. Отношение  $\bar{R}^E$  есть квазипорядок и является (непротиворечивым) расширением отношения  $R^E$ , т.е. справедливы вложения  $R^E \subseteq \bar{R}^E$  и  $P^E \subseteq \bar{P}^E$  (они могут быть строгими оба) и равенство  $I^E = \bar{I}^E$ .

Теорему 3.1 иллюстрирует

Пример 3.2. В условиях примера 3.1, как было выяснено при пояснении идеи построения  $N$ -модели, подходящей является  $N$ -модель с  $N = (2, 2, 2, 3, 3)$ . Для нее  $n = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$  и

$$y^N = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1), z^N = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 2, 2, 2),$$

$$u^N = (1, 1, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3).$$

Поскольку верны векторные соотношения:

$$y_\uparrow^N = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3) \geq (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3) = z_\uparrow^N,$$

$$u_\uparrow^N = (1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3) \geq (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3) = y_\uparrow^N,$$

то верно  $y\bar{P}^E z$  и  $u\bar{P}^E y$ . А ранее было установлено, что верно  $yP^E z$ , но неверно ни  $yR^E u$ , ни  $uR^E y$ .

Пусть множество  $Z_0$  содержит более двух элементов, т.е.  $Z_0 = \{1, \dots, k, \dots, q\}$ , где  $q > 2$ . Отношение  $\bar{R}^{E\Delta}$ , порождаемой информацией  $E\&\Delta$ , определим, согласно (3.5), следующим образом:

$$y\bar{R}^{E\Delta} z \Leftrightarrow \sum_{i=1}^l \sigma_{(i)}(y^N) \leq \sum_{i=1}^l \sigma_{(i)}(z^N), \quad l = 1, \dots, q-1. \quad (3.11)$$

Понятно, что  $y\bar{I}^E z$ , когда все нестрогие неравенства в (3.11) выполняются как равенства, и  $y\bar{P}^E z$ , когда хотя бы одно из неравенств в (3.11) строгое.

Теорема 3.2. Отношение  $\bar{R}^{E\Delta}$  есть квазипорядок и является (непротиворечивым) расширением отношения  $R^{E\Delta}$ , т.е. справедливы вложения  $R^{E\Delta} \subseteq \bar{R}^{E\Delta}$  и  $P^{E\Delta} \subseteq \bar{P}^{E\Delta}$  (они могут быть строгими оба) и равенство  $I^{E\Delta} = \bar{I}^{E\Delta}$ .

Пример 3.3. Пусть в трехкритериальной задаче  $q = 3$ , информация  $E = \{\{1\} \approx \{2, 3\}, 2 \approx 3\}$ . Векторные оценки  $y = (2, 2, 2)$  и  $z = (1, 3, 3)$  несравнимы по  $R^{E\Delta}$ , так как построить для них цепочки вида (3.2) невозможно. Для  $N$ -модели с  $N = (2, 1, 1)$  имеем  $y^N = (2, 2, 2, 2)$ ,  $z^N = (1, 1, 3, 3)$  и

$$\sigma(y^N) = (4, 0), \quad \sigma(z^N) = (2, 2).$$

Здесь неверно ни  $\sigma(y^N) \leq \sigma(z^N)$ , ни  $\sigma(z^N) \leq \sigma(y^N)$ , так что, согласно правилу (3.10),  $y$  и  $z$  несравнимы по  $\bar{R}^E$ . Однако справедливы неравенства (3.11):  $0 < 2, 4 = 4$ , и среди этих неравенств есть строгое. Поэтому верно  $y\bar{P}^{E\Delta} z$ .

### 3.1.3 Определение количественной важности для групп критериев

Для объяснения идеи построения вводимого ниже определения рассмотрим следующий пример задачи, в которой имеется количественная информация о важности критериев  $\Theta$  специального вида.

Пример 3.4. Пусть в пятикритериальной задаче ( $m = 5$ ) множество критериев разбито на две группы  $\{f_1, f_2, f_3\}$  и  $\{f_4, f_5\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$  и  $B = \{4, 5\}$  – множество номеров критериев из первой и второй групп. Как можно было бы формализовать, например, сообщение о том, что группа критериев  $\{f_1, f_2, f_3\}$  важнее группы  $\{f_4, f_5\}$  в два раза? Для этого векторную оценку  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  можно расширить до вектора  $(y_1, y_2, y_3, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  и считать, что этот вектор является векторной оценкой в восьмикритериальной задаче, в которой множество критериев разбито на три равноважные группы – первые

две группы состоят из трех критериев, а третья – из двух. Если в исходной задаче имеется информация о важности отдельных критериев, то соответствующее соотношение по важности должно быть перенесено и в восьмикритериальную задачу. Например, если в исходной задаче было известно, что  $1 \succ^{\frac{1}{2}} 3$  и  $2 \succ^3 5$ , то в новой задаче надо принять, что  $1 \succ^{\frac{1}{2}} 3$ ,  $4 \succ^{\frac{1}{2}} 6$ ,  $2 \succ^3 8$  и  $5 \succ^3 8$ .

Обратимся к рассмотрению случая задачи с  $m$  критериями. Пусть  $\{f_i\}_{i \in A}$  и  $\{f_i\}_{i \in B}$  – две непересекающиеся группы критериев. Пусть, далее,  $h = n_a/n_b$ , где  $n_a$  и  $n_b$  – натуральные числа. Расширим векторную оценку  $y = (y_1, \dots, y_m)$  повторением  $n_a - 1$  раз её компонент с номерами из  $A$  (совокупность полученных  $n_a$  групп будем называть клоном группы  $A$ , или, кратко, клоном  $A$ ) и повторением  $n_r - 1$  раз её компонент с номерами из  $B$  (совокупность полученных  $n_b$  групп будем называть клоном группы  $B$ , или, кратко, клоном  $B$ ). Полученную задачу с множеством критериев, соответствующих расширенным указанным путем векторным оценкам, в которой равноважны любые две группы из клона  $A$  и равноважны любые две группы из клона  $B$ , а также сохранены соотношения по важности между отдельными критериями назовем  $(n_a; n_b)$ -задачей. В примере 3.4 мы имели  $(2;1)$ -задачу.

Определение 3.5. Группа критериев  $\{f_i\}_{i \in A}$  важнее группы критериев  $\{f_i\}_{i \in B}$  в  $h = n_a/n_b$  раз (такое сообщение обозначается  $A \succ^h B$ ), если в  $(n_a; n_b)$ -задаче любая группа из клона  $A$  и любая группа из клона  $B$  равноважны.

Получать информацию о степени превосходства в важности  $h$  одной группы критериев над другой можно методами, аналогичными методам, разработанным для отдельных критериев [148, 159], если рассматривать векторные оценки, в каждой из которых все компоненты из одной и той же группы равны между собой.

Пусть множество  $m$  критериев разбито на  $s$  групп. Для простоты записи без ограничения общности (при необходимости критерии можно перенумеровать) будем полагать, что группа  $\{f_i\}_{i \in A_1}$  включает в свой состав первые  $m_1$  критериев, группа  $\{f_i\}_{i \in A_2}$  – следующие  $m_2$  критериев, …, и  $\{f_i\}_{i \in A_s}$  – послед-

ние  $m_s$  критериев, т.е. исходный векторный критерий  $f$  можно представить в таком виде:

$$f = (\underbrace{f_1, \dots, f_{m_1}}_{m_1}, \underbrace{f_{m_1+1}, \dots, f_{m_1+m_2}}_{m_2}, \dots, \underbrace{f_{m_1+\dots+m_{s-1}+1}, \dots, f_m}_{m_s}). \quad (3.12)$$

Предположим, что имеется количественная информация, включающая сведения о соотношении по важности этих групп и позволяющая для каждой пары групп  $\{f_i\}_{i \in A_t}$  и  $\{f_i\}_{i \in A_r}$  установить, в соответствии с определением 3.5, степень превосходства в важности группы  $\{f_i\}_{i \in A_t}$  над группой  $\{f_i\}_{i \in A_r}$ , т.е. что  $A_t \succ^{h_{tr}} A_r$ . Далее, будем считать, что для любых двух критериев  $f_i$  и  $f_j$  из одной и той же группы известно, что  $i \succ^{h_{ij}} j$ . Критерии из разных групп по важности несравнимы. Такую количественную информацию о важности критериев будем обозначать греческой буквой  $T$ . При наличии информации  $T$  возможно построить  $T$ -модель, соответствующую исходной модели, с надлежащим клонированием групп критериев и отдельных критериев, такую, что все группы критериев в ней равноважны, и каждая группа состоит из равноважных критериев. Для этого можно идти либо сверху вниз (вначале строить клоны групп критериев, а затем – клоны отдельных критериев внутри каждой группы), либо снизу вверх (вначале клонировать отдельные критерии в каждой группе, а затем клонировать расширенные указанным образом группы). Поясним сказанное на примере.

Пример 3.5. Пусть в задаче из примера 3.4 дополнительно к информации о степени превосходства первой группы над второй имеется такая информация:  $1 \succ^3 2$ ,  $2 \approx 3$ ;  $4 \succ^{5/2} 5$ , так что

$$T = \{A \succ^2 B; 1 \succ^3 2, 2 \approx 3; 4 \succ^{5/2} 5\}. \quad (3.13)$$

Вначале построим  $T$ -модель, двигаясь сверху вниз. Используя информацию  $A \succ^2 B$ , расширяем векторные оценки  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  до векторов  $(y_1,$

$y_2, y_3, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ ). Затем, клонируя отдельные критерии с использованием информации  $1\succ^3 2, 2\approx 3$  и  $4\succ^{5/2} 5$ , получаем  $T$ -оценки

$$y^T = (y_1, y_1, y_1, y_2, y_3; y_1, y_1, y_1, y_2, y_3; y_4, y_4, y_4, y_4, y_5). \quad (3.14)$$

Теперь построим  $T$ -модель, двигаясь вначале снизу вверх. Клонируем отдельные критерии в каждой из двух групп с использованием информации  $1\succ^3 2, 2\approx 3$  и  $4\succ^{5/2} 5$  и расширяем векторные оценки  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$  до векторов  $(y_1, y_1, y_1, y_2, y_3; y_4, y_4, y_4, y_4, y_5)$ . Затем, клонируя группы с учетом  $A\succ^2 B$ , получаем  $T$ -оценки, определяемые той же формулой (3.14).

В  $T$ -модели, как уже отмечалось, все группы критериев равноважны и все критерии в каждой из них тоже равноважны. Учитывая это, можно, в соответствии с фрагментарным подходом, определить на множестве  $T$ -оценок отношение  $\rho^T$ , которое, в свою очередь, задаст отношение нестрогого предпочтения  $R^T$  на множестве векторных оценок  $Z$ :  $yR^T z \Leftrightarrow y^T \rho^T z^T$ . Однако, если использовать подход, ранее описанный в пункте 3.1.2, то отношение  $R^T$  можно расширить до  $\bar{R}^T$ , построив на основе  $T$ -модели соответствующую ей  $N$ -модель, в которой все критерии равноважны. Эту модель будем называть  $NT$ -моделью. Поясним, как это делается, на примере.

Пример 3.6. Пусть в задаче из примера 3.5 имеется количественная информация о важности критериев и групп критериев (3.13). В соответствующей ей, согласно (3.14),  $T$ -модели имеется три равноважных группы, первые две из которых содержат  $m_1 = m_2 = 5$  равноважных критериев, а третья –  $m_3 = 7$  равноважных критериев. Так как  $\mu = 35$  – наименьшее общее кратное натуральных чисел  $m_1, m_2$ , и  $m_3$  и

$$n_1 = \frac{\mu}{m_1} = 7, n_2 = \frac{\mu}{m_2} = 7, n_3 = \frac{\mu}{m_3} = 5,$$

то искомой является  $NT$ -модель с  $105 = 5 \cdot 7 \cdot 3$  равноважными критериями, которая получается повторением критериев из первой и второй группы по 7

раз, а из третьей – по 5 раз. Например, для  $y = (2, 4, 5, 1, 3)$ , согласно (3.14), получим  $y^T = (2, 2, 2, 4, 5; 2, 2, 2, 4, 5; 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3)$ , и  $NT$ -оценкой будет

$$\begin{aligned} y^{NT} = & (2, 2, 2, 4, 5; 2, 2, 2, 4, 5; 2, 2, 2, 4, 5; 2, 2, 2, 4, 5; 2, 2, 2, 4, 5; \\ & 2, 2, 2, 4, 5; 2, 2, 2, 4, 5; 2, 2, 2, 4, 5; 2, 2, 2, 4, 5; 2, 2, 2, 4, 5; \\ & 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3; 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3; 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3; 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3; 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3). \end{aligned}$$

$NT$ -Оценки после упорядочения их компонент по неубыванию удобно записывать в сокращенном виде, по одному разу указывая числа, являющиеся компонентами исходной векторной оценки, и добавляя к ним в качестве верхнего индекса количество их повторений:  $y_{\uparrow}^{NT} = (1^{25}, 2^{42}, 3^{10}, 4^{14}, 5^{14})$

### 3.1.4 Решающие правила, использующие коэффициенты важности

Поскольку в  $NT$ -модели все критерии равноважны, то для сравнения по предпочтительности двух векторных оценок можно воспользоваться любым решающим правилом, разработанным в ТВК для задач с равноважными критериями. Например, на основе решающих правил (3.3) и (3.4) получаем соответствующие решающие правила для задач с информацией  $T$ :

$$y\bar{R}^T z \Leftrightarrow y_{\uparrow}^{NT} \geq z_{\uparrow}^{NT}. \quad y\bar{R}^T z \Leftrightarrow \sigma(y^{NT}) \geq \sigma(z^{NT}). \quad (3.15)$$

Пример 3.7. Сравним по предпочтительности три векторные оценки в задаче из примера 3.6:

$$y = (2, 4, 5, 1, 3), z = (3, 5, 5, 4, 2), u = (1, 5, 5, 5, 4).$$

Соответствующие им  $NT$ -оценки легко получить, если из примера 3 заметить, что первую компоненту надо повторить 42 раза, вторую и третью – 14 раз, четвертую – 25 раз, пятую – 10 раз, и увидеть, что

$$y_{\uparrow}^{NT} = (1^{25}, 2^{42}, 3^{10}, 4^{14}, 5^{14}), \quad z_{\uparrow}^{NT} = (2^{10}, 3^{42}, 4^{25}, 5^{28}), \quad u_{\uparrow}^{NT} = (1^{42}, 4^{10}, 5^{53}).$$

Нетрудно понять, что  $z_{\uparrow}^{NT} \geq y_{\uparrow}^{NT}$ , и поэтому, согласно первому из решающих правил (3.15), верно  $z \bar{P}^T y$ . Однако неверно ни  $z_{\uparrow}^{NT} \geq u_{\uparrow}^{NT}$ , ни  $u_{\uparrow}^{NT} \geq z_{\uparrow}^{NT}$ , так что векторные оценки  $z$  и  $u$  несравнимы по  $\bar{R}^T$ .

Пусть в рассматриваемом примере  $Z_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Тогда

$$\sigma_1(y^{NT}) = 80, \sigma_2(y^{NT}) = 38, \sigma_3(y^{NT}) = 28, \sigma_4(y^{NT}) = 14;$$

$$\sigma_1(z^{NT}) = 105, \sigma_2(z^{NT}) = 95, \sigma_3(z^{NT}) = 53, \sigma_4(z^{NT}) = 28;$$

$$\sigma_1(u^{NT}) = 63, \sigma_2(u^{NT}) = 63, \sigma_3(u^{NT}) = 63, \sigma_4(u^{NT}) = 53.$$

Поскольку верны неравенства

$$\sigma_1(z^{NT}) > \sigma_1(y^{NT}), \sigma_2(z^{NT}) > \sigma_2(y^{NT}), \sigma_3(z^{NT}) > \sigma_3(y^{NT}), \sigma_4(z^{NT}) > \sigma_4(y^{NT}),$$

то, по второму из решающих правил (3.15), верно  $z \bar{P}^T y$ .

Для векторных оценок  $u$  и  $z$  имеем:

$$\sigma_1(u^{NT}) < \sigma_1(z^{NT}), \sigma_2(u^{NT}) < \sigma_2(z^{NT}), \sigma_3(u^{NT}) > \sigma_3(z^{NT}), \sigma_4(u^{NT}) > \sigma_4(z^{NT}),$$

так что неверно ни  $z \bar{R}^T u$ , ни  $u \bar{R}^T z$ .

Описанный выше подход к построению решающих правил был основан на поэтапном построении  $NT$ -модели. Это было необходимо для теоретического обоснования введения определения отношения  $\bar{R}^T$ . Однако существует и более простой путь к построению  $\bar{R}^T$ .

Введем в рассмотрение *множественные*, или *групповые коэффициенты важности*  $\alpha_{\{t\}}$  – положительные в сумме равные 1 числа, приписываемые группам критериев  $A_t$  и удовлетворяющие неравенствам:  $\alpha_{\{t\}} / \alpha_{\{r\}} = h_{tr}$ ,  $t, r = 1, \dots, s$ . Все эти коэффициенты информацией  $T$  определяются однозначно. Пусть  $\alpha_1^t, \dots, \alpha_{m_t}^t$  – коэффициенты важности частных критериев из группы  $A_t$ . Под *итоговыми* коэффициентами важности частных критериев  $f_i$  будем понимать положительные числа  $\alpha^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , рассчитанные принятым для ие-

архических структур способом с использованием коэффициентов важности критериев  $\alpha_i$  в группах: если критерий  $f_i$  входит в группу  $\{f_i\}_{i \in A_t}$ , то  $\alpha^i = \alpha_{\{t\}} \cdot \alpha_i$ . Коэффициенты  $\alpha^i$  позволяют упростить построение  $NT$ -модели, а также ввести решающее правило, основанное на правиле (3.7).

Пусть все коэффициенты важности  $\alpha^i$  – правильные дроби:  $\alpha^i = n'_i/n''_i$ , где  $n'_i$  и  $n''_i$  – взаимно простые числа и  $n'_i < n''_i$ . Пусть, далее, эти дроби приведены к общему знаменателю  $c$ . Тогда, как нетрудно проверить, подходящей будет  $NT$ -модель с  $N = (n_1, \dots, n_m)$ , где  $n_i$  – числитель дроби  $\alpha^i$  после приведения ее к общему знаменателю  $c$ . При этом размерность  $NT$ -оценок будет равна  $c$ .

Пример 3.8. В задаче из примера 3.6 для информации (3.13) имеем:

$$\alpha_{\{1\}} = \frac{1}{3}, \alpha_{\{2\}} = \frac{1}{3}; \quad \alpha_1^1 = \frac{3}{5}, \alpha_2^1 = \alpha_3^1 = \frac{1}{5}; \quad \alpha_1^2 = \frac{5}{7}, \alpha_2^2 = \frac{2}{7}.$$

Поэтому  $\alpha^1 = \frac{1}{5}$ ,  $\alpha^2 = \alpha^3 = \frac{1}{15}$ ,  $\alpha^4 = \frac{5}{21}$ ,  $\alpha^5 = \frac{2}{21}$ . Наименьшее общее кратное  $c$  чисел 5 и 21 равно 105. Последние дроби после приведения к общему знаменателю приобретают такой вид:

$$\alpha^1 = \frac{21}{105}, \alpha^2 = \alpha^3 = \frac{14}{105}, \alpha^4 = \frac{25}{105}, \alpha^5 = \frac{10}{105}. \quad (3.16)$$

Поэтому  $N$  для  $NT$ -модели есть вектор  $(42, 14, 14, 25, 10)$ , а размерность  $NT$ -оценок равна 105. Ранее это было выяснено другим путем.

Равносильность двух рассмотренных путей построения  $NT$ -моделей позволяет использовать решающее правило (3.7), так как оно было обосновано именно при помощи  $N$ -модели [158, 159]. Применительно к задачам с информацией о важности критериев  $T$  его можно представить следующим образом:

$$y \bar{R}^T z \Leftrightarrow \alpha^*(y) \geq \alpha^*(z), \quad (3.17)$$

где:

$$\alpha^*(y) = (\alpha_1^*(y), \dots, \alpha_{g-1}^*(y)); \quad \alpha_k^*(y) = \alpha_{1k}^*(y) + \dots + \alpha_{mk}^*(y), \quad k = 1, \dots, g-1;$$

$$\alpha_{ik}^*(y) = \begin{cases} \alpha^i, & y_i > w_k, \\ 0, & y_i \leq w_k, \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, g-1. \quad (3.18)$$

Продемонстрируем «работу» решающего правила (3.18) на примере.

Пример 3.9. Сравним по предпочтительности три векторные оценки в задаче из примера 3.4, полагая, что  $Z_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , и используя коэффициенты важности, рассчитанные в примере 3.8 (см. (5.2)). Значения коэффициентов, рассчитанные согласно (3.18), приведены в Таблице 3.1. Поскольку для пары векторных оценок  $z$ ,  $y$  имеем строгие неравенства  $\frac{105}{105} > \frac{80}{105}$ ,  $\frac{95}{105} > \frac{38}{105}$ ,  $\frac{53}{105} > \frac{28}{105}$ ,  $\frac{28}{105} > \frac{14}{105}$ , так что верно  $\alpha^*(z) \geq \alpha^*(y)$ , то решающее правило (3.17) устанавливает, что верно  $z\bar{P}^T y$ .

Таблица 3.1 – Значения коэффициентов  $\alpha_{ik}^*(\cdot)$  и  $\alpha_k^*(\cdot)$

		$\alpha_{ik}^*(y)$				$\alpha_{ik}^*(z)$				$\alpha_{ik}^*(u)$			
$\begin{array}{c} k \\ \backslash \\ i \end{array}$		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1		$\frac{42}{105}$	0	0	0	$\frac{42}{105}$	$\frac{42}{105}$	0	0	0	0	0	0
2		$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	0	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$
3		$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{14}{105}$
4		0	0	0	0	$\frac{25}{105}$	$\frac{25}{105}$	$\frac{25}{105}$	0	$\frac{25}{105}$	$\frac{25}{105}$	$\frac{25}{105}$	$\frac{25}{105}$
5		$\frac{10}{105}$	$\frac{10}{105}$	0	0	$\frac{10}{105}$	0	0	0	$\frac{10}{105}$	$\frac{10}{105}$	$\frac{10}{105}$	0
$\alpha_k^*(\cdot)$		$\frac{80}{105}$	$\frac{38}{105}$	$\frac{28}{105}$	$\frac{14}{105}$	$\frac{105}{105}$	$\frac{95}{105}$	$\frac{53}{105}$	$\frac{28}{105}$	$\frac{63}{105}$	$\frac{63}{105}$	$\frac{63}{105}$	$\frac{53}{105}$

Поскольку для пары векторных оценок  $z$ ,  $u$  имеем неравенства и равенства  $\frac{105}{105} > \frac{63}{105}$ ,  $\frac{95}{105} > \frac{63}{105}$ ,  $\frac{53}{105} = \frac{53}{105}$ ,  $\frac{28}{105} < \frac{43}{105}$ , среди которых есть «разнонаправленные» строгие неравенства, то неверно ни  $\alpha^*(z) \geq \alpha^*(u)$ , ни  $\alpha^*(u) \geq \alpha^*(z)$ . Поэтому, согласно (3.17), неверно ни  $z\bar{R}^T u$ , ни  $u\bar{R}^T z$ .

Выше предложены решающие правила для  $T$ -информации о важности критериев с порядковой шкалой. Аналогично можно ввести решающие правила для  $L$ -информации о важности критериев с лингвистической шкалой.

вила и для случая критериев со шкалой первой порядковой метрики, используя разработанные в ТВК соответствующие решающие правила для количественной информации о важности отдельных критериев [155, 156].

### 3.1.5 Аналитическое решающее правило для случая нестрогого упорядочения по важности критериев с порядковой шкалой

Обозначим через  $a_{\downarrow} = (a_{[1]}, \dots, a_{[n]})$  вектор, образованный из вектора  $a = (a_1, \dots, a_n)$  упорядочением его компонент по невозрастанию:  $a_{[1]} \geq \dots \geq a_{[n]}$ . Под  $a^{[1,j]}$  будем понимать вектор, составленный из первых  $j$  компонент вектора  $a$ , т.е.  $a^{[1,j]} = (a_1, \dots, a_j)$ . Запись  $a_{\downarrow}^{[1,r]}$  будет обозначать вектор, полученный из вектора  $a^{[1,r]}$  упорядочением его компонент по невозрастанию. Например, если  $a = (3, 4, 1)$ , то  $a^{[1,2]} = (3, 4)$  и  $a_{\downarrow}^{[1,2]} = (4, 3)$ .

Теорема 3.3. Для критериев с порядковой шкалой справедливо решающее правило:

$$yR^{\Omega}z \Leftrightarrow (y_{\downarrow}^{[1,r]} \geqq z_{\downarrow}^{[1,r]}, r = i_1, \dots, i_{\rho}); \quad (3.19)$$

при этом если в (3.19) все нестрогие неравенства  $\geqq$  выполняются как равенства, то верно  $yI^{\Omega}z$ , а если  $\geqq$  выполняется как  $\geq$ , то верно  $yP^{\Omega}z$ .

Доказательство основано на том, что векторное неравенство  $y_{\downarrow}^{[1,r]} \geqq z_{\downarrow}^{[1,r]}$  верно тогда и только тогда, когда верны неравенства из теоремы 3.1:  $n_{kr}(y^{[1,r]}) \geqq n_{kr}(z^{[1,r]})$ ,  $k = 1, \dots, q - 1$  (см. [152]).

Примечание 3.1. Если все критерии равноважны, то решающее правило (3.19) сводится к требованию выполнения одного векторного неравенства  $y_{\downarrow} \geqq z_{\downarrow}$ . Это решающее правило было предложено и обосновано в [151].

Для иллюстрации «работы» решающего правила (3.19) рассмотрим

Пример 3.10. В задаче выбора материала, рассмотренной в [160], характеристики материалов в трехбалльной шкале были представлены Таблицей 3.2. Авторы приняли, что шкала критериев является количественной и ис-

пользовали аддитивную функцию ценности  $v(x) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i f_i(x)$ . Кроме того, полагалось, что критерии строго упорядочены по важности так, что  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 (> 0)$ . Используя уточненный метода из [154], они получили частичное упорядочение материалов (вариантов), представленное на рисунке 3.1.

Мы примем более слабое и потому более реалистичное допущение, что шкала критериев лишь порядковая. Оказывается, что при помощи решающего правила (3.19) для той же качественной информации о важности  $\Omega = \{1 \succ 2 \succ 3 \succ 4\}$  можно получить то же самое частичное упорядочение материалов.

Таблица 3.2 – Характеристики материалов

Варианты (материалы)	$f_1$ (strength)	$f_2$ (creep characteristics)	$f_3$ (thermal expansion)	$f_4$ ( $E_h$ stability)
<i>Igneous and Metamorphic Rocks</i>				
<i>Minerals</i>				
$x^1$ (Basalt)	3	3	2	2
$x^2$ (Granite)	3	3	2	2
$x^3$ (Slate)	2	3	2	3
<i>Native Elements</i>				
$x^4$ (Quartz)	3	3	2	3
$x^5$ (Gold)	3	1	1	3
$x^6$ (Silver)	3	1	1	2
$x^7$ (Platinum)	3	1	1	3
$x^8$ (copper)	3	1	1	2
<i>Processed Metals</i>				
$x^9$ (Lead)	2	1	1	2
$x^{10}$ (Metal alloys)	3	1	1	2
<i>Ceramics</i>				
$x^{11}$ (Mullite)	3	3	2	3
$x^{12}$ (Steatite)	3	3	2	3
$x^{13}$ Concretes	2	3	2	3

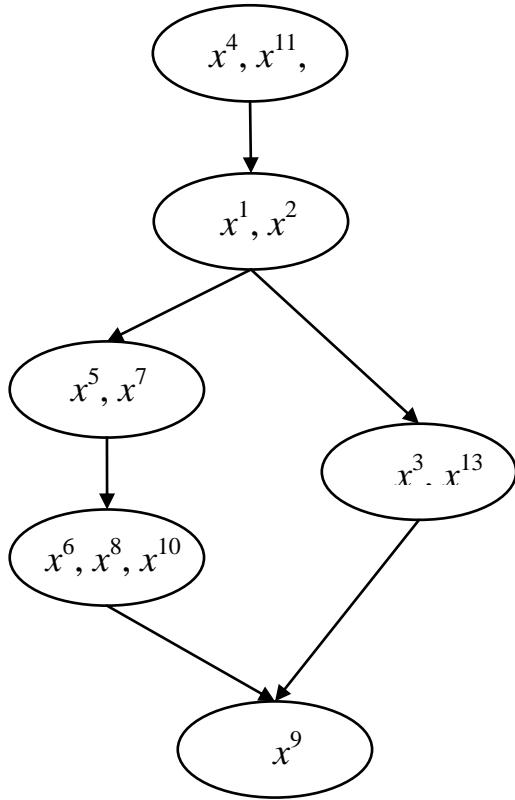


Рисунок 3.1 – Частичное упорядочение материалов по предпочтительности

Действительно, например, для вариантов  $x^1$  и  $x^5$ , полагая  $y = f(x^1)$  и  $z = f(x^5)$ , имеем:

$$y_{[1]}^1 \geq z_{[1]}^1, \text{ т.к. } 3 = 3; \quad y_{[1]}^2 \geq z_{[1]}^2, \quad y_{[2]}^2 \geq z_{[2]}^2, \text{ т.к. } 3 = 3, 3 > 1;$$

$$y_{[1]}^3 \geq z_{[1]}^3, \quad y_{[2]}^3 \geq z_{[2]}^3, \quad y_{[3]}^3 \geq z_{[3]}^3, \text{ т.к. } 3 = 3, 3 > 1, 2 > 1;$$

$$y_{[1]}^4 \geq z_{[1]}^4, \quad y_{[2]}^4 \geq z_{[2]}^4, \quad y_{[3]}^4 \geq z_{[3]}^4, \quad y_{[4]}^4 \geq z_{[4]}^4, \text{ т.к. } 3 = 3, 3 = 3, 2 > 1, 2 > 1.$$

Следовательно, верно  $x^1 P_\Omega x^5$ .

### 3.1.6 Некоторые выводы

В отчете введено определение превосходства в важности в  $h$  раз одной группы критериев над другой и представлены решающие правила для количественной и специальных видов качественной информации о группах кри-

териев. Эти результаты являются базовыми для развития теории важности критериев для задач с иерархической структурой [161].

Предложено новое аналитическое правило для многокритериальных задач, в которых критерии с порядковой шкалой нестрого упорядочены по важности. Это правило является простым и свободно от ошибок округления. Оно переносится и на задачи принятия решений в условиях риска, когда функция полезности неизвестна, а вероятности состояний природы нестрого ранжированы по величине.

Разработанные решающие правила целесообразно реализовать в системах поддержки принятия многокритериальных решений, основанных на подходах теории важности критериев.

Поставленные перед началом исследований задачи выполнены полностью.

Результаты проведенных исследований нашли отражение в [162, 163, 164, 161].

### 3.2 Построение и применение теоретических моделей для расчета степени манипулируемости правил агрегирования предпочтений

Во многих современных системах управления, в функции которых входит согласование работы различных подсистем, встречается задача агрегирования. Ее частные формулировки могут быть разнообразны, а под элементами системы могут подразумеваться как частные лица, организации, так и некоторые модули компьютерной программы. Тем не менее, все ситуации, в которых на основе множества индивидуальных предпочтений требуется построить некоторое коллективное ранжирование или определить выбор из множества альтернатив, могут быть описаны в терминах голосований, а методы решения подобных задач – различные правила коллективного выбора.

На сегодняшний день существует множество процедур, однако у каждого метода есть свои недостатки. В частности, процедура может быть подвержена манипулированию со стороны избирателей, т.е. избиратели, действуя

стратегически, могут намеренно исказить свои предпочтения с целью добиться более выгодного для них результата голосования.

Рассмотрим такой пример манипулирования: пусть два избирателя считают наилучшим кандидата  $a$ , еще два избирателя – кандидата  $b$ , и один избиратель – кандидата  $c$ . Применяется процедура относительного большинства, и при таких предпочтениях выигрывают кандидаты  $a$  и  $b$ . Однако для последнего избирателя кандидат  $b$  лучше кандидата  $a$  ( $c$  на первом месте,  $b$  на втором и  $a$  на третьем), и он голосует за кандидата  $b$ , а не за  $c$ , чтобы выиграл только кандидат  $b$ .

Первый теоретический результат, с которого началось изучение манипулируемости правил голосования с помощью математического моделирования, был получен в [165, 166]. Доказанная авторами теорема утверждает, что любая недиктаторская процедура, в которой участвуют хотя бы три кандидата, является манипулируемой. При этом достаточно уже одного исхода, при котором какому-либо избирателю (или коалиции избирателей) было бы выгодно исказить свои предпочтения, чтобы правило коллективного выбора было подвержено манипулированию. Один из подходов к решению этой задачи – вероятностный, – рассматривает степень манипулируемости как вероятность возникновения такой ситуации, при которой возможно манипулирование [89, 167].

### 3.2.1 Коалиционная манипулируемость для Impartial Culture

В данном разделе будет рассмотрена задача оценки степени коалиционной манипулируемости правил коллективного выбора для конечного числа избирателей. Применяет вероятностный подход – подсчет доли манипулируемых профилей предпочтений в общем количестве всех возможных профилей, предложенный впервые в [168, 169]. Будем называть профиль манипулируемым, если в нем манипулирование может произвести хотя бы одна коалиция.

Помимо индекса Нитцана-Келли для оценки манипулируемости правил коллективного выбора используется несколько индексов:

Индекс  $I_1$ , который представляет собой свободу манипулирования. Он равен доле профилей, в которых посредством предъявления неискренних предпочтений коалиции могут улучшить выбор. При этом также подсчитывается доля профилей, в которых возможно ухудшение выбора и в которых манипулирование не приведет к изменениям. Индексы  $I_2$  и  $I_3$  оценивают эффективность манипулирования, т.е. на какое число позиций в предпочтениях участника голосования можно продвинуть желаемый выбор, в среднем ( $I_1$ ) или максимально ( $I_3$ ).

В работе рассчитана степень коалиционной манипулируемости для 3 альтернатив и для количества участников голосования от 3 до 100. В нашей работе коалиционная манипулируемость рассматривается в рамках модели Impartial Culture.

### 3.2.1.1 Описание модели

В случае коалиционного манипулирования вводятся две дополнительные предпосылки по сравнению с одиночным манипулированием:

- агенты, входящие в коалицию, имеют одинаковые предпочтения;
- агенты, входящие в коалицию, во время голосования предъявляют одинаковые неискренние предпочтения.

Для оценки степени манипулируемости правила коллективного выбора использовался индекс Нитцана-Келли:

$$NK_k = \frac{d_k}{(m!)^n},$$

где  $d_k$  – количество профилей, в которых могут манипулировать коалиции из не более, чем  $k$  агентов. Если  $k=1$ , получается одиночное манипулирование и стандартный индекс Ницана-Келли. Очевидно, что рассматриваемый ин-

декс не убывает при увеличении  $k$ . Если  $k = n$ , то подсчитывается количество профилей, манипулируемых хотя бы одной коалицией без ограничений на ее размер. Такой индекс, как наиболее общий, и будет приведен в качестве оценки степени манипулируемости правил коллективного выбора.

Кроме того, рассматриваются I-индексы коалиционной манипулируемости.

Индекс  $I_1$  представляет собой три индекса – это доли профилей, в которых агенты в результате предъявления неискренних предпочтений получают либо лучше для себя результат (индекс  $I_1^+$ ), либо хуже (индекс  $I_1^-$ ), либо же результат голосования для них остается на том же уровне предпочтительности (индекс  $I_1^0$ ):

$$I_1 = \frac{\sum_{j=1}^{(m!)^n} \sum_{i=1}^n k_i}{(m!)^n \cdot n \cdot (m!-1)}.$$

Здесь  $k_i$  – либо  $k_i^+$ : улучшение результата,  $k_i^-$  – ухудшение результата,  $k_i^0$  – результат без изменения.

Индекс  $I_2$  оценивает средний выигрыш в количестве позиций на которое переместился желаемый в результате манипулирования выбор. Среднее здесь берется среди всех манипулирований, по которым было улучшение выбора с точки зрения манипулирующей коалиции:

$$I_2 = \frac{\sum_{j=1}^{(m!)^n} \sum_{i=1}^n Z_i}{(m!)^n \cdot n}.$$

Индекс  $I_3$  оценивает, максимальный выигрыш в терминах числа позиций, т.е. в отличие от индекса  $I_2$ , в индексе  $I_3$  берется не средний выигрыш в количестве позиций, а максимальный:

$$I_3 = \frac{\sum_{j=1}^{(m!)^n} \sum_{i=1}^n Z_{ij}^{\max}}{(m!)^n \cdot n}.$$

### 3.2.1.2 Схема компьютерного моделирования

Для расчета степени коалиционной манипулируемости правила коллективного выбора применялся следующий алгоритм:

- 1) генерировался 1 миллион профилей;
- 2) для каждого профиля перебирались все возможные ограничения на размер коалиции (от 1 до количества участников голосования минус один);
- 3) для каждого профиля и для каждого ограничения на размер коалиции рассматривались все возможные коалиции, которые не нарушали описанные выше условия, а также удовлетворяли ограничению на размер коалиции;
- 4) для каждой возможной коалиции рассматривались все возможные неискренние предпочтения с целью определения, возможно ли манипулирование;
- 5) если для профиля существует хотя бы одна коалиция, которая могла привести манипулирование, то профиль считался манипулируемым;
- 6) после определения манипулируемых профилей по всему массиву из 1 миллиона сгенерированных профилей высчитывался индекс Нитцана-Келли.

### 3.2.1.3 Правила коллективного выбора

Расчеты проведены для следующих правил коллективного выбора:

- правило одобряющего голосования для  $q=2$  (Approval  $q=2$ );
- обратное правило относительного большинства (Inverse Plurality);
- правило Борда (Borda);
- правило Блэка (Black);
- правило Копланда I (Copeland I);
- правило Копланда II (Copeland II);
- правило Копланда III (Copeland III);

- правило Симпсона (Simpson);
- правило минимакса (MinMax);
- сильное q-Парето правило простого большинства (Strong q-Paretian simple majority);
- сильное q-Парето правило относительного большинства (Strong q-Paretian plurality);
- сильнейшее q-Парето правило простого большинства (Strongest q-Paretian simple majority);
- правило Нансона (Nanson);
- обратное правило Борда (Inverse Borda);
- процедура Хара (Hare).

Для каждого из перечисленных правил вычислялись индексы коалиционной манипулируемости, описанные выше.

#### 3.2.1.4 Результаты компьютерного моделирования

В рассмотренных случаях с количеством альтернатив равным трем и количеством участников голосования от 3 до 100 были получены различные результаты для различных ограничений на размер коалиции:

- можно выделить два правила коллективного выбора, которые показывают наилучшие результаты: правило Нансона и процедура Хара;
- с увеличением ограничения на размер коалиции индекс Нитцана-Келли растет;
- случай с ограничением на размер коалиции равным единице, как и ожидалось, полностью совпал с расчетами предыдущих работ по данной теме в области одиночного манипулирования;
- в большинстве случаев у индекса Нитцана-Келли наблюдается пик значения между 20 и 50 участниками голосования, после чего значение индекса начинает убывать.

Индексы коалиционной манипулируемости для Impartial Culture для некоторых правил коллективного выбора при большом ограничении на размер коалиции могут достигать значений 0.8 – 0.9, что соответствует ситуации, когда 80-90% профилей в голосовании являются манипулируемыми.

### 3.2.2 Доля манипулируемых профилей, когда число избирателей стремится к бесконечности

#### 3.2.2.1 Постановка задачи

При подсчете коалиционной манипулируемости часто ставится задача о нахождении доли манипулируемых профилей, когда число избирателей достаточно велико (стремится к бесконечности). В то время как индивидуальное манипулирование при таком условии становится невозможным, анализ спектра поведенческих моделей (высказываний предпочтений) коалиций представляется интересным. Придуманная Доnalдом Саари [170] геометрическая модель итогов голосований также становится более естественной и удобной: вместо подсчета числа целых точек в многогранниках, отвечающих манипулируемым профилям, мы считаем их объемы, а случаи, когда несколько кандидатов набирают одинаковое число голосов почти не встречаются (выражаясь математическим языком, имеют нулевую меру) и, тем самым, не требуют отдельного рассмотрения. В поставленной задаче можно выделить две основные трудности: научиться систематически выписывать системы линейных уравнений и неравенств, которым удовлетворяют манипулируемые профили и считать объем многогранника, заданного соответствующими уравнениями и неравенствами. В работе [171] описан метод, решающий первую задачу для позиционных правил с весами. Наиболее известным примером такого правила является правила Борда. Для выборов с  $n$  избирателями и  $m$  альтернативами  $A_1, A_2, \dots, A_m$  подсчет голосов происходит таким образом, что кандидату, находящемуся на  $i$ -том месте в предпочтениях избирателя присуждается  $m-i$  баллов. Далее, баллы суммируются по множе-

ству избирателей. С помощью вышеупомянутого метода получена соответствующая система неравенств для правила Борда и 4 альтернатив, а также более простые системы для некоторых других правил (для правил plurality и anti-plurality для трех альтернатив такие системы приведены ниже), доля манипулируемых профилей для которых уже была вычислена. Соответствующие результаты ( доли манипулируемых профилей) согласуются с результатами, полученными в [172].

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \\ p_1 + p_2 - p_3 - p_4 > 0, \text{ A beats B,} \\ p_3 + p_4 - p_5 - p_6 > 0, \text{ B beats C,} \\ -p_1 - p_2 + p_4 + p_5 + p_6 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \\ p_1 + p_2 - p_3 - p_4 > 0, \text{ A beats B,} \\ p_3 + p_4 - p_5 - p_6 > 0, \text{ B beats C,} \\ -p_1 - p_2 + p_3 + p_4 + p_6 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \\ p_2 - p_4 + p_5 - p_6 > 0, \text{ A beats B,} \\ p_1 + p_3 - p_2 - p_5 > 0, \text{ B beats C,} \\ -p_2 + p_3 + p_4 - p_5 + p_6 > 0, \\ p_1 - 2p_2 + p_3 + p_4 - 2p_5 + p_6 > 0. \end{cases}$$

Первые две системы неравенств отвечают за манипулируемость при подсчете голосов для plurality voting rule, а третья – при anti-plurality. Проиллюстрируем работу алгоритма на примере систем неравенств, отвечающих манипулируемости правила простого большинства (plurality voting rule). Первые три неравенства обеих систем отвечают за то, что нормированная сумма избирателей проголосовавших каждым из ( $3!=6$ ) возможных способов равна 1, и при истинных предпочтениях избирателей Кандидат 1 занимал первое место, Кандидат 2 – второе, Кандидат 3 – третье (затем полученный результат умножается на 6, т.к. перестановки кандидатов разбивают симплекс, точки которого отвечают всевозможным профилям на 6 симметричных областей), соответственно. Последние неравенства показывают, возможно ли успешное манипулирование коалиций, составленных из избирателей предпочитающих видеть победителем Кандидата 3, а не Кандидата 1 и Кандидата 2, а не Кандидата 1, соответственно. В первом случае в такую коалицию входят

агенты с предпочтениями (3,1,2), (3,2,1) и (2,3,1). В то время как профили (3,1,2) и (3,2,1) уже добавляют максимальное число баллов третьему кандидату (1) и минимальное остальным (0), профили (2,3,1) целесообразно изменить на те, в которых Кандидат 3 занимает первую позицию. Если при таких предпочтениях Кандидат № набирает большее число баллов, чем Кандидат 1, профиль манипулируем данной коалицией, в противном случае – нет. Последнее неравенство второй системы получено аналогично.

Еще одним направлением работы является анализ формирований коалиций, введения различных ограничений на состав участников коалиции. В [171] рассматривается такое ограничение, при котором в одну коалицию могут входить только избиратели с одинаковым наиболее предпочитаемым кандидатом (первым кандидатом в их предпочтениях), соответствующие профили называются «manipulable with respect to restricted coalitions» (MRC). Также возможны ограничения на «итог манипулирования». Коалиция всегда определяется некоторым кандидатом, в некотором смысле объединяющим ее участников: все они предпочитают (или индифферентны), чтобы он был победителем выборов, а не тот кандидат, который им на самом деле является. Одним из возможных ограничений на итог манипулирования является условие, что объединяющий коалицию кандидат обязан оказаться именно на первом месте при искажении предпочтений членов коалиции.

### 3.2.2.2 Полученные результаты

В [39] вычислена процентная доля MRC профилей для правила простого большинства, правила Борда и еще двух правил, приведенных в Таблице 3.3 (для трех альтернатив, первая строка).

Таблица 3.3 – Манипулируемость правил коллективного выбора

	Правило простого большинства	Обратное правило простого большинства	Правило Борда	Правило Кумбса
SM	0%	51,9%	30,6%	41,9%
MRC	29,2%	51,9%	38%	43,4%

Ниже также приведены системы неравенств, определяющие манипулируемость профиля для правила Борда в условии четырех альтернатив:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{24} p_i = 1 \\ 3 \sum_{i=1}^6 p_i + 2(p_7 + p_8 + p_{13} + p_{14} + p_{19} + p_{20}) - 3 \sum_{i=7}^{12} p_i + \\ +(p_9 + p_{11} + p_{15} + p_{17} + p_{21} + p_{23}) - 2(p_1 + p_2 + p_{15} + p_{16} + p_{21} + p_{22}) - \\ -(p_3 + p_5 + p_{13} + p_{18} + p_{19} + p_{24}) > 0, \\ 3 \sum_{i=7}^{12} p_i + 2(p_1 + p_2 + p_{15} + p_{16} + p_{21} + p_{22}) - 3 \sum_{i=13}^{18} p_i + \\ +(p_3 + p_5 + p_{13} + p_{18} + p_{19} + p_{24}) - 2(p_3 + p_4 + p_9 + p_{10} + p_{23} + p_{24}) - \\ -(p_1 + p_6 + p_7 + p_{12} + p_{20} + p_{22}) > 0, \\ 3 \sum_{i=1}^6 p_i + 2(p_3 + p_4 + p_9 + p_{10} + p_{23} + p_{24}) - 3 \sum_{i=19}^{24} p_i + \\ +(p_1 + p_6 + p_7 + p_{12} + p_{20} + p_{22}) - 2(p_5 + p_6 + p_{11} + p_{12} + p_{17} + p_{18}) - \\ -(p_2 + p_4 + p_8 + p_{10} + p_{14} + p_{16}) > 0. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} 3 \left( \sum_{i=7}^{12} p_i + p_{15} + p_{16} + p_{18} + p_{21} + p_{22} + p_{24} \right) + 2(p_1 + p_2) + \\ +(p_3 + p_5 + p_{13} + p_{19}) - 3 \sum_{i=1}^6 p_i - 2(p_{13} + p_{14} + p_{19} + p_{20}) - \\ -(p_{17} + p_{23}) > 0, \\ d(B, A) > 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{
\begin{aligned}
& \left. \left( 3 \left( \sum_{i=7}^{12} p_i + p_9 + p_{10} + p_{12} + p_{22} + p_{23} + p_{24} \right) + 2(p_3 + p_4) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +(p_1 + p_6 + p_7 + p_{20}) - 3 \sum_{i=1}^6 p_i - 2(p_7 + p_{18} + p_{19} + p_{20}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -(p_{11} + p_{21}) > 0, d(C, A) > 0, \right. \right. \\
& \left. \left. 3 \left( \sum_{i=13}^{18} p_i + p_9 + p_{10} + p_{12} + p_{22} + p_{23} + p_{24} \right) + 2(p_3 + p_4) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +(p_1 + p_6 + p_7 + p_{20}) - 3 \sum_{i=7}^{12} p_i - 2(p_1 + p_2 + p_{21}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -(p_3 + p_5 + p_{19}) > 0, d(C, B) > 0. \right. \right. \\
\\
& \left. \left. 3 \left( \sum_{i=19}^{24} p_i + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{16} + p_{17} + p_{18} \right) + 2(p_5 + p_6) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +(p_2 + p_4 + p_8 + p_{14}) - 3 \sum_{i=1}^6 p_i - 2(p_7 + p_8 + p_{13} + p_{14}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -(p_9 + p_{15}) > 0, d(D, A) > 0, \right. \right. \\
& \left. \left. 3 \left( \sum_{i=19}^{24} p_i + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{16} + p_{17} + p_{18} \right) + 2(p_5 + p_6) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +(p_2 + p_4 + p_8 + p_{14}) - 3 \sum_{i=7}^{12} p_i - 2(p_1 + p_2 + p_{15}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -(p_3 + p_5 + p_{13}) > 0, d(D, B) > 0, \right. \right. \\
& \left. \left. 3 \left( \sum_{i=19}^{24} p_i + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{16} + p_{17} + p_{18} \right) + 2(p_5 + p_6) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +(p_2 + p_4 + p_8 + p_{14}) - 3 \sum_{i=13}^{18} p_i - 2(p_3 + p_4 + p_9) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. -(p_1 + p_6 + p_7) > 0, d(D, C) > 0. \right. \right. 
\end{aligned}
\right.$$

### 3.2.2.3 Возможные направления будущих исследований

Рассмотренный в предыдущем разделе индекс Нитцана-Келли для коалиционного манипулирования ( $NK_k$ ) возможно обобщить и на случай с бесконечно большим числом избирателей. В предположении, что число избирателей стремится к бесконечности, естественным обобщением ограничения на

размер коалиции является установление максимальной доли участников, которые могут входить в состав одной коалиции. В случае позиционных правил (а также Coombs' rule) метод, описанный в [171], позволяет вычислить соответствующие индексы, которые, в свою очередь, сделают возможным анализ того, каким образом влияет количество участников на ее способность манипулировать голосование.

### 3.2.3 Сложность манипулирования

Рассмотрим другой подход к определению степени манипулируемости – сложностный. В [173] был впервые поставлен следующий вопрос: пусть многие правила допускают возможность стратегического поведения, но насколько трудоемка эта задача? Предположим, что две процедуры манипулируемы в одинаковом числе случаев. Однако для того, чтобы выбрать стратегию для манипулирования в первой процедуре, нужно составить бюллетень по определенному правилу. А для другой нужно осуществить перебор всех возможных вариантов расстановки кандидатов в бюллетене, потому что абсолютно неизвестно, как тот или иной вариант повлияет на результат голосования. Действительно, мы больше не можем считать эти две процедуры в равной степени манипулируемыми. А на вопрос о трудоемкости задачи может ответить теория вычислительной сложности.

Так, правила голосования, для манипулирования которых существует полиномиальный алгоритм поиска стратегии, стали считать легко манипулируемыми. А те правила, где поиск манипулирующей стратегии принадлежит классу NP-полных задач – трудно манипулируемыми. Дальнейшее развитие этого направления заключалось в определении класса сложности для правил голосования при различной постановке задачи манипулирования. Перечислим эти постановки задачи.

1. Индивидуальное манипулирование или коалиционное? Индивидуальное манипулирование осуществляется одним агентом, который решает, какое предпочтение следует заявить процедуре, чтобы тем самым изменить исход

голосования в лучшую для него сторону. При коалиционном манипулировании аналогично действует группа (коалиция) из нескольких агентов.

2. Конструктивное или деструктивное манипулирование? Здесь следует определить, что является целью манипулирования. При конструктивном манипулировании цель – это добиться победы любимого кандидата. Деструктивное манипулирование направлено на то, чтобы избежать победы определенного кандидата.

3. Полная или неполная информация? Манипулирование результатом голосования имеет смысл только в том случае, когда избирателю заранее известно хотя бы что-то о предпочтениях других избирателей. И чем большим объемом информации он располагает, тем легче рассчитать то, как следует ему проголосовать. Предположение о наличии полной информации является, конечно, достаточно сильным. Однако если при наличии полной информации манипулирование достаточно сложно, то неполная информация может только усложнить задачу.

4. Одинаковый ли вес имеют голоса избирателей? Хотя равноправие избирателей на выборах является желательным свойством процедуры голосования, на практике довольно часто встречаются ситуации, когда вес голосов избирателей неодинаков, например, если один избиратель представляет на голосовании интересы некоторой группы людей. Другой случай – голосование среди владельцев акций некоторой компании, где вес голоса акционера пропорционален доле принадлежащих ему акций.

5. Ограничено ли множество кандидатов? Основополагающие результаты в области вычислительной сложности манипулирования получены в предположении, что множество кандидатов, как и множество избирателей, может быть неограниченно большим. Однако, как впервые показано в [174], при индивидуальном манипулировании без весов сложность экспоненциальна только по числу кандидатов и полиномиальна по числу избирателей. Поэтому достаточно ограничить множество кандидатов некоторой константой, чтобы задача поиска стратегии манипулирования решалась за полиномиаль-

ное время. Такая предпосылка не лишена и практической значимости. Действительно, в ситуациях, когда избирателям настолько важно, кто будет победителем голосования, что манипулирование имеет смысл, число кандидатов совсем небольшое. Если же множество кандидатов велико, то избирателям сложнее различать между ними, и поэтому нет большого стимула рассчитывать стратегию манипулирования.

Рассмотрим все эти аспекты по основным публикациям с целью определить границы уже исследованной области.

### 3.2.3.1 Модель коллективного выбора

Пусть  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество избирателей. Каждый избиратель имеет предпочтения на множестве альтернатив  $A$ , имеющем мощность  $m$ . Предпочтения избирателя  $i$  представлены в виде линейного порядка  $P_i \in L$  – бинарного отношения, обладающего свойствами: ацикличности ( $\neg \exists t \geq 1$  такого, что  $a_1 P_i a_2, a_2 P_i a_3, \dots, a_{t-1} P_i a_t, a_t P_i a_1$ ), транзитивности ( $\forall a, b, c \in A, a P_i b, b P_i c \Rightarrow a P_i c$ ), связности ( $\forall a, b \in A$ , либо  $a P_i b$ , либо  $b P_i a$ ). Если  $a P_i b$ , это означает, что альтернатива  $a$  более предпочтительна, чем альтернатива  $b$  для избирателя  $i$ .

Профилем предпочтений назовем вектор  $\vec{P}$ , элементами которого являются предпочтения  $n$  избирателей,  $\vec{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ .  $\Omega$  – множество всех профилей предпочтений (для  $n$  избирателей и  $m$  альтернатив).  $\vec{P}_{-i}$  – профиль предпочтений всех избирателей, кроме  $i$ -го, т.е.  $\vec{P}_{-i} = (P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n)$ .

Коалиция избирателей –  $I \subseteq N$ . Профиль предпочтений членов коалиции обозначим через  $\vec{P}_I$ , а профиль предпочтений всех избирателей, кроме входящих в коалицию – через  $\vec{P}_{-I}$ . Профиль предпочтений всех избирателей из  $N$  можно также записать как  $\vec{P} = (\vec{P}_{-I}, \vec{P}_I)$ .

Обозначим через  $C_F(\vec{P}) \subseteq A$  выбор из множества альтернатив, осуществляемый по некоторому правилу голосования  $F$ , при данном профиле предпочтений  $\vec{P}$ .  $r_i(a, P_i) = |\{b \in A : aP_i b\}|$  – ранг альтернативы  $a$  в предпочтениях  $P_i$ ,  $V(a, b; \vec{P}) = \{i \in N \mid aP_i b\}$  – множество всех избирателей, для которых  $a$  предпочтительнее  $b$ .  $v(a, \vec{P})$  – вектор,  $j$ -й элемент которого,  $v_j(a, \vec{P})$ , равен количеству избирателей, в предпочтениях которых альтернатива  $a$  имеет ранг  $j - 1$ .

### 3.2.3.2 Правила коллективного выбора

1. Правило относительного большинства. Выбор по данному правилу определяется как множество альтернатив, являющихся наилучшими для наибольшего числа избирателей, т.е.

$$a \in C_{pl}(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall x \in A \quad n^+(a, \vec{P}) \geq n^+(x, \vec{P})],$$

где  $n^+(a, \vec{P}) = |\{i \in N \mid \forall y \in A \quad aP_i y\}|$ .

2. Правило Борда. По данному правилу для каждой альтернативы  $a$  вычисляется ранг Борда – по всем избирателям суммируется количество альтернатив, которые хуже  $a$ .

$$r_i(a, \vec{P}) = |\{b \in A : aP_i b\}|,$$

число альтернатив в предпочтении  $P_i \in \vec{P}$ , худших, чем  $x$ .

$$r(a, \vec{P}) = \sum_{i=1}^n r_i(a, \vec{P}),$$

– ранг Борда для альтернативы  $a$ . Альтернатива, имеющая максимальный ранг – входит в выбор.

$$a \in C_B(\vec{P}) \Leftrightarrow [\forall b \in A, \quad r(a, \vec{P}) \geq r(b, \vec{P})].$$

3. Максиминная процедура. Для каждой альтернативы  $a$  вычисляется минимальное количество избирателей, которые предпочитают эту альтернативу некоторой другой

$$\min_{b \in A} |V(b, a; \vec{P})|,$$

а затем выбирается альтернатива, для которой это значение максимально

$$c \in C_{\max \min}(\vec{P}) \Leftrightarrow c \in \arg \max_{a \in A} \min_{b \in A} |V(b, a; \vec{P})|.$$

4. Правило Коупленда. Выбирается альтернатива, для которой количество побед минус количество поражений в попарных сравнениях наибольшее, т.е.

$$CS(a, \vec{P}) = |\{b \in A \mid V(a, b; \vec{P}) > V(b, a; \vec{P})\}| - |\{b \in A \mid V(b, a; \vec{P}) > V(a, b; \vec{P})\}|$$

$$c \in C_{Copland1}(\vec{P}) \Leftrightarrow c \in \arg \max_{a \in A} CS(a, \vec{P}).$$

5. Правило Коупленда второго порядка. Сначала применяется правило Коупленда, а затем, в случае неоднозначности выбора, выбирается альтернатива  $a$ , для которой сумма очков  $CS(b, \vec{P})$  по всем альтернативам  $b$ , которых  $a$  доминирует по мажоритарному отношению. Т.е.

$$c \in C_{Copland2}(\vec{P}) \Leftrightarrow c \in \arg \max_{a \in A} CS(a, \vec{P}) \& c \in \arg \max_{a \in A} \sum_{b, aP_M b} CS(b, \vec{P}).$$

6. Правило Доджсона. Выбирает победителя Кондорсе, если он существует. Если победителя Кондорсе нет, то для каждой альтернативы проверяется, сколько раз нужно произвести замену местами двух соседних альтернатив в предпочтениях избирателей, чтобы она стала победителем Кондорсе. После этого выбирается альтернатива, для которой нужно произвести минимальное количество таких замен.

7. Правило Кемени. Введем сначала функцию расстояния по Кемени между линейными порядками  $P_1$  и  $P_2$ . Пусть  $\{d_{ij}^{(k)}\}$  – матрица бинарного отношения  $P_k$ : если  $aP_k b$ , то элемент этой матрицы  $d_{ab}^{(k)} = 1$ ,  $d_{ba}^{(k)} = -1$ . Расстоя-

ние между двумя предпочтениями вычисляется как сумма модулей разности элементов матриц

$$d(P_1, P_2) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} |d_{ab}^{(1)} - d_{ab}^{(2)}|.$$

Результат правила Кемени – линейный порядок, для которого сумма расстояний до предпочтений всех избирателей минимальна, т.е.

$$P_K = \arg \min_{P \in \mathbf{P}} \sum_{i \in N} d(P, P_i).$$

Победитель – кандидат, занимающий первое место в найденном упорядочении.

8. Процедура Болдуина (обратная процедура Борда). Для каждой альтернативы подсчитывается ранг Борда  $r(a, \vec{P})$ , затем из всех предпочтений удаляется альтернатива, имеющая наименьший ранг Борда. Процедура исключения альтернатив продолжается до тех пор, пока не останутся неисключаемые альтернативы, которые и являются множеством выбора в процедуре Болдуина.

9. Правило Нансона. Аналогично процедуре Болдуина рассчитываются значения ранга Борда для каждой альтернативы, но на каждом шаге из профиля удаляются все альтернативы, имеющие ранг Борда ниже среднего ранга

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{a \in A} r(a, \vec{P}),$$

и процедура повторяется до тех пор, пока не останутся неисключаемые альтернативы.

10. Турнир с выбыванием (правило последовательных попарных сравнений). Правило определяется с помощью бинарного дерева и распределения кандидатов по конечным вершинам. В каждой неконечной вершине дерева ставится кандидат, ставший победителем в паре ее дочерних вершин.

### 3.2.3.3 Индивидуальное манипулирование

Впервые вопрос о вычислительной сложности задачи манипулирования результатом голосования был поставлен в [173]. В ней исследуется самая простая формулировка задачи голосования: манипулирование индивидуальное, конструктивное, без учета весов избирателей и с предположением о наличии полной информации обо всех предпочтениях остальных избирателей. Дадим формальное определение соответствующей вычислительной задачи.

Задача индивидуального манипулирования (ИМ). Даны предпочтения всех избирателей, кроме манипулирующего,  $\vec{P}_{-i}$ . Дано правило голосования  $F$  и кандидат  $c$ . Требуется найти такое предпочтение  $\vec{P}_i$  для избирателя  $i$ , при котором  $c = C_F(P_i, \vec{P}_{-i})$  или доказать, что его нет.

В [173] показано, что для некоторых правил коллективного выбора (правило простого большинства, правило Борда, максиминная процедура и правило Коупленда) задача ИМ может быть решена с помощью простого жадного алгоритма, имеющего полиномиальную сложность. В то же время, даже при такой простой постановке задачи правило передачи голосов и правило Коупленда второго порядка трудно манипулируемы (задача ИМ для них является NP-полной). В [175] была доказана NP-полнота манипулирования результатом правил Болдуина и Нансона.

Для теории вычислительной сложности необычно то, что высокая сложность является положительным свойством. Однако по-прежнему желательно, чтобы результат правила голосования вычислялся легко, а манипулирование было достаточно сложным. Правила, для которых само определение победителя является сложной задачей, заведомо трудно манипулируемы. Такие правила были найдены в [176]: это правило Доджсона и правило Кемени. Оказалось, что задача определения победителя по этим правилам является NP-трудной, а потому неудобной в использовании. С точки зрения практического применения наиболее важными являются результаты, когда манипулиро-

вание представляет собой вычислительно сложную задачу, но результат правила вычислим за полиномиальное время.

### 3.2.3.4 Коалиционное манипулирование

При коалиционном манипулировании группа (коалиция) из  $k$  агентов решает, какой профиль предпочтений  $\vec{P}_I$  предъявить процедуре, чтобы получить выигрыш своего любимого кандидата. При этом предпочтения членов коалиции совсем не обязательно будут одинаковыми.

Задача коалиционного манипулирования (КМ). Даны предпочтения всех избирателей, кроме манипулирующей коалиции,  $\vec{P}_{-I}$ . Дано правило голосования  $F$  и кандидат  $c$ . Требуется найти такой профиль предпочтений  $\vec{P}_I$  для манипулирующей коалиции  $I$ , при котором  $c = C_F(\vec{P}_I, \vec{P}_{-I})$  или доказать, что его нет.

Все результаты о NP-полноте ИМ находят здесь применение, так как если индивидуальное манипулирование является NP-полным, то при переходе к коалиционной модели NP-полнота сохраняется. Примером может служить правило передачи голосов.

Коалиционное манипулирование для правила Борда при отсутствии весов было исследовано в [177, 178]. Несмотря на то, что правило Борда легко манипулируемо одним избирателем, оказалось, что двух избирателей в манипулирующей коалиции достаточно, чтобы задача поиска стратегии манипулирования коалицией стала NP-полной. Типы вычислительной сложности индивидуального и коалиционного манипулирования приведены в Таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Сложность индивидуального и коалиционного манипулирования

	ИМ	КМ
Правило простого большинства	P [173]	P [174]
Турнир с выбыванием	P [174]	P [175]
Правило Борда	P [173]	NP-т [177]
Правило Коупленда	P [173]	P [179]
Правило Коупленда второго порядка	NP-п [173]	NP-п [173]
Правило Нансона	NP-п [175]	NP-п [175]
Правило Болдуина	NP-п [175]	NP-п [175]
Максиминная процедура	P [173]	NP-п [180]

### 3.2.3.5 Коалиционное манипулирование с неодинаковым весом голосов

Теперь, в добавление к коалиционной манипулируемости, мы также вводим возможность назначения весов голосам избирателей. Пусть  $w = (w_1, \dots, w_n)$  – вектор,  $i$ -й элемент которого означает вес голоса избирателя  $i$ .  $w_i$  обычно предполагают рациональным числом, т.е.  $w_i = \tilde{n}_i / \tilde{n}$ , где  $\tilde{n}$  – общий знаменатель  $w_1, \dots, w_n$ . Таким образом, избиратель с весом голоса  $w_i$  может представлять коалицию из  $\tilde{n}_i$  невидимых избирателей, имеющих одинаковые предпочтения  $P_i$ , а  $\tilde{n}$  – общее количество невидимых избирателей. Такая интерпретация удобна тем, что позволяет для анонимных правил кол-лективного выбора определить результат на профиле предпочтений, где заранее отсутствует анонимность (равноправность избирателей). Взвешенный профиль предпочтений  $\vec{P}^w$ , можно записать в виде обычного профиля

$$\vec{P}^w = (\tilde{n}_1 P_1, \dots, \tilde{n}_n P_n) = (\underbrace{P_1, \dots, P_1}_{\tilde{n}_1}, \dots, \underbrace{P_n, \dots, P_n}_{\tilde{n}_n}).$$

Задача коалиционного манипулирования при взвешенном голосовании (КМВ). Даны предпочтения всех избирателей, кроме манипулирующей коалиции,  $\vec{P}_{-I}$  и вектор весов всех избирателей  $w = (w_I, w_{-I})$ . Дано правило голосования  $F$  и кандидат  $c$ . Требуется найти такой профиль предпочтений  $\vec{P}_I$  для манипулирующей коалиции  $I$ , при котором  $c = C_F(\vec{P}_I^{w_I}, \vec{P}_{-I}^{w_{-I}})$  или доказать, что его нет.

Усложняя задачу таким образом, мы будем иметь сохранение результатов о NP-полноте. Более того, оказывается, что для подавляющего большинства рассматриваемых правил в такой формулировке манипулирование будет NP-полным. Поэтому вводится дополнительное предположение, на этот раз упрощающее манипулирование. Как впервые показано в [174], при индивидуальном невзвешенном манипулировании сложность экспоненциальна только по числу кандидатов и полиномиальна по числу избирателей. Поэтому достаточно ограничить множество кандидатов некоторой константой, чтобы задача поиска стратегии манипулирования решалась за полиномиальное время. Типы вычислительной сложности конструктивного коалиционного манипулирования в голосовании с назначением весов приведены в Таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Вычислительная сложность конструктивного коалиционного манипулирования в голосовании с назначением весов

Коалиционное манипулирование	Конструктивное			
Количество кандидатов	2	3	4	$\geq 7$
Правило простого большинства	P	P [174]	P [174]	P [174]
Турнир с выбыванием	P	P [174]	P [174]	P [174]
Правило Борда	P	NP-п [174]	NP-п [174]	NP-п [174]
Правило Коупленда	P	P [174]	NP-п [174]	NP-п [174]
Правило Нансона	P	P [175]	NP-п [175]	NP-п [175]
Правило Болдуина	P	NP-п [180]	NP-п [180]	NP-п [180]
Максиминное правило	P	P [174]	NP-п [174]	NP-п [174]

### 3.2.3.6 Деструктивное манипулирование

При всех предыдущих постановках задачи целью манипулирования являлось достижение победы любимого кандидата. Такое манипулирование называют конструктивным. В противоположность ему, деструктивное манипулирование направлено на то, чтобы избежать победы определенного кандидата. Оно всегда проще конструктивного, а значит, правила голосования в большей степени подвержены стратегическому поведению такого типа со стороны избирателей [174]. Действительно, для того, чтобы решить проблему конструктивного манипулирования, нужно сделать так, чтобы по возможно-

сти ни один из кандидатов, кроме  $c$ , не был выбран. То есть необходимо решить  $m-1$  задачу деструктивного манипулирования.

Задача деструктивного индивидуального/коалиционного манипулирования (ДИМ/ДКМ). Даны предпочтения всех избирателей, кроме манипулирующей коалиции,  $\vec{P}_I$ . Дано правило голосования  $F$  и кандидат  $d$ . Требуется найти такой профиль предпочтений  $\vec{P}_I$  для избирателей коалиции  $I$ , при котором  $d \notin C_F(\vec{P})$  или доказать, что его нет. Типы вычислительной сложности коалиционного деструктивного манипулирования в голосовании с назначением весов приведены в Таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Вычислительная сложность коалиционного деструктивного манипулирования в голосовании с назначением весов

Коалиционное манипулирование	Деструктивное			
Количество кандидатов	2	3	4	$\geq 7$
Правило простого большинства	P	P [174]	P [174]	P [174]
Турнир с выбыванием	P	P [174]	P [174]	P [174]
Правило Борда	P	P [174]	P [174]	P [174]
Правило Коупленда	P	P [174]	P [174]	P [174]
Правило Нансона	P	P [175]	NP-п [175]	NP-п [175]
Правило Болдуина	P	NP-п [175]	NP-п [175]	NP-п [175]
Максиминное правило	P	P [174]	P [174]	P [174]

### 3.2.3.7 Манипулирование при неполной информации

Наконец, последняя рассмотренная нами постановка задачи: манипулирование при неполной информации. Манипулирование результатом голосования имеет смысл только в том случае, когда избирателю заранее известно хотя бы что-то о предпочтениях других избирателей. И чем большим объемом информации он располагает, тем легче рассчитать то, как следует ему проголосовать. Однако даже при простых распределениях вероятностей на множестве предпочтений для каждого кандидата задача манипулирования при неполной информации, по крайней мере, так же трудна, как и задача КМВ [174].

### 3.2.4 Некоторые выводы

В 2014 году исследование манипулирования было осуществлено в трех направлениях: экспериментальном, теоретическом и с точки зрения теории вычислительной сложности.

В рамках первого направления было модифицировано программное обеспечение для вычисления индексов коалиционной манипулируемости (в случае с четырьмя и пятью альтернативами), расширен список исследуемых правил, вычислены индексы для случая с 3-мя альтернативами для мажоритарных правил голосования.

Теоретическое исследование впервые позволило найти индексы манипулируемости при бесконечно большом числе избирателей для популярных позиционных правил коллективного выбора (правило простого большинства, правило Борда и обратное правило простого большинства) и правила Кумбса.

Наконец, задача манипулирования была изучена с точки зрения теории вычислений. Был сделан обзор работ, исследующих алгоритмы построения предпочтений для манипулирующих избирателей. Мы рассмотрели принадлежность различных задач манипулирования основным классам сложности: P (классу полиномиальных задач), классу NP-трудных и классу NP-полных задач. Определение вычислительной сложности манипулирования является как практически, так и теоретически важной задачей. Во-первых, она позволяет оценить, насколько труден расчет стратегии для манипулирующего избирателя, и высокая сложность, таким образом, представляет собой некоторый барьер для манипулирования. А во-вторых, позволяет исследовать и применять эффективные алгоритмы для вычисления степени манипулируемости.

Результаты исследования нашли отражение в работах [181, 171].

### 3.3 Исследование качественных характеристик индексов поляризованности социальных групп

Источники социальных конфликтов изучаются с давних времен. В ранних исследованиях большое внимание уделялось распределению доходов как причине конфликта между группами в обществе [182, 183, 184]. Имущество неравенство способно обусловить антагонизм бедных и богатых слоев общества. В свою очередь, неэкономические характеристики индивидов могут стать факторами разделения общества на «экономически похожие» группы. И тогда, в случае конфликта проигравшая сторона может быть исключена из пользования/владения тем или иным благом. Так, во второй половине XX века, наряду с «потускнением» лево-правой идеологической оси, была замечена «национализация» борьбы между соперниками на выборах [185]. В связи с ростом социальной напряженности и конфликтов, поляризация общества как предмет изучения постоянно привлекает к себе внимание исследователей.

Признается, что этническая идентификация является «расплывчатым и аморфным понятием», у которого отсутствует единое определение. Во многих определениях этнической группы подчеркивается общее происхождение индивидов из одной этнической группы или хотя бы идея о нем. К общему происхождению добавляются требования наличия общей культуры и/или языка, а также общей истории и принципиальной автономности группы, но этническая группа не должна быть ограничена семьей или родом, а должна составлять часть населения страны, и если «в некотором месте человек является членом данной группы, то и его братья тоже должны иметь возможность являться ее членами» [186].

Этническое, даже шире – культурное разнообразие, с одной стороны, имеет свои положительные стороны, оно связано с большим разнообразием навыков, образования, опыта и может способствовать развитию экономики и распространению инноваций. Тем не менее, многие исследования обнаруживают, что этнолингвистическая раздробленность населения отрицательно

связана с экономическим развитием (возможно, исключая развитые экономики) и положительно связана с возникновением гражданских конфликтов. “There is no free lunch for diversity,” – отмечают В. Гинзбург и Ш. Вебер [187]. В тех обществах, которые являются разнообразными по этническому составу населения, высок потенциал нестабильности, приводящий к ксенофобии и конфликтам. Подобного рода социальная нестабильность может быть фактором снижения экономического роста [188], объемов и качества предоставления общественных благ [189], снижения участия в организациях гражданского общества [190], роста коррупции [191] и пр.

Предметом нашего интереса является этническая гетерогенность общества как фактор возникновения гражданских конфликтов, благосостояния населения и качества государственного управления. До некоторой степени ответ на вопрос о важности культурного разнообразия в конфликтах зависит от того, что понимать под «этническим разделением».

Существуют два основных подхода к анализу культурного разнообразия обществ – с использованием мер фрагментированности общества [192, 193, 194] и мер поляризованности [195, 196].

Фрагментированность представляет собой характеристику раздробленности обществ или отраслей на группы по некоторому признаку. Если общество *A* состоит из двух групп одинаковой численности, а общество *B* – из трех групп одинаковой численности, то фрагментированность в обществе *B* больше.

Поляризованность, в свою очередь, учитывает степень сходства между группами, и чем меньше сходство, тем больше степень антагонизма в обществе. Г. Беккер в 1957 г. писал, что индивидам свойственно испытывать чувство сопереживания членам своей «группы», и более того, им свойственно меньше любить тех, кто в большей степени на них не похож [197].

Классической работой в области теории измерения поляризованности считается [195], в которой предложено следующее определение поляризованности: «Предположим, что некоторое общество может быть разделено на

группы в соответствии с некоторым набором характеристик таким образом, что члены каждой группы очень близки, а члены разных групп, наоборот, очень различны. В этом случае общество называют поляризованным».

Таким образом, степень поляризованности общества зависит от того, насколько сильно различаются значения выбранных характеристик для выделенных групп, а также от количества и относительного размера групп.

Поляризованность общества напрямую связана с существованием социального напряжения и, как следствие, с вероятностью возникновения социального конфликта. Таким образом, разработка методов измерения поляризованности позволит дать количественную оценку напряженности общества и прогнозировать социальные конфликты.

Гетерогенность – как поляризованность, как и фрагментированность – может измеряться по многим признакам: доходам, этнической, религиозной или лингвистической принадлежности, политическим симпатиям и пр.

В литературе встречаются семь основных индексов этнической гетерогенности:

- индекс этнолингвистической фрагментированности, ИЭЛФ [192];
- индекс Гринберга [198];
- индекс второстепенной гетерогенности [197];
- индекс поляризованности Эстебана-Рэя [195];
- индекс поляризованности Рейнал-Кэрол [196];
- индекс поляризованности Алескерова-Голубенко [199].

Наконец, формально поляризованность может быть оценена с помощью величины разброса, которая считается как среднеквадратичное отклонение положений групп от среднего значения.

Для того чтобы рассчитать значения индексов поляризованности, необходимо подобрать некоторый показатель, который бы характеризовал сходства-различия (расстояние) между анализируемыми группами. Были предложены несколько подходов к решению данной проблемы:

- экспертная классификация;
- лингвистическое древо [200];
- лексико-статистический анализ языков [201, 202];
- «генетические расстояния» [203];
- опросные данные [204, 205].

В современной литературе отмечается, что богатство природными ресурсами (к ним относятся горючие полезные ископаемые, металлы и минералы, водные и лесные ресурсы) может оказывать влияние на имущественное неравенство в зависимости от степени этнической поляризации населения: природные ресурсы способствуют увеличению имущественного неравенства в этнически поляризованных обществах, но снижают его в неполяризованных. В странах с высокой степенью поляризованности населения наличие природных ресурсов приводит к погоне за рентой и конфликтам.

В [196], посвященной гражданским конфликтам, утверждается, что для их предсказания важен учет этнического фактора. В логике модели, предложенной в [206], группы развязывают конфликт из-за желания обладать частными благами, например, владение нефтяными месторождениями, и общественными, например, политическая власть. Предполагается, что чем больше ресурсов привлечет группа, тем больше для нее вероятность победы в конфликте, и каждый индивид при этом затрачивает ресурсы на ведение конфликта, а «средняя стоимость конфликта»  $\sigma$  является индикатором его интенсивности. Результатом эконометрического моделирования (построения моделей бинарного и множественного выбора) стало то, что этническая поляризация и фрагментированность значимо и положительно связаны с возникновением и интенсивностью конфликта. Степень имущественного неравенства также статистически значимо связана с интенсивностью конфликта, но эта связь отрицательная и значима только при малой численности населения [207].

В современных российских исследованиях этнической идентичности авторов в значительной степени интересуют теоретические вопросы: сравнение подходов к изучению этничности, определения понятий, соотношение государственной и этнической идентичности, нациестроительство в условиях полигэтнического населения, процессы этнополитической мобилизации, формирование гражданского самосознания [208, 209, 210, 211, 212].

Эмпирические исследования в основной массе посвящены социально-психологической реальности на территории России и бывших республик СССР: распространность и динамика этнических и гражданских идентификаций, взаимодействие между этническими, религиозными и гражданскими идентичностями в сознании людей, анализ контента средств массовой коммуникации, в т.ч. в социальных сетях, особенности адаптации массового сознания к глобализационным процессам, установки и ориентации граждан, в том числе патриотические [213], предубеждения и ксенофобия [214], дискриминация по этническому признаку в государственно-политической и социально-экономической сфере [208, 215]. Значительное количество работ посвящено анализу национализма, этнической идентичности и этнополитики, территориальным, межэтническим и религиозным конфликтам [216, 211, 217]. Признается, что этноконфликтологические исследования должны опираться «на математическое моделирование и современные средства обработки информации» [218].

Цель настоящей работы – сравнение поведения индексов Алескерова-Голубенко, Эстебана-Рэя и величины разброса в некоторых специальных случаях.

### 3.3.1 Индексы поляризованности

Рассматривается разбиение общества на  $n$  групп, при котором  $i$ -тая группа находится в точке  $y_i \in [0,1]$  и имеет относительный размер  $p_i$ , так что

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Для измерения поляризованности в [195] был предложен индекс Эстебана-Рэя, который рассчитывается по следующей формуле

$$ER = 2^{\alpha+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i^{1+\alpha} p_j |y_i - y_j|,$$

где  $\alpha \in (0; 1.6]$  – параметр модели, характеризующий степень «поляризационной чувствительности» системы (при  $\alpha = 0$  ER аналогичен индексу неравенства Джини).

В [199] был предложен альтернативный метод измерения поляризованности. В основу метода легла идея о физической характеристике распределения масс в системе – статическом моменте [219]. Был введен индекс Алескерова-Голубенко

$$AG_0 = 2 \sum_{i=1}^n p_i |y_i - c|, \quad (3.20)$$

где  $c = \sum_{i=1}^n p_i y_i$  – положение центра масс системы.

Ниже при расчетах вместо оригинального индекса Алескерова-Голубенко (3.20) будем использовать его модификацию

$$AG = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n p_i |y_i - c|.$$

Также поляризованность можно формально оценить с помощью величины разброса – среднеквадратичного отклонения положений точек от среднего значения:

$$D = \frac{8}{n} \sum_{i=1}^n p_i (y_i - c)^2. \quad (3.21)$$

Все индексы принимают значения от 0 до 1. Максимальному значению индексов соответствует случай двух равных максимально удаленных друг от друга групп [186, 198].

### 3.3.2 Сравнение индексов Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя

Рассмотрим ситуацию, в которой общество разбито на  $n$  одинаковых по размеру групп, расположенных на отрезке  $[0,1]$  таким образом, что две соседние группы отстоят друг от друга на равных расстояниях (см. рисунок 3.2).

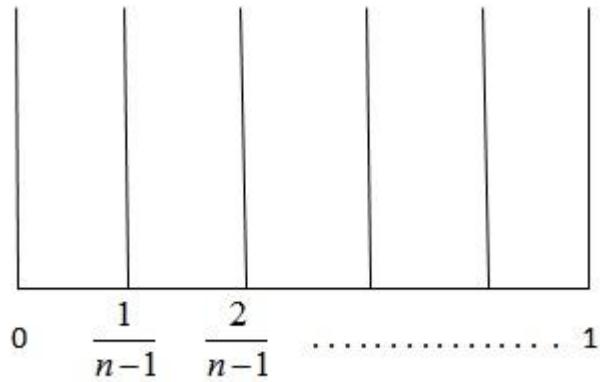


Рисунок 3.2 – Равное распределение  $n$  групп

В этом случае обозначим значения индексов Эстебана-Рэя и Алескерова-Голубенко соответственно через  $ER_n$  и  $AG_n$ .

Теорема 3.4. Для равного распределение  $n$  групп при увеличении числа групп значения индексов поляризованности будут уменьшаться, т.е.  $ER_{n+1} < ER_n$ ,  $AG_{n+1} < AG_n$ .

Теорема 3.4, фактически, означает, что общество, разделенное по какому-либо признаку на две полярные группы, будет более поляризованным, чем общество, разделенное на несколько одинаковых групп. Эта теорема согласуется с результатами, полученными в [195, 199], о том, что максимальное значение индексов поляризованности достигается при биполярном распределении.

Результаты сравнения индексов Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя в рассматриваемом случае отражены в теореме 3.5.

Теорема 3.5. Для равного распределения  $n$  групп существует такое  $n^*(\alpha)$ , что:

- 1) при  $n \leq n^*$  значение индекса Алескерова-Голубенко меньше значения индекса Эстебана-Рэя;
- 2) при  $n > n^*$  значение индекса Алескерова-Голубенко больше значения индекса Эстебана-Рэя.

Рассмотрим теперь равное распределение  $n$  групп при нечетном значении  $n$ . Пусть группа, занимающая центральное положение, может отклоняться от точки  $y_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2}$  на  $\varepsilon$ , не превышающее расстояния между группами (см. рисунок 3.3).

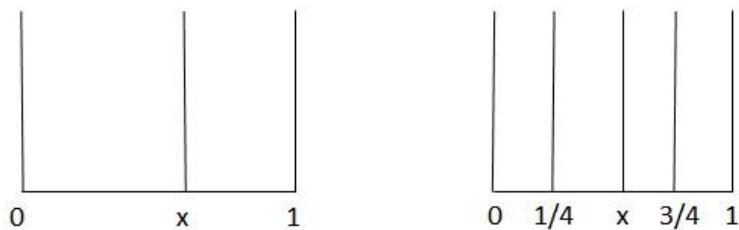


Рисунок 3.3 – Центральная группа занимает положение  $x$  между двумя соседними группами (случаи трех и пяти групп)

Теорема 3.6. Для равного распределения нечетного числа групп  $n$  и в случае, когда центральная группа занимает некоторое положение между двумя соседними группами,  $ER = \frac{n+1}{3} \left(\frac{2}{n}\right)^{1+\alpha}$ .

Примечание 3.2. В [195] был предложен вывод индекса Эстебана-Рэя из системы трех аксиом. При этом в одной из аксиом рассматривается случай, близкий к случаю из теоремы 3.6. Приведем формулировку аксиомы из [195]: «Даны 3 группы ( $p, q, r$ )  $>> 0$ ,  $p > r$ ,  $x > |y - x|$ . Тогда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что если группа размера  $q$  смещается вправо (в направлении  $r$ ) на расстояние, не

превышающее  $\varepsilon$ , поляризованность возрастает». Аксиома проиллюстрирована на рисунке 3.4.

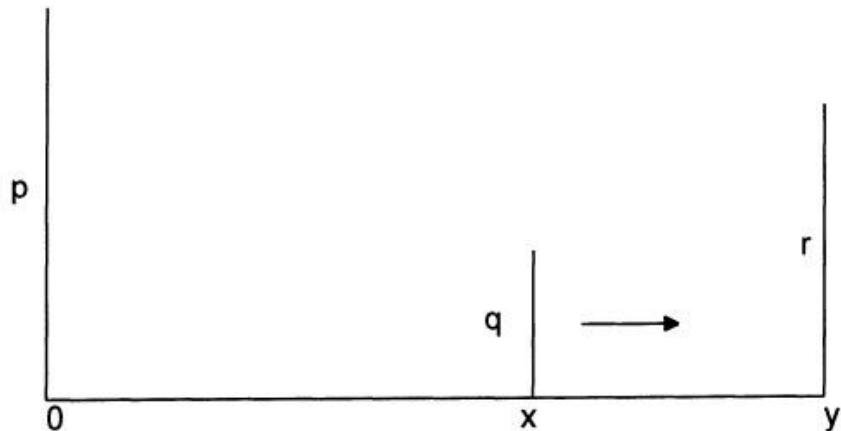


Рисунок 3.4 – Аксиома 2 для индекса Эстебана-Рэя

Несмотря на то что в условии аксиомы полагается  $p > r$ , при выводе индекса осуществляется предельный переход  $r \rightarrow p$ ,  $q \rightarrow p$  и полагается  $p = q = r$ . При этом возрастание индекса поляризованности подменяется его неубыванием. Таким образом, уже при выводе индекса делается допущение о том, что возможен случай, описанный в теореме 3.6.

Теорема 3.6 показывает несостоительность индекса Эстебана-Рэя для описания поляризованности общества в случае нечетного числа равных групп. Очевидно, поляризованность должна увеличиваться при приближении центральной группы к одной из крайних групп, и уменьшаться при приближении центральной группы к середине. Именно такое поведение демонстрирует индекс Александрова-Голубенко; результаты сравнения индексов Эстебана-Рэя и Александрова-Голубенко в рассматриваемом случае отражены в теореме 3.7.

Теорема 3.7. Для равногого распределения нечетного числа групп  $n$  и в случае, когда центральная группа занимает некоторое положение  $x$  между двумя соседними группами, имеем:

$$1) AG > ER \text{ при } n > \left(\frac{1}{3} \cdot 2^{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \text{ для любого } x;$$

2)  $AG \leq ER$  при  $n(n+1)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha-1} - \frac{1}{4}\right) \geq 1$  для любого  $x$ ;

3) при  $n < \left(\frac{1}{3} \cdot 2^{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$  и  $n(n+1)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha-1} - \frac{1}{4}\right) \leq 1$  существует такая область  $X$ ,

что  $AG \leq ER$  для любого  $x \in X$ .

### 3.3.3 Сравнение индексов и величины разброса

Для величины разброса (3.21) можно сформулировать теоремы, аналогичные теоремам из пункта 3.3.1.

Теорема 3.8. Для равного распределения числа групп при увеличении числа групп  $n$  значение величины разброса будет уменьшаться, т.е.  $D(n+1) < D(n)$ .

Результаты сравнения величины разброса и индексов поляризованности отражены в теоремах 3.9-3.10.

Теорема 3.9. Для равного распределения числа групп  $n$  имеем:

1)  $D(n) < AG(n)$  для любого  $n$ ;

2) существует такое  $n^*(\alpha)$ , что при  $n \leq n^*$   $D(n) < ER(n)$ , а при  $n > n^*$   $D(n) > ER(n)$ .

Теорема 3.10. Для равного распределения нечетного числа групп  $n$  и в случае, когда центральная группа занимает некоторое положение  $x$  между двумя соседними группами, имеем:

1)  $D \leq AG$  для любых  $x, n, \alpha$ ;

2)  $D > ER$  при  $\frac{n^\alpha}{n-1} > 2^\alpha$  и для любого  $x$ ;

3)  $D \leq ER$  при  $\frac{n^\alpha}{n-1} \leq 2^\alpha$  для  $x \in \left[ \frac{1}{2} - \delta_{n,\alpha}, \frac{1}{2} + \delta_{n,\alpha} \right]$ ,

$\delta_{n,\alpha} = \frac{n}{2\sqrt{6(n-1)}} \sqrt{(n+1)\left(n(n-1)\left(\frac{2}{n}\right)^{1+\alpha} - 2\right)}$  и  $D > ER$  для остальных значений  $x$ .

### 3.3.4 Реакция индексов на случайное возмущение

Рассмотрим равномерное распределение по группам. Пусть на каждую из групп случайным образом накладывается малое возмущение  $\varepsilon$ , таким образом, что суммарный размер групп остается равным единице. Для характеристики относительной реакции индекса на случайное возмущение введем меру  $P(I_1, I_2)$  – вероятность того, что при наложении случайного возмущения значение индекса  $I_1$  меняется сильнее, чем значение индекса  $I_2$ .

Было проведено компьютерное моделирование по наложению случайного возмущения на равномерное распределение по группам: для каждого  $n \in [3, 10]$  было проведено  $10^4$  итераций, по результатам которых была посчитана мера  $P(ER, AG)$ . Результаты компьютерного моделирования приведены в Таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Значение меры  $P(ER, AG)$  для различного числа групп (точность 0.001)

Число групп	$P(ER, AG)$
3	1
4	0,81
5	0,92
6	0,76
7	0,89
8	0,75
9	0,79
10	0,74

Таким образом, в целом индекс Эстебана-Рэя сильнее реагирует на случайное возмущение, чем индекс Алескерова-Голубенко. При этом

- реакция зависит от числа групп (чем меньше групп, тем больше вероятность того, что изменение индекса Эстебана-Рэя будет больше, чем изменение индекса Алескерова-Голубенко);
- реакция зависит от того, четно или нечетно число групп (в случае четного числа групп выше вероятность того, что индекс Эстебана-Рэя изменится сильнее индекса Алескерова-Голубенко).

### 3.3.5 Некоторые выводы

В настоящей работе проведено сравнение индексов поляризованности Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя в некоторых специальных случаях. Кроме того, проведено сравнение указанных индексов со среднеквадратичным отклонением положений групп от среднего (величиной разброса). Показано, что:

- в случае равного распределения  $n$  групп значения всех трех индексов убывают в зависимости от  $n$ ;
- в случае равного распределения  $n$  групп существует такое  $n^*(\alpha)$ , что при  $n \leq n^*$  значение индекса Алескерова-Голубенко меньше значения индекса Эстебана-Рэя, а при  $n > n^*$  значение индекса Алескерова-Голубенко больше значения индекса Эстебана-Рэя; аналогичный результат справедлив для величины разброса, которая всюду не превышает значение индекса Алескерова-Голубенко;
- в случае нечетного числа равных групп индекс Эстебана-Рэя не зависит от положения центральной группы;
- в случае нечетного числа равных групп индекс Алескерова-Голубенко принимает минимальное значение, когда центральная группа равноудалена от крайних групп, и максимальное значение, когда центральная группа неограниченно приближается к одной из крайних групп; при этом в централь-

ной области индекс Эстебана-Рэя превышает индекс Алескерова-Голубенко; аналогичный результат справедлив для величины разброса; – при равном распределении индекс Эстебана-Рэя реагирует на малое возмущение в целом сильнее, чем индекс Алескерова-Голубенко.

Результаты исследования нашли отражение в работах [220, 221, 222].

### 3.4 Исследование свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции

Интерес к задачам выбора связан с тем, что значительная часть задач прикладной математики и теории управления сводится к таким задачам.

Задача выбора может быть сформулирована следующим образом. Пусть задано конечное множество  $A$  альтернатив, мощность которого больше или равна 2 ( $\text{card}(A) \geq 2$ ). Любое подмножество  $X \subseteq 2^A$  может быть предъявлено для осуществления акта выбора и называется далее предъявлением. Пусть задана некоторая функция выбора  $C(\cdot)$ , которая является отображением  $C: 2^A \rightarrow 2^A$  с ограничением  $C(X) \subseteq X$  для любого  $X \subseteq 2^A$ . Выбор состоит в выделении из предъявлений  $X$  по некоторому фиксированному правилу непустого подмножества альтернатив  $Y \subseteq X$  (непустого подмножества «лучших» альтернатив).

Наиболее простым примером задачи выбора является выбор альтернатив при наличии одного критерия. В таких задачах задается система ограничений, а процедура выбора альтернатив заключается в максимизации или минимизации критерия с учетом заданных ограничений. Таким образом, выбор альтернатив осуществляется по заданному заранее «критерию оптимальности» (скалярному или векторному) с помощью той или иной экстремизационной процедуры.

В реальных задачах выбор альтернатив связан с использованием нескольких критериев. Как правило, в таком случае часто применяется метод сведения многокритериальной задачи к однокритериальной, что, однако, не всегда возможно. Более того, зачастую некоторые критерии могут противово-

речить друг другу, и задача выбора сводится к предоставлению пользователю некоторого компромиссного с учетом всех критериев набора альтернатив, из которых он мог бы выбрать наиболее подходящие для себя альтернативы.

Существует большое число различных процедур выбора, которые позволяют производить выбор наилучших альтернатив, а также их ранжирование в условиях многокритериальности. Напомним, что под процедурой выбора подразумевается некоторое правило, которое указывает, каким образом выделяется подмножество наилучших альтернатив из исходного подмножества альтернатив  $X$  из  $A$ . Все процедуры выбора можно разделить на 5 основных групп:

- 1) позиционные правила;
- 2) правила, использующие мажоритарное отношение;
- 3) правила, использующие вспомогательную числовую шкалу;
- 4) правила, использующие турнирную матрицу;
- 5) q-Паретовские правила большинства.

Изменение предъявляемого множества альтернатив, их оценок по критериям или набора критериев, по которым осуществляется выбор, приводит к изменению полученного выбора. Отсюда следует необходимость более детального изучения существующих процедур выбора и определения того, какие из них могут применяться в конкретном случае.

В настоящей работе мы исследуем более сложные процедуры выбора, в основе которых лежит принцип суперпозиции. Напомним, что под суперпозицией двух функций выбора  $C_1(\cdot)$  и  $C_2(\cdot)$  подразумевается бинарная операция  $\odot$ , результат которой – новая функция  $C^*(\cdot)=C_2(\cdot)\odot C_1(\cdot)$ , имеющая вид  $\forall X \in 2^A C^*(X)=C_2(C_1(X))$  [223]. Другими словами, суперпозиция заключается в последовательном применении функций выбора, что означает, что выбор на  $X$  по функции выбора  $C_1$  является предъявлением для функции  $C_2$ . При этом изменение порядка применения функций выбора может привести к различ-

ным результатам выбора, т.к. операция суперпозиции не обладает свойством коммутативности.

Интерес к подобным процедурам выбора возникает по нескольким причинам. Во-первых, процедуры выбора, основанные на идее суперпозиции, имеют достаточно низкую вычислительную сложность, что критично в том случае, когда число альтернатив и критериев очень велико. Дело в том, что при работе с большим объемом данных, когда каждая альтернатива характеризуется большим количеством различных признаков, большинство существующих одноступенчатых процедур выбора имеют высокую вычислительную сложность. Использование операции суперпозиции позволяет сокращать на каждом новом этапе общее число альтернатив, а также применять на разных этапах различные с точки зрения вычислительной сложности процедуры выбора, что позволяет получить результат за приемлемое время. Во-вторых, зачастую возникают ситуации, когда в результате применения некоторой процедуры полученный выбор содержит слишком большое число альтернатив. Использование операции суперпозиции позволяет избегать таких ситуаций за счет использования дополнительных процедур выбора.

В рамках данной работы рассматриваются двухступенчатые процедуры выбора, у которых на первом этапе используются позиционные правила, а на втором этапе используются:

- позиционные правила;
- правила, использующие мажоритарное отношение;
- правила, использующие вспомогательную числовую шкалу;
- правила, использующие турнирную матрицу.

Целью работы является исследование данных процедур выбора на предмет удовлетворения существующим нормативным условиям, которые показывают, каким образом изменится выбор при добавлении в исходный набор данных новых альтернатив, при удалении из исходного набора не попавших в выбор альтернатив, при удалении из исходного набора попавших в выбор

альтернатив, а также при изменении значения по критерию одной из альтернатив и т.д.

Исследование этого года продолжает исследование 2013 года в плане рассмотрения новых процедур выбора, уточнения нормативных условий, а также исследования вычислительной сложности двухступенчатых процедур выбора.

### 3.4.1 Описание процедур выбора

Как уже указывалось ранее, в работе рассматриваются двухступенчатые процедуры выбора, в основе которых лежат следующие процедуры выбора [224, 124, 225, 223]:

- позиционные правила;
- правила, использующие мажоритарное отношение;
- правила, использующие вспомогательную числовую шкалу;
- правила, использующие турнирную матрицу.

В Таблице 3.8 приведен список рассматриваемых процедур выбора.

Таблица 3.8 – Список рассматриваемых процедур выбора

№	Название процедуры выбора	Тип процедуры
1	Правило простого большинства	Позиционные правила
2	Правило относительного большинства	
3	Обратное правило простого большинства	
4	Аналог правила одобряющего голосования	
5	Двухступенчатое правило относительного большинства	
6	Правило Хара (Процедура Уэйра)	
7	Правило Борда	
8	Правило Блэка	
9	Обратное правило Борда	
10	Правило Нансона	
11	Процедура Кумбса	
12	Минимальное доминирующее множество	Правила, использующие мажоритарное отношение
13	Минимальное непокрытое множество	
14	Минимальное слабоустойчивое множество	
15	Правило Фишберна	
16	Непокрытое множество I	
17	Непокрытое множество II	
18	Правило Ричалсона	
19	Победитель Кондорсе	
20	Ядро	
21	k-устойчивые множества	

### Продолжение таблицы 3.8

№	Название процедуры выбора	Тип процедуры
22	Пороговое правило	Правила, использующие вспомогательную числовую шкалу
23	Первое правило Копланда	
24	Второе правило Копланда	
25	Третье правило Копланда	
26	Надпороговое правило выбора	Правила, использующие турнирную матрицу
27	Минимаксная процедура	
28	Процедура Симпсона	

Таким образом, далее рассматривается суперпозиция 28 перечисленных выше процедур выбора. Перед тем, как перейти к рассмотрению двухступенчатых процедур выбора, приведем краткое описание перечисленных выше процедур выбора. Для этого введем следующие определения.

Рассмотрим критериальные шкалы особого типа, согласно которому положение альтернатив по критериям задано в виде  $n$  отношений линейного порядка  $P_i$ . Напомним, что отношение  $P$  называется линейным порядком, если оно удовлетворяет условиям связности ( $\forall x, y: x \neq y \Rightarrow xPy$  или  $yPx$ ), антирефлексивности ( $\forall x (x, x) \notin P$ ) и транзитивности ( $\forall x, y, z: xPyPz \Rightarrow xPz$ ).

Определение 3.6 [124]. Набор отношений  $(P_1, \dots, P_n)$  называется профилем предпочтений участников и обозначается как  $\vec{P}$  или  $\{P\}_1^n$ .

Обозначим множество профилей из линейных порядков через  $\mathcal{P}$ . Очевидно, что если число альтернатив в  $A$  равно  $m$ , т.е.  $|A| = m$ , то  $|\mathcal{P}| = (m!)^n$ . Введем также понятие сужения профиля  $\vec{P}$  на множество  $X \subseteq A$ .

Определение 3.7 [124]. Сужением профиля  $\vec{P}$  на множество  $X \subseteq A$ ,  $X \neq \emptyset$ , называется профиль  $\vec{P}_X = (P_1/X, \dots, P_n/X)$ , где  $P_i/X = P_i \cap (X \times X)$ .

Обозначим через  $C(\vec{P}_X, X)$  функцию выбора, которая определяется как отображение профиля предпочтений  $\vec{P}_X$  во множество выбранных альтернатив, т.е.  $C: \mathcal{P} \times 2^A \rightarrow 2^A$ , удовлетворяющая условию  $C(\vec{P}_X, X) \subseteq X$  для любого  $X \in 2^A$ . Функции выбора, зависящие от параметров  $q$  и  $k$ , обозначаются как  $C(\vec{P}_X, X, q)$  и  $C(\vec{P}_X, X, k)$  соответственно.

Определение 3.8 [124]. Определим мажоритарное отношение  $\mu$  для  $\vec{P}_X$ :

$$x\mu y \Leftrightarrow \text{card}\{i \in N | xP_i y\} > \text{card}\{i \in N | yP_i x\}.$$

Определение 3.9 [124]. Ориентированный граф мажоритарного отношения  $\mu$  называется мажоритарным графом.

Определение 13.10 [124]. Верхним срезом (верхним контуром) альтернативы  $x$  называется множество  $D(x, \vec{P}_X) = \{y \in X | y\mu x\}$ .

Определение 3.11 [124]. Нижним срезом (нижним контуром) альтернативы  $x$  называется множество  $L(x, \vec{P}_X) = \{y \in X | x\mu y\}$ .

Приведем описание процедур выбора.

#### 1. Правило простого большинства

В выбор входит альтернатива, которая является лучшей для  $50\% + 1$  критериев

$$a \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow \left[ n^+(a, \vec{P}_X) > \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in X} n^+(x, \vec{P}_X) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{P}_X| \right],$$

где  $n^+(a, \vec{P}_X) = \text{card}\{i \in N | \forall y \in X \setminus \{a\}: aP_i y\}$ .

#### 2. Правило относительного большинства

В выбор входят альтернативы, которые являются лучшими по наибольшему числу критериев

$$a \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow [\forall x \in X: n^+(a, \vec{P}_X) \geq n^+(x, \vec{P}_X)],$$

где  $n^+(a, \vec{P}_X) = \text{card}\{i \in N | \forall y \in X \setminus \{a\}: aP_i y\}$ .

#### 3. Обратное правило простого большинства

В выбор входят альтернативы, которые являются худшими по наименьшему числу критериев.

$$a \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow [\forall x \in X: n^-(a, \vec{P}_X) \leq n^-(x, \vec{P}_X)],$$

где  $n^-(a, \vec{P}_X) = \text{card}\{i \in N | \forall y \in X \setminus \{a\}: yP_i a\}$ .

#### 4. Аналог правила одобряющего голосования

Введем величину

$$n^+(a, \vec{P}_X, q) = \text{card}\{i \in N | \text{card}\{y \in X | yP_i a\} \leq q - 1\},$$

которая численно равна числу критериев, у которых альтернатива  $a$  стоит не ниже  $q$ -го места в их упорядочении. Таким образом, если  $q = 1$ , тогда  $a$  – это лучшая альтернатива для критерия  $i$ ; если  $q = 2$ , тогда  $a$  – либо первая, либо вторая наилучшая альтернативы, и.т.д. Число  $q$  будем называть уровнем процедуры.

Аналог правила одобряющего голосования уровня  $q$  определяется следующим образом:

$$a \in C(\vec{P}_X, X, q) \Leftrightarrow [\forall x \in X: n^+(a, \vec{P}_X, q) \geq n^+(x, \vec{P}_X, q)],$$

т.е., выбираются альтернативы, которые находятся среди  $q$  лучших для максимального числа критериев.

Очевидно, что аналог правила одобряющего голосования – это обобщение правила относительного большинства (случай  $q = 1$ ).

### 5. Двухступенчатое правило относительного большинства

Сначала используется правило простого большинства. Если существует альтернатива, которая является наилучшей по  $50\%+1$  критериев, то процедура останавливается. Если же такой альтернативы нет, то выбираются две альтернативы, которые являются наилучшими по наибольшему числу критериев (если их больше двух, то берутся две с наименьшими номерами). Затем, считая, что относительное положение оставшихся альтернатив не изменяется, вновь применяем правило простого большинства – уже на двухэлементном множестве.

Поскольку оценки альтернатив по критериям представляются в виде линейных порядков, всегда (при нечетном числе критериев) существует единственная альтернатива-победитель.

### 6. Правило Хара (Процедура Уэйра)

Правило Хара, в литературе известное также как процедура Уэйра, является модификацией процедуры передачи голосов в случае, когда необходимо избрать одну лучшую альтернативу, которая является наилучшей по  $50\%+1$  критериев.

Сначала используется правило простого большинства. Если существует альтернатива, которая является наилучшей по  $50\%+1$  критериев, то процедура останавливается. Если же такой альтернативы нет, то из предъявления  $X$  вычеркивается альтернатива  $x$ , набравшая минимальное число первых мест. Затем процедура вновь применяется к множеству  $X' = X \setminus \{x\}$  и профилю  $\vec{P}_{X'}$ . Процедура продолжается до тех пор, пока не появится альтернатива, которая будет наилучшей по  $50\%+1$  критериев.

### 7. Правило Борда

Каждой альтернативе  $x \in X$  ставится в соответствие число  $r_i(x, \vec{P}_X)$  равное мощности множества альтернатив, худших, чем  $x$  в критерии  $P_i \in \vec{P}_X$ , то есть  $r_i(x, \vec{P}_X) = |\{b \in X : x P_i b\}|$ . Сумма данных значений для  $i \in N$  называется рангом Борда для альтернативы  $x$ ,

$$r(x, \vec{P}_X) = \sum_{i=1}^n r_i(x, \vec{P}_X).$$

В выбор входят альтернативы с максимальным рангом

$$a \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow [\forall b \in X : r(a, \vec{P}_X) \geq r(b, \vec{P}_X)].$$

### 8. Победитель Кондорсе

Победителем Кондорсе  $C(\vec{P}_X, X)$  для профиля  $\vec{P}_X$  признается альтернатива доминирующая любую другую альтернативу на мажоритарном отношении  $\mu$ , т.е.

$$C(\vec{P}_X, X) = [a \in X | \forall x \in X \setminus \{a\}, a \mu x].$$

### 9. Правило Блэка

Если победитель Кондорсе существует, то он объявляется коллективным выбором, иначе используется правило Борда.

### 10. Обратное правило Борда

Данная процедура выбора была предложена Дж.М. Болдуином. В литературе известна также как процедура Болдуина.

Согласно обратному правилу Борда, для каждой альтернативы подсчитывается ранг Борда. Далее альтернатива с наименьшим рангом выбывает. Ранги Борда пересчитываются для множества альтернатив без выбывшей альтернативы.

Процедура продолжается до тех пор, пока не останутся только альтернативы с одинаковым рангом Борда. Необходимо отметить, что данное правило является суперпозиционным.

### 11. Правило Нансона

Для каждой альтернативы подсчитывается ранг Борда . Затем подсчитывается среднее арифметическое рангов Борда всех альтернатив, входящих в множество  $X$

$$\bar{r}(\vec{P}_X, X) = \frac{\sum_{x \in X} r(x, \vec{P}_X)}{|X|}$$

и исключаются только те альтернативы  $x$ , для которых ранг Борда ниже или равен среднему арифметическому. Затем строится множество  $X' = X \setminus \{Y\}$ , где  $Y \subset X$  – множество альтернатив, имеющих ранги Борда меньше или равные среднему арифметическому, и процедура применяется к суженному профилю  $\vec{P}_{X'}$ . Процедура продолжается до тех пор, пока не останутся только неисключаемые альтернативы.

### 12. Процедура Кумбса

Согласно этой процедуре выбора выбранной считается альтернатива, , которая является наилучшей по  $50\%+1$  критериев. Если такой альтернативы нет, то исключается альтернатива  $x$ , которая считается наихудшей по наибольшему числу критериев. Затем профиль сужается до нового множества  $X' = X \setminus \{x\}$  и процедура продолжается до тех пор, пока не появится альтернатива, набравшая более половины первых мест в упорядочениях по критериям. Отметим здесь разницу между правилом Кумбса и правилом Хара. В правиле Кумбса вычеркиваются худшие

альтернативы, в то время как в правиле Хара вычеркиваются альтернативы, лучшие по наименьшему числу критериев.

### 13. Минимальное доминирующее множество

Множество альтернатив  $Q$  является доминирующим тогда и только тогда, когда любая альтернатива из  $Q$  доминирует любую альтернативу вне  $Q$  по мажоритарному отношению  $\mu$ , т.е.

$$x \in Q \Leftrightarrow [\forall y \in X \setminus Q: x \mu y].$$

Доминирующее множество  $Q$  является минимальным, если ни одно из его собственных подмножеств не является доминирующим.

### 14. Минимальное недоминируемое множество

Множество альтернатив  $Q$  является недоминируемым тогда и только тогда, когда не существует альтернативы вне  $Q$ , которая доминирует какую-либо альтернативу из множества  $Q$ , т.е.

$$x \in Q \Leftrightarrow [\nexists y \in X \setminus Q: y \mu x].$$

Недоминируемое множество является минимальным, если ни одно из его собственных подмножеств не является недоминируемым. Коллективным выбором является минимальное недоминируемое множество, если таковое существует одно, или их объединение, если таковых несколько.

### 15. Минимальное слабоустойчивое множество

Множество альтернатив  $Q$  является слабоустойчивым тогда и только тогда, когда из существования альтернативы  $y$  вне  $Q$ , доминирующей альтернативу  $x$  из  $Q$ , следует существование альтернативы  $z$  из  $Q$  такой, что  $z$  доминирует  $y$ , т.е.

$$x \in Q \Leftrightarrow [\exists y \in X \setminus Q: y \mu x \Rightarrow \exists z \in Q: z \mu y].$$

Слабоустойчивое множество является минимальным, если ни одно из его собственных подмножеств не является слабоустойчивым. Коллективным выбором является минимальное слабоустойчивое множество, если таковое существует одно, или их объединение, если таковых несколько.

## 16. Правило Фишберна

Построим новое бинарное отношение  $\gamma$ , в котором  $x$  доминирует у тогда и только тогда, когда верхний контур альтернативы  $x$  является собственным подмножеством верхнего контура альтернативы  $y$ , т.е.

$$x\gamma y \Leftrightarrow D(x, \vec{P}_X) \subset D(y, \vec{P}_X).$$

Необходимо отметить, что бинарное отношение  $\gamma$  является частичным порядком.

Коллективным выбором будет набор альтернатив, недоминируемых по отношению  $\gamma$ , т.е.

$$x \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow [\nexists y \in X \ y\gamma x].$$

## 17. Непокрытое множество I

Построим новое бинарное отношение  $\delta$ , в котором  $x$  доминирует у тогда и только тогда, когда нижний контур альтернативы  $y$  является собственным подмножеством нижнего контура альтернативы  $x$ , т.е.

$$x\delta y \Leftrightarrow L(x, \vec{P}_X) \supset L(y, \vec{P}_X).$$

Необходимо отметить, что бинарное отношение  $\delta$  является частичным порядком.

Коллективным выбором будет набор альтернатив, недоминируемых по отношению  $\delta$ , т.е.

$$x \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow [\nexists y \in X \ y\delta x].$$

## 18. Непокрытое множество II

Альтернатива  $x$   $B$ -доминирует альтернативу  $y$ , если  $x$  доминирует  $y$  по мажоритарному отношению и верхний контур альтернативы  $x$  является подмножеством верхнего контура альтернативы  $y$ , т.е.

$$xB y \Leftrightarrow x\mu y \ \& \ D(x, \vec{P}_X) \subset D(y, \vec{P}_X).$$

В коллективный выбор входят альтернативы, недоминируемые по отношению  $B$ , т.е.

$$x \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow [\exists y \in X yBx].$$

### 19. Правило Ричалсона

Строится новое бинарное отношение  $\sigma$ , в котором  $x$  доминирует  $y$  тогда и только тогда, когда:

- нижний контур  $y$  является подмножеством нижнего контура  $x$ ;
- верхний контур  $x$  является подмножеством верхнего контура  $y$ ;
- в одном из двух указанных выше случаев вхождение происходит как «собственное подмножество».

$$x\sigma y \Leftrightarrow \begin{cases} D(x, \vec{P}_X) \subseteq D(y, \vec{P}_X) \text{ и} \\ L(x, \vec{P}_X) \supseteq L(y, \vec{P}_X) \text{ и} \\ D(x, \vec{P}_X) \subset D(y, \vec{P}_X) \text{ или } L(x, \vec{P}_X) \supset L(y, \vec{P}_X). \end{cases}$$

В коллективный выбор входят недоминируемые по  $\sigma$  альтернативы, т.е.

$$x \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow [\exists y \in X y\sigma x].$$

### 20. Ядро

В выбор входят альтернативы, недоминируемые на мажоритарном отношении  $\mu$ , т.е.

$$C(\vec{P}_X, X) = [a \in X | \forall x \in X, x\mu a].$$

### 21. $k$ -устойчивые множества

Множество альтернатив  $Q \subseteq X$  называется  $k$ -устойчивым, если до любой альтернативы вне множества  $Q$  существует путь длиной  $s$  ( $s \leq k$ ) от некоторой альтернативы из множества  $Q$  и найдется хотя бы одна альтернатива  $a \in X \setminus Q$ , до которой путь из любой альтернативы из множества  $Q$  имеет длину не менее  $k$ .

### 22. Пороговое правило

Пусть  $v_1(x, \vec{P}_X)$  – число критериев, для которых альтернатива  $x$  является наихудшей в их упорядочениях,  $v_2(x, \vec{P}_X)$  – число критериев, для которых альтернатива  $x$  является второй наихудшей, и так далее,  $v_m(x, \vec{P}_X)$  – число

критериев, для которых альтернатива  $x$  является наилучшей. Затем альтернативы упорядочиваются лексикографически. Говорят, что альтернатива  $x$   $V$ -доминирует альтернативу  $y$  если  $v_1(x, \vec{P}_X) < v_1(y, \vec{P}_X)$  или, если существует  $k \leq m$ , такое что  $v_i(x, \vec{P}_X) = v_i(y, \vec{P}_X)$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ , и  $v_k(x, \vec{P}_X) < v_k(y, \vec{P}_X)$ . Другими словами, в первую очередь сравниваются количества последних мест в упорядочениях для каждой альтернативы, в случае, когда они равны, идет сравнение количества предпоследних мест, и так далее. Выбором являются альтернативы, недоминируемые по  $V$ .

### 23. Первое правило Копланда

Для каждой альтернативы  $x \in X$  вычисляется числовая функция  $u(x, \vec{P}_X)$ , равная разности мощностей нижнего и верхнего среза альтернативы  $x$  в мажоритарном отношении  $\mu$ , т.е.

$$u(x, \vec{P}_X) = |L(x, \vec{P}_X)| - |D(x, \vec{P}_X)|.$$

В коллективный выбор входят альтернативы с наибольшим значением числовой функции, т.е.

$$x \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow [\nexists y \in X: u(y, \vec{P}_X) > u(x, \vec{P}_X)].$$

### 24. Второе правило Копланда

В коллективный выбор входят альтернативы с максимальной мощностью нижнего контура.

### 25. Третье правило Копланда

В коллективный выбор входят альтернативы с минимальной мощностью верхнего контура.

### 26. Надпороговое правило выбора

Пусть на множестве  $A$  задан критерий  $\varphi(x)$ ,  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^1$ , а на множестве  $2^A$  задана функция порога  $V: 2^A \rightarrow \mathbb{R}^1$ , сопоставляющая каждому набору  $X \in 2^A$  пороговый уровень  $V(X)$ .

Правило надпорогового выбора представлено в виде следующего выражения:

$$y \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow (y \in X : \varphi(y) \geq V(X)).$$

### 27. Минимаксная процедура

Построим матрицу  $S^-(\vec{P}_X, X)$  такую, что

$$\forall a, b \in X, S^-(\vec{P}_X, X) = (n(a, b, \vec{P}_X)),$$

где  $n(a, b, \vec{P}_X) = \text{card}\{i \in N \mid a P_i b\}$ ,  $n(a, a, \vec{P}_X) = -\infty$ .

Коллективный выбор определяется как

$$x \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow x \in \arg \min_{a \in X} \max_{b \in X} \{n(b, a, \vec{P}_X)\}.$$

### 28. Процедура Симпсона

Построим матрицу  $S^+(\vec{P}_X, X)$  такую, что

$$\forall a, b \in X, S^+(\vec{P}_X, X) = (n(a, b, \vec{P}_X)),$$

где  $n(a, b, \vec{P}_X) = \text{card}\{i \in N \mid a P_i b\}$ ,  $n(a, a, \vec{P}_X) = +\infty$ .

Коллективный выбор определяется как

$$x \in C(\vec{P}_X, X) \Leftrightarrow x \in \arg \max_{a \in X} \min_{b \in X} \{n(a, b, \vec{P}_X)\}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению существующих нормативных условий.

#### 3.4.2 Нормативные условия

В [226, 227, 228, 223] приведен набор нормативных условий, которыми могут обладать различные процедуры выбора:

- условия рациональности;
- условия монотонности;
- условие пороговой некомпенсируемости.

Приведем краткое описание нормативных условий.

#### Условия рациональности

Выделяют четыре основных условия рациональности для функций выбора.

## 1. Условие Наследования (Н)

$$\forall X, X' \in 2^A, X' \subseteq X \Rightarrow C(\vec{P}_{X'}, X') \supseteq C(\vec{P}_X, X) \cap X'.$$

Если сузить предъявляемое множество, отбросив из него часть альтернатив, то те альтернативы, которые выбирались из исходного множества и остались в суженном множестве, попадут в выбор из него.

Пример 3.11. Пусть  $X = \{a, b, c\}$ , а выбор альтернатив осуществляется по обратному правилу простого большинства. Рассмотрим следующий профиль  $\vec{P}_X$

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
a	a	c	a	b
b	b	b	b	a
c	c	a	c	c

Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $b$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_X, X) = \{b\}$ .

Теперь рассмотрим множество  $X' = X \setminus \{c\}$ . Тогда сужение профиля  $\vec{P}_X$  на множество  $X'$ , т.е.  $\vec{P}_{X'}$ , выглядит следующим образом

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
a	a	b	a	b
b	b	a	b	a

Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $a$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_{X'}, X') = \{a\}$ .

Тогда  $C(\vec{P}_{X'}, X') \not\supseteq C(\vec{P}_X, X) \cap X'$ . Следовательно, условие **Н** не выполняется.

## 2. Условие Согласия (С)

$$\forall X', X'' \in 2^A \rightarrow C(\vec{P}_{X' \cup X''}, X' \cup X'') \supseteq C(\vec{P}_{X'}, X') \cap C(\vec{P}_{X''}, X'').$$

Условие Согласия (**С**) требует, чтобы все альтернативы, выбираемые одновременно из множеств  $X'$  и  $X''$ , включались в выбор и при предъявлении их объединения  $X = X' \cup X''$ .

Рассмотрим предыдущий пример. Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $b$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_X, X) = \{b\}$ .

Теперь рассмотрим множество  $X' = X \setminus \{c\}$ . Тогда сужение профиля  $\vec{P}_X$  на множество  $X'$ , т.е.  $\vec{P}_{X'}$ , выглядит следующим образом

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
a	a	b	a	b
b	b	a	b	a

Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $a$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_{X'}, X') = \{a\}$ .

Наконец, рассмотрим множество  $X'' = X \setminus \{b\}$ . Тогда сужение профиля  $\vec{P}_X$  на множество  $X''$ , т.е.  $\vec{P}_{X''}$ , выглядит следующим образом

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
a	a	c	a	a
c	c	a	c	c

Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $a$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_{X''}, X'') = \{a\}$ .

Тогда  $C(\vec{P}_{X'}, X') \cap C(\vec{P}_{X''}, X'') = \{a\} \not\subseteq C(\vec{P}_X, X)$ . Следовательно, условие **С** не выполняется.

### 3. Условие Отбрасывания (О)

$$\forall X, X' \in 2^A, X' \subseteq X \setminus C(\vec{P}_X, X) \Rightarrow C(\vec{P}_{X \setminus X'}, X \setminus X') = C(\vec{P}_X, X).$$

Условию Отбрасывания (О) удовлетворяют такие функции выбора, у которых сужение  $X$  за счет отбрасывания некоторых или всех альтернатив, не выбранных из исходного множества  $X$ , не изменяет выбор.

Рассмотрим предыдущий пример. Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $b$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_X, X) = \{b\}$ .

Теперь рассмотрим множество  $X' = \{c\}$ . Тогда сужение профиля  $\vec{P}_X$  на множество  $X \setminus X'$ , т.е.  $\vec{P}_{X \setminus X'}$ , выглядит следующим образом

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
a	a	b	a	b
b	b	a	b	a

Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $a$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_{X \setminus X'}, X \setminus X') = \{a\}$ .

Тогда  $C(\vec{P}_{X \setminus X'}, X \setminus X') \neq C(\vec{P}_X, X)$ . Следовательно, условие О не выполняется.

#### 4. Аксиома выбора Эрроу (ACA)

$$\forall X, X' \in 2^A, X' \subseteq X \Rightarrow \begin{cases} \text{если } C(\vec{P}_X, X) = \emptyset, \text{то } C(\vec{P}_{X'}, X') = \emptyset, \\ \text{если } C(\vec{P}_X, X) \cap X' \neq \emptyset, \text{то } C(\vec{P}_{X'}, X') = C(\vec{P}_X, X) \cap X'. \end{cases}$$

В случае, когда выбор при всех  $X$  не пуст, аксиома выбора Эрроу (**ACA**) требует, чтобы все альтернативы, выбирающиеся из исходного множества  $X$  и оставшиеся в суженном профиле  $X'$ , и только они, выбирались из  $X'$ .

Рассмотрим предыдущий пример. Аксиома выбора Эрроу (ACA) не выполняется, так как не выполняется условие Н.

Классическая рациональность включает выполнение условий Н, С и О, т.е. условий Наследования, Отбрасывания и Согласия. Условие ACA является усилением каждого из условий Н, С, О.

#### Условия монотонности

##### 1. Условие монотонности 1

$$\forall X \in 2^A, x \in C(\vec{P}_X, X), \forall \vec{P}_X, \vec{P}'_X: (\forall a, b \in X, a P_i b \Leftrightarrow a P'_i b \ \& \ \exists y \in X, y P_i x \Rightarrow x P'_i y) \\ \Rightarrow x \in C(\vec{P}'_X, X).$$

Объясним это условие. Предположим, что альтернатива  $x \in X$  выбирается при данных значениях альтернатив по критериям. Если изменить значение по различным критериям для альтернативы  $x$  так, что ее положение улучшается, а относительное сравнение пары любых других альтернатив по критериям остается неизменным, то альтернатива  $x$  по-прежнему будет выбрана.

Пример 3.12. Пусть  $X = \{a, b, c\}$ , а выбор альтернатив осуществляется по обратному правилу простого большинства. Рассмотрим следующий профиль  $\vec{P}_X$

P1	P2	P3	P4	P5
$a$	$a$	$c$	$a$	$b$
$b$	$b$	$b$	$b$	$a$
$c$	$c$	$a$	$c$	$c$

Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $b$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_X, X) = \{b\}$ .

Рассмотрим профиль  $\vec{P}'_X$ , который отличается от профиля  $\vec{P}_X$  тем, что положение альтернативы  $b$  в  $P'_2$  улучшилось, а в остальных предпочтениях осталось прежним:

	$P'_1$	$P'_2$	$P'_3$	$P'_4$	$P'_5$
$a$	$b$	$c$	$a$	$b$	
$b$	$a$	$b$	$b$	$a$	
$c$	$c$	$a$	$c$	$c$	

Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $b$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}'_X, X) = \{b\}$ .

Тогда  $b \in C(\vec{P}_X, X)$  и  $b \in C(\vec{P}'_X, X)$ . Следовательно, условие монотонности 1 выполняется для данного примера.

## 2. Условие монотонности 2

$$\forall X \in 2^A, x, y \in C(\vec{P}_X, X), X' = X \setminus \{x\}, X'' = X \setminus \{y\} \rightarrow x \in C(\vec{P}_{X''}, X'')$$

$$\& y \in C(\vec{P}_{X'}, X').$$

Предположим, что две альтернативы  $x, y \in X$  выбираются при данных значениях альтернатив по критериям. Условие монотонности 2 выполняется, если при удалении одной из выбранных альтернатив ( $x$  или  $y$ ) вторая альтернатива ( $y$  или  $x$ ) по-прежнему будет входить в выбор.

Пример 3.13. Пусть  $X = \{a, b, c\}$ , а выбор альтернатив осуществляется по обратному правилу простого большинства. Рассмотрим следующий профиль  $\vec{P}_X$

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$B$	$a$	$a$	$a$	$a$	
$C$	$b$	$b$	$b$	$c$	
$A$	$c$	$c$	$c$	$b$	

Согласно обратному правилу простого большинства альтернативы  $a$  и  $b$  являются наилучшими, т.е.  $C(\vec{P}_X, X) = \{a, b\}$ .

Теперь рассмотрим множество  $X' = X \setminus \{b\}$ . Тогда сужение профиля  $\vec{P}_X$  на множество  $X'$ , т.е.  $\vec{P}_{X'}$ , выглядит следующим образом

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
B	a	a	a	a
A	b	b	b	b

Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $a$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_{X'}, X') = \{a\}$ .

Наконец, рассмотрим множество  $X'' = X \setminus \{a\}$ . Тогда сужение профиля  $\vec{P}_X$  на множество  $X''$ , т.е.  $\vec{P}_{X''}$ , выглядит следующим образом

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
B	b	b	b	c
C	c	c	c	b

Согласно обратному правилу простого большинства альтернатива  $b$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_{X''}, X'') = \{b\}$ .

Тогда  $\{a, b\} \in C(\vec{P}_X, X)$ ,  $\{a\} \in C(\vec{P}_{X'}, X')$  и  $\{b\} \in C(\vec{P}_{X''}, X'')$ . Следовательно, условие монотонности 2 выполняется для данного примера.

### 3. Условие строгой монотонности

$$\forall X \in 2^A, \forall y \in X, y \notin C(\vec{P}_X, X), \forall \vec{P}_X, \vec{P}'_X: (\forall a, b \in X, a P_i b \Leftrightarrow a P'_i b \ \& \ a P_i y \Rightarrow y P'_i a)$$

$$\rightarrow C(\vec{P}'_X, X) = \begin{cases} C(\vec{P}_X, X) \text{ или} \\ \{y\} \text{ или} \\ C(\vec{P}_X, X) \cup \{y\}. \end{cases}$$

Если изменить значение по различным критериям для не входящей в выбор альтернативы  $y \in X$  так, что ее положение улучшится, а относительное сравнение пары любых других альтернатив по критериям останется неизменным, то итоговый выбор останется неизменным и/или будет содержать альтернативу  $y$ .

Пример 3.14. Пусть  $X = \{a, b, c\}$ , а выбор альтернатив осуществляется по правилу Борда. Рассмотрим следующий профиль  $\vec{P}_X$

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>
a	a	b	b
c	b	a	a
b	c	c	c

Вычислим ранг Борда для каждой альтернативы:  $r(a, \vec{P}_X) = 6, r(b, \vec{P}_X) = 5, r(c, \vec{P}_X) = 1$ . Согласно правилу Борда альтернатива  $a$  является наилучшей, т.е.  $C(\vec{P}_X, X) = \{a\}$ .

Рассмотрим профиль  $\vec{P}'_X$ , который отличается от профиля  $\vec{P}_X$  тем, что положение альтернативы  $c$  в  $P'_1$  улучшилось, а в остальных предпочтениях осталось прежним:

	$\mathbf{P}'_1$	$\mathbf{P}'_2$	$\mathbf{P}'_3$	$\mathbf{P}'_4$
$c$	$a$	$b$	$b$	
$a$	$b$	$a$	$a$	
$b$	$c$	$c$	$c$	

Вычислим ранг Борда для каждой альтернативы:  $r(a, \vec{P}_X) = r(b, \vec{P}_X) = 5, r(c, \vec{P}_X) = 2$ . Согласно правилу Борда альтернативы  $a$  и  $b$  являются наилучшими, т.е.  $C(\vec{P}'_X, X) = \{a, b\}$ .

$$C(\vec{P}'_X, X) \neq \begin{cases} C(\vec{P}_X, X) \text{ или} \\ \{c\} \text{ или} \\ C(\vec{P}_X, X) \cup \{c\}. \end{cases}$$

Следовательно, условие строгой монотонности не выполняется.

### Условие пороговой некомпенсируемости

Рассмотрим две альтернативы  $x, y \in X$ , каждая из которых характеризуется набором критериальных оценок  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  и  $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_n(y)$ , которые могут принимать  $m$  различных значений, где  $n$  - число критериев.

Обозначим за  $v_j(x)$  количество критериев, по которым альтернатива  $x$  принимает значение  $j$ , где  $j \in [1, m]$ .

$$v_j(x) = |\{i \in [1, n] : \varphi_i(x) = j\}|.$$

Условие пороговой некомпенсируемости может быть сформулировано следующим образом

$$\varphi(x) > \varphi(y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1(x) < v_1(y) \text{ при } m = 2, \\ \exists k \in [2, m-1]: \forall j \in [1, k-1] v_j(x) = v_j(y) \text{ и } v_k(x) < v_k(y) \text{ при } m \geq 3. \end{array} \right.$$

Иначе говоря, низкие оценки по одному критерию не компенсируются высокими оценками по всем остальным критериям.

Пример 3.15. Пусть  $X = \{a, b, c\}$ , а выбор альтернатив осуществляется по правилу Борда. Рассмотрим следующий профиль  $\vec{P}_X$

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$c$	$a$	$b$	$b$
$a$	$b$	$a$	$a$
$b$	$c$	$c$	$c$

Вычислим ранг Борда для каждой альтернативы:  $r(a, \vec{P}_X) = r(b, \vec{P}_X) = 5, r(c, \vec{P}_X) = 2$ . Согласно правилу Борда альтернативы  $a$  и  $b$  являются наилучшими, т.е.  $C(\vec{P}_X, X) = \{a, b\}$ .

Теперь запишем профиль  $\vec{P}_X$  в следующем виде

$X$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$
$a$	2	3	2	2
$b$	1	2	3	3
$c$	3	1	1	1

Согласно аксиоме пороговой некомпенсируемости, альтернатива  $c$  хуже альтернативы  $b$ , а альтернатива  $b$  хуже альтернативы  $a$ .

Аксиома пороговой некомпенсируемости не выполняется, так как  $\{a\} \neq C(\vec{P}_X, X)$ .

### 3.4.3 Двухступенчатые процедуры выбора

Приведем в Таблице 3.9 список исследуемых двухступенчатых процедур выбора.

Таблица 3.9 – Двухступенчатые процедуры выбора

№	Этап 1	Этап 2
1-121		Позиционные правила (11 процедур)
122-231	Позиционные правила (11 процедур)	Правила, использующие мажоритарное отношение (10 процедур)
232-286		Правила, использующие вспомогательную числовую шкалу (5 процедур)

### Продолжение таблицы 3.9

№	Этап 1	Этап 2
287-308		Правила, использующие турнирную матрицу (2 процедуры)

Таким образом, далее рассматриваются 308 двухступенчатых процедур выбора 4 различных типов.

Перед тем как перейти к исследованию свойств данных процедур выбора, необходимо сделать несколько замечаний.

Примечание 3.3. В Таблице 3.10 приведен список двухступенчатых процедур выбора, не имеющих смысла.

Таблица 3.10 – Двухступенчатые процедуры выбора, не имеющие смысла («...» – любая рассматриваемая процедура выбора)

Двухступенчатая процедура		
№	Этап 1	Этап 2
1-28	Правило простого большинства	...
113-140	Двухступенчатое правило относительного большинства	...
141-168	Правило Хара (Процедура Уэйра)	...
231	Обратное правило Борда	Правило Борда
233	Обратное правило Борда	Обратное правило Борда
234	Обратное правило Борда	Правило Нансона
259	Правило Нансона	Правило Борда
261	Правило Нансона	Обратное правило Борда
262	Правило Нансона	Правило Нансона
281-308	Процедура Кумбса	...

Так как правило Простого большинства, Двухступенчатое правило относительного большинства, Правило Хара (Процедура Уэйра) и правило Кумбса предполагают выбор единственной альтернативы, то двухступенчатые процедуры выбора 1-28, 113-168, 281-308, у которых на первом этапе используется эти правила, не имеют смысла, так как второй этап данных процедур не приводит ни к каким изменениям.

Также не имеют смысла двухступенчатые процедуры выбора 231, 233, 234, 259, 261, 262, так как процедуры выбора, используемые на первом этапе, возвращают набор альтернатив, имеющих одинаковый ранг Борда. Аналогичная ситуация наблюдается для двухступенчатых процедур выбора 283, 291, у которых после первого этапа остается набор альтернатив, имеющих одинаковое количество наихудших оценок.

Таким образом, двухступенчатые процедуры выбора, приведенные в Таблица 3.10, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Примечание 3.4. Свойства двухступенчатых правил выбора, использующих правило Блэка, полностью совпадают со свойствами двухступенчатых правил выбора, использующих правило Борда, в случае, когда победитель Кондорсе отсутствует.

Таким образом, остается исследовать свойства только 190 двухступенчатых процедур выбора.

### 3.4.4 Исследование свойств процедур выбора

Исследование свойств процедур выбора можно поделить на две стадии. На первой стадии происходит исследование свойств 28 существующих процедур выбора. На следующем этапе происходит исследование свойств 190 двухступенчатых процедур выбора.

Исследование свойств рассматриваемых процедур выбора осуществлялось следующим образом. В случае, когда рассматриваемое свойство не выполняется, приводится пример, который опровергает выполнение данного свойства. Напротив, в случае, когда процедура выбора удовлетворяет рассматриваемому нормативному условию, приводится необходимое доказательство.

Свойства, которым удовлетворяют исследуемые процедуры выбора, приведены в Таблице Б.1 и Таблице Б.2 Приложения Б.

### 3.4.5 Вычислительная сложность процедур выбора

В Таблице 3.11 приводится информация о вычислительной сложности 28 существующих процедур выбора.

Таблица 3.11 – Теоретическая вычислительная сложность процедур выбора ( $M$  – исходное количество альтернатив,  $n$  – число критериев,  $q, k$  – параметры процедур выбора,  $l, d$  – параметры, зависящие от входных данных,  $d \geq 1, 1 \leq l \leq M$ )

№	Название процедуры выбора	Вычислительная сложность (теоретическая)	Максимальное число оставшихся после применения процедуры альтернатив
1	Правило простого большинства	$O(M \cdot n)$	1
2	Правило относительного большинства	$O(M \cdot n)$	$n$
3	Обратное правило простого большинства	$O(M \cdot n)$	$M - n$

### Продолжение Таблицы 3.11

4	Аналог правила одобряющего голосования ( $q > 1$ )	$O(M \cdot n \cdot \log_2(q + 1))$	$q \cdot n$
5	Двухступенчатое правило относительного большинства	$O(M \cdot n)$	1
6	Правило Хара (Процедура Уэйра)	$O(M \cdot n)$	1
7	Правило Борда	$O(M \cdot \log_2(M) \cdot n)$	$M$
8	Правило Блэка	$O(M \cdot \log_2(M) \cdot n)$	$M$
9	Обратное правило Борда	$O(M^2 \cdot n)$	$M$
10	Правило Нансона	$O(M^2 \cdot n)$	$M$
11	Процедура Кумбса	$O(M^2 \cdot n)$	$n$
12	Минимальное доминирующее множество	$O(M^{2,37 \cdot d})$	$M$
13	Минимальное непокрытое множество	$O(M^{2,37 \cdot d})$	$M$
14	Минимальное слабоустойчивое множество	$O(M^2 \cdot n + \sum_{i=1}^l C_M^i \cdot (M - i))$	$M$
15	Правило Фишберна	$O(M^3)$	$M$
16	Непокрытое множество I	$O(M^3)$	$M$
17	Непокрытое множество II	$O(M^3)$	$M$
18	Правило Ричалсона	$O(M^3)$	$M$
19	Победитель Кондорсе	$O(M \cdot n)$	1
20	Ядро	$O(M^2 \cdot n)$	$M$
21	$k$ -устойчивые множества ( $k > 1$ )	$O(M^{2,37 \cdot k})$	$M$
22	Пороговое правило	$O(M \cdot n)$	$M$
23	Первое правило Копланда	$O(M^2 \cdot n)$	$M$
24	Второе правило Копланда	$O(M^2 \cdot n)$	$M$
25	Третье правило Копланда	$O(M^2 \cdot n)$	$M$
26	Надпороговое правило выбора	$O(M)$	$M$
27	Минимаксная процедура	$O(M^2 \cdot n)$	$M$
28	Процедура Симпсона	$O(M^2 \cdot n)$	$M$

В соответствии с информацией в Таблицы 3.11 поделим все двухступенчатые процедуры на несколько групп в зависимости от их вычислительной сложности. Результаты деления приведены в Таблице 3.12

Таблица 3.12 – Теоретическая вычислительная сложность двухступенчатых процедур выбора («...» – любая рассматриваемая процедура выбора)

Двухступенчатые процедуры выбора	
Этап 1	Этап 2
Процедуры с низкой вычислительной сложностью	
Правило относительного большинства Аналог правила одобряющего голосования ( $q > 1$ )	...

## Продолжение Таблицы 3.12

Обратное правило простого большинства Правило Борда Правило Блэка	Правило простого большинства Двухступенчатое правило относительного большинства Правило Хара (Процедура Уэйра) Правило Борда Правило Блэка Победитель Кондорсе Правило относительного большинства Пороговое правило Обратное правило простого большинства Аналог правила одобряющего голосования ( $q>1$ ) Надпороговое правило выбора
Процедуры выбора с вычислительной сложностью, сильно зависящей от входных данных	
Обратное правило простого большинства Правило Борда Правило Блэка	Обратное правило Борда Правило Нансона Ядро Первое правило Копланда Второе правило Копланда Третье правило Копланда Минимаксная процедура Процедура Симпсона Процедура Кумбса
Процедуры со средней вычислительной сложностью	
Обратное правило Борда Правило Нансона	Правило простого большинства Двухступенчатое правило относительного большинства Правило Хара (Процедура Уэйра) Правило Борда Правило Блэка Победитель Кондорсе Правило относительного большинства Пороговое правило Обратное правило простого большинства Аналог правила одобряющего голосования ( $q>1$ ) Надпороговое правило выбора Обратное правило Борда Правило Нансона Ядро Первое правило Копланда Второе правило Копланда Третье правило Копланда Минимаксная процедура Процедура Симпсона Процедура Кумбса
Процедура Кумбса	...

## Продолжение Таблицы 3.12

Процедуры с высокой вычислительной сложностью	
Обратное правило простого большинства Правило Борда Правило Блэка Обратное правило Борда Правило Нансона	Минимальное доминирующее множество Минимальное непокрытое множество Минимальное слабоустойчивое множество Правило Фишберна Непокрытое множество I Непокрытое множество II Правило Ричалсона $k$ -устойчивые множества ( $k > 1$ )

### 3.4.6 Время выполнения двухступенчатых процедур выбора

Пусть исходное число альтернатив ( $M_1$ ) равно 300 тыс., а число критериев ( $n$ ), по которым осуществляется выбор, равно 10. Допустим, компьютер выполняет около 3 млрд. операций в секунду, а на каждую операцию требуется порядка 50 тактов. Рассмотрим ситуацию, когда на второй этап двухступенчатой процедуры поступает 10 тыс., 50 тыс. и 100 тыс. альтернатив ( $M_2$ ).

Произведем расчет теоретического времени выполнения некоторых двухступенчатых процедур выбора, принадлежащих различным группам в соответствии с Таблицей 3.12. Полученные результаты приведены в Таблице 3.13.

Таблица 3.13 – Время выполнения некоторых двухступенчатых процедур выбора ( $M_2$  – число альтернатив, попавших на второй этап)

Двухступенчатые процедуры выбора		Время выполнения		
Этап 1	Этап 2	$M_2=10000$	$M_2=50000$	$M_2=100000$
Процедуры с низкой вычислительной сложностью				
Правило относительного большинства	Непокрытое множество I	$\approx 50$ мс		
Обратное правило простого большинства	Победитель Кондорсе	$\approx 52$ мс	$\approx 58$ мс	$\approx 66$ мс
Правило Борда	Правило относительного большинства	$\approx 910$ мс	$\approx 918$ мс	$\approx 926$ мс
Процедуры выбора с вычислительной сложностью, сильно зависящей от входных данных				
Обратное правило простого большинства	Минимаксная процедура	$\approx 16$ с	$\approx 7$ мин	$\approx 27$ мин
Процедуры со средней вычислительной сложностью				
Обратное правило Борда	Правило простого большинства	$\approx 4$ ч 12 мин		
Процедуры с высокой вычислительной сложностью				
Обратное правило простого большинства	Правило Ричалсона	$\approx 46$ ч 20 мин	$\approx 241$ день	$\approx 5$ лет

Результаты, приведенные в Таблице 3.13, показывают, какие из предложенных двухступенчатых процедур выбора могут применяться на больших объемах данных, а какие процедуры выбора применять не рекомендуется, так как они не позволяют получить результаты за приемлемое время.

### 3.4.7 Некоторые выводы

В работе исследовано 28 известных и 190 двухступенчатых процедур многокритериального выбора на предмет удовлетворения существующим нормативным условиям. Нормативные условия показывают, каким образом изменяется конечный выбор при изменении предъявляемого множества альтернатив, оценок альтернатив по критериям, набора критериев, по которым осуществляется выбор. Определение того, какие процедуры выбора наименее устойчивы, а какие наиболее уязвимы к изменениям этих параметров, приводит к более глубокому пониманию функционирования существующих процедур выбора, фундаментальных свойств выбора, а также того, насколько постоянен (устойчив) и осмыслен набор альтернатив, полученный в результате применения заданной процедуры выбора.

В результате исследования было выявлено, что из исследуемых известных процедур выбора только Правило простого большинства, Победитель Кондорсе, Ядро, Надпороговое правило выбора с фиксированным значением порога удовлетворяют условию Н, только Минимальное доминирующее множество, Непокрытое множество II, Победитель Кондорсе, Ядро, Надпороговое правило выбора с фиксированным значением порога – условию С, только Правило простого большинства, Минимальное доминирующее множество, Надпороговое правило выбора с фиксированным значением порога – условию О. Что касается двухступенчатых процедур выбора, то большинство из них не удовлетворяют ни одному из нормативных условий. Лишь некоторые из них удовлетворяют условию монотонности 1. Более подробная ин-

формация о том, каким нормативным условиям удовлетворяют рассматриваемые процедуры выбора, приведена в Таблице 3.10.

Для оценки вычислительной сложности реализации моделей для реальных данных использована оценка среднего времени расчетов. Показано, что те процедуры, которые на первом этапе используют сложные с точки зрения вычислительной сложности процедуры выбора, требуют большого времени. Это означает, что такие двухступенчатые процедуры выбора не рекомендуется использовать на больших объемах данных. Процедуры, которые на первом этапе используют простые с точки зрения вычислительной сложности, а на втором – вычислительно сложные процедуры выбора, могут применяться на большом объеме данных, но их применение сильно зависит от количества альтернатив, оставшихся после первого этапа. Процедуры, которые используют на обеих стадиях простые с точки зрения вычислительной сложности процедуры выбора, могут применяться без ограничений на больших объемах данных.

Результаты проведенных исследований нашли отражение в работах [229, 230].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выполнении проекта получены следующие основные результаты, могут быть сделаны следующие выводы и рекомендации:

- предложена обобщенная математическая модель для отыскания оптимального расписания движения поездов по напряженным (одноколейным) участкам железнодорожного пути на случай "пакетного" пропуска поездов по этим участкам пути; сформулирована на ее основе задача отыскания оптимальной очередности движения поездов на этом участке в виде задачи дискретного программирования;
- построена новая математическая модель и сформулирована на ее основе задача отыскания оптимальной стратегии перемещения порожних вагонов компании-владельца вагонного парка в условиях неопределенности спроса на вагоны со стороны потенциальных заказчиков (грузоотправителей) как задачи дискретного программирования;
- построена новая теоретико-игровая модель для отыскания оптимальных тарифов на перевозки грузов железнодорожным транспортом в виде игры многих лиц, имеющей специальную структуру;
- построена новая математическая модель для оптимизации работы железнодорожной сортировочной станции и сформулирована на ее основе задача оптимизации работы железнодорожной сортировочной станции в виде задачи дискретного программирования;
- предложена обобщенная математическая модель для отыскания оптимальных объемов выработки электроэнергии базовыми генераторами региональных сетей электроснабжения и оптимальных объемов хранения электроэнергии в форме игры многих лиц на полиэдральных множествах стратегий игроков на случай, когда электроэнергия может закупаться пользователями на региональных рынках электроэнергии;

- в рамках теоретико-игрового исследования по библиометрии показана эквивалентность вектора Шепли и метода равного разделения долей соавторов при оценивании вклада авторов в совместные публикации;
- построены эффективные алгоритмы для расчета индексов влияния при формировании коалиций в случае, когда все игроки имеют равное количество голосов и с учетом предпочтений агентов;
- проведены экспериментальные исследования методов оценивания релевантности строк и текстов для решения задач автоматизации аннотирования статей; разработана и исследована мера близости между двумя предложениями на основе аннотированных суффиксных деревьев; разработан метод лифтинга в таксономиях на основе принципа максимального правдоподобия; составлены коллекции для экспериментирования: аннотации статей из журналов ACM и IEEE;
- исследованы альтернативные процедуры агрегирования исходных переменных индекса конкурентоспособности промышленного производства, разработанного экспертами ЮНИДО; вместо кардинальной агрегирующей функции применены ординальные методы ранжирования, заимствованные из теории коллективного выбора, основанные на правиле большинства; показано, что некоторые из новых версий глобального рейтинга представляют данный набор критериев лучше, чем исходная версия;
- проанализированы нечеткостные методы сравнения гистограмм применительно к возможности их использования для ранжирования вузов по гистограммам ЕГЭ поступивших абитуриентов; предложена модель «идеально-го» зачисления абитуриентов и показано, что распределение зачисленных абитуриентов в вуз в такой модели будет унимодальным при достаточно общих предположениях о функции предпочтения; поставлена и решена задача оптимального преобразования гистограмм, приводящей ее к унимодальному виду;

- найдены необходимые и достаточные условия на уровень искажений гистограмм, при выполнении которых результат сравнения гистограмм некоторыми наиболее популярными вероятностными методами не изменится;
- проведена серия экспериментов имитационного моделирования поведения игорков на бирже, в которой агенты (трейдеры) являются мелкими и/или средними игроками; найдены условия на параметры модели (опыт/удачливость трейдера, используемые инструменты торговли и др.), при которых вероятность получения прибыли трейдером достаточно высока/низка;
- в рамках развития теории важности критериев определено и исследовано понятие превосходства в важности одной группы критериев над другой; представлены решающие правила для количественной и специальных видов качественной информации о группах критериев; предложено новое аналитическое правило для многокритериальных задач, в которых критерии с порядковой шкалой нестрого упорядочены по важности;
- в рамках исследования манипулирования правил агрегирования предпочтений были найдены индексы манипулируемости при бесконечно большом числе избирателей для популярных позиционных правил коллективного выбора; была исследована вычислительная сложность различных задач и алгоритмов манипулирования правил агрегирования предпочтений;
- в рамках исследования индексов поляризованности проведено сравнение индексов поляризованности Александрова-Голубенко и Эстебана-Рэя в случаях равного распределения четного и нечетного числа групп; кроме того, проведено сравнение указанных индексов со среднеквадратичным отклонением положений групп от среднего значения; исследована устойчивость этих индексов к малым возмущениям;
- в рамках исследования свойств процедур выбора, основанных на суперпозиции, проанализировано 28 известных и 190 двухступенчатых процедур многокритериального выбора на предмет удовлетворения существующим

нормативным условиям (рациональности, монотонности, пороговой некомпенсируемости), которые характеризуют качественные оценки процедур выбора; кроме того, проанализирована вычислительная сложность рассмотренных процедур выбора.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Отчет МНУЛ анализа и выбора решений, Т3-93 за 2013г.
- 2 Belenky A. Two Classes of Games on Polyhedral Sets in Systems Economic Studies// In Net-work Models in Economics and Finance, Series: Springer Optimization and Its Applications, 2014, 35-84.
- 3 Belenky A.S. Finding Optimal Production and Selling Strategies for an Electricity Generator in a Part of a Country's Electrical Grid// Procedia Computer Science, 2014, 1150-1159.
- 4 Беленький А.С. Минимаксные задачи планирования с линейными ограничениями и методы их решения// Автоматика и Телемеханика, 1981, 10, 157-170.
- 5 Belenky A.S. A game-theoretic approach to optimizing the scale of incorporating renewable sources of energy and electricity storing systems in a regional electrical grid// Energy Systems (to appear in 2015).
- 6 Belenky A.S. Finding an optimal strategy of incorporating renewable sources of energy and electricity storing systems in a regional electrical grid// Energy Systems (to appear in 2015).
- 7 Зорин И.А. Математические модели для анализа пропускной способности сортировочной станции на сети железных дорог// Выпускная квалификационная работа бакалавра. Научный руководитель А.С. Беленький, НИУ ВШЭ, Москва, 2014.
- 8 Климова Н.А. Математическое моделирование формирования конкурентоспособных тарифов на перемещение грузов по сети железных дорог// Магистерская диссертация, Научный руководитель А.С. Беленький, НИУ ВШЭ, Москва, 2014.
- 9 Каминская А.Ю. Разработка механизма управления сегментами железной дороги на основе комбинаторного аукциона и анализ его свойств// Выпу-

ская квалификационная работа бакалавра. Научный руководитель А.С. Беленький, НИУ ВШЭ, Москва, 2011.

- 10 Belenky A.S., Yunusova A.I. Games with Connected Player Strategies for Analyzing the Competitiveness of a Railroad Company in a Cargo Transportation Marketplace// Proc. of the 2013 International Conference on Information Science and Cloud Computing Companion, 7-8 December 2013, Guangzhou, China, IEEE Computer Society, Los Alamitos, California, Washington, Tokyo, 194-200.
- 11 Лебедева О.Н. Оптимизация использования подвижного состава грузовой компании на сети железных дорог в условиях неопределенности// Магистерская диссертация, Научный руководитель А.С. Беленький, НИУ ВШЭ, Москва, 2014.
- 12 Belenky A.S., Fedin G., Klimova N., Lebedeva O., Yunusova A. Optimally planning the use of railcars by a large railcar fleet management company// Abstracts of International Conference, Volos, Greece, 2014, 16-17.
- 13 Belenky A.S., Fedin G., Lebedeva O., Yunusova A. A large-scale fleet management problem// Abstracts of International Conference, VeRoLog, 2014, Oslo, Norway, 2014.
- 14 Максимова М.С. Формирование графика движения грузовых поездов на напряженном участке пути с помощью одношаговых аукционов// Магистерская диссертация, Научный руководитель А.С. Беленький, НИУ ВШЭ, Москва, 2014.
- 15 Egghe L., Rousseau R., Van Hooydonk G. Methods for Accrediting Publications to Authors or Countries: Consequences for Evaluation Studies// Journal of the American Society for Information Science, 2000, 1(2), 145-157.
- 16 Lindsey D. Production and Citation Measures in the Sociology of Science: The Problem of Multiple Authorship// Social Studies of Science, 1980, 10(2), 145-162.

- 17 Hirsch J.E. An index to quantify an individual's scientific research output// Proc. of the National Academy of Science of the USA, 2005, 102, 16569-16572.
- 18 Tol R.S.J. Credit where credit's due: accounting for co-authorship in citation counts// *Scientometrics*, 2011, 89(1), 291-299.
- 19 Narayananam R., Narahari Y. A Shapley value-based approach to discover influential nodes in social networks// *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2011, 8(1), 130-147.
- 20 Papapetrou P., Gionis A., Mannila H. A Shapley Value Approach for Influence Attribution// *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases Lecture Notes in Computer Science*, 2011, 6912, 549-564.
- 21 Sie R.L.L., Drachsler H., Bitter-Rijpkema M., Sloep P. To whom and why should I connect? Co-author recommendation based on powerful and similar peers// *International Journal of Technology Enhanced Learning*, 2012, 4(1-2), 121-137.
- 22 Tol R.S.J. Shapley values for assessing research production and impact of schools and scholars// *Scientometrics*, 2012, 90(3), 763-780.
- 23 Shapley L.S. A Value for n-person Games// In Contributions to the Theory of Games, vol. II, by H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors. *Annals of Mathematical Studies*, 1953, 28, 307–317.
- 24 Chen R.R., Yin S. The equivalence of uniform and Shapley value-based cost allocations in a specific game// *Operations Research Letters*, 2010, 38(6), 539-544.
- 25 Hartmann K. The equivalence of two phylogenetic biodiversity measures: the Shapley value and Fair Proportion index// *Journal of Mathematical Biology*, Published online September 18, 2012.
- 26 Hart S., Mas-Colell A. Potential, Value, and Consistency// *Econometrica*, 57(3), 1989, 589-614.

- 27 Chun Y. A New Axiomatization of the Shapley Value// Games and Economic Behavior, 1989, 1(2), 119-130.
- 28 Myerson R.B. Graphs and Cooperation in Games// Mathematics of Operations Research, 1977, 2(3), 225-229.
- 29 Abbas A. Weighted indices for evaluating the quality of research with multiple authorship// Scientometrics, 2011, 88(1), 107-131.
- 30 Lukovits I., Vinkler P. Correct Credit Distribution: A Model for Sharing Credit among Coauthors// Social Indicators Research, 1995, 36(1), 91-98.
- 31 Sekercioglu C.H. Quantifying coauthor contributions// Science, 2008, 322(5900), 371.
- 32 Hagen N.T. Harmonic coauthor credit: A parsimonious quantification of the byline hierarchy// Journal of Informetrics, 2013, 7(4), 784-791.
- 33 Hirsch J.E. An index to quantify an individual's scientific research output that takes into account the effect of multiple coauthorship// Scientometrics, 2010, 85(3), 741-754.
- 34 Funaki Y. Dual Axiomatization of Solution of Cooperative Games// Discussion Paper No.13, Faculty of Economics, Toyo University, Tokyo, Japan, 1995.
- 35 Winter E. The Shapley value// In R. J. Aumann and S. Hart (Eds.), The Handbook of Game Theory with Economic Applications, Amsterdam: North-Holland, 2002, 3, 2026-2052.
- 36 Monderer D., Samet D., Shapley L.S. Weighted Values and the Core// International Journal of Game Theory, 1992, 21(1), 27-39.
- 37 Kalai E., Samet D. On Weighted Shapley Values// International Journal of Game Theory, 1987, 16(3), 205-222.
- 38 Radzik T. A new look at the role of players' weights in the weighted Shapley value// European Journal of Operational Research, 2012, 223(2), 407-416.
- 39 Karpov A. Equal weights coauthorship sharing and the Shapley value are equivalent// Journal of Informetrics, 2014, 8(1), 71-76.

- 40 Banzhaf J.F. Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis// Rutgers Law Review, 1965, 19, 317-343.
- 41 Penrose L.S. Elementary statistics of majority voting// Journal of the Royal Statistics Society, 1946, 109, 53-57.
- 42 Aleskerov F. Power indices taking into account agents' preferences// Doklady Akademii Nauk, 2007, 414(5), 594-597.
- 43 Shvarts D. On calculation of the power indices with allowance for the agent preferences (in russian)// Automation and Remote Control, 2009, 70(3), 484-490.
- 44 Aleskerov F. Power indices taking into account agents' preferences// Mathematics and Democracy, Berlin, Springer, 2006, 1-18.
- 45 Сегалович И.В. Как работают поисковые системы// Мир Internet. 2002, 10.
- 46 Sebastiani F. Machine learning in automated text categorization// Journal of ACM Computing Surveys, 2002, 34(1), 1-42.
- 47 Лукашевич Н.В. Тезаурусы в задачах информационного поиска. – М.:МГУ, 2011.
- 48 ACM Computing Classification System 2012 // [Электронный ресурс]: <http://www.acm.org/about> /class/2012 (дата обращения 10.12.2013).
- 49 Association for Computing Machinery // [Электронный ресурс]: <http://www.acm.org/> (дата обращения 10.12.2013).
- 50 Ceci M., Malerba D. Classifying web documents in a hierarchy of categories: a comprehensive study// Journal of Intelligent Information Systems, 2007, 28(1), 37-78.
- 51 Santos A.P., Rodrigues F. Multi-label hierarchical text classification using the ACM taxonomy// Proc. of 14th Portuguese Conference on Artificial Intelligence (EPIA-2014). Aveiro, Portugal, October 12–15, 2010, 553-564.
- 52 Grimmer J., Stewart B. M. Text as Data: The promise and pitfalls of automatic content analysis methods for political texts// Political Analysis, 2013, 21(3), 267-297.

- 53 Maetschke S., Madhamshettiwar P., Davis M., Ragan M. Supervised, semi-supervised and unsupervised inference of gene regulatory networks// *Briefings in Bioinformatics*, 2013, 5, 150-167.
- 54 Xu R., Morgan A., Das A. K., Garber A. Investigation of unsupervised pattern learning techniques for bootstrap construction of a medical treatment lexicon// Proc. of the Workshop on Current Trends in Biomedical Natural Language Processing. Stroudsburg, PA, USA, 2009, 63-70.
- 55 Миркин Б.Г., Черняк Е.Л., Чугунова О.Н. Метод аннотированного суффиксного дерева для оценки степени вхождения строк в текстовые документы// *Бизнес-информатика*, 2012, 3(21), 31-41.
- 56 Manning C.D., Raghavan P., Schütze H. *An Introduction to Information Retrieval*. –Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- 57 Pampapathi R., Mirkin B., Levene M. A suffix tree approach to anti-spam email filtering// *Machine Learning*, 2006, 65(1), 309-338.
- 58 Robertson S., Zaragoza H. The probabilistic relevance framework: BM25 and beyond// *Journal Foundations and Trends in Information Retrieval*, 2009, 3(4), 333-389.
- 59 Salton G., Buckley C. Term-weighting approaches in automatic text retrieval// *Information Processing and Management*, 1998, 25(5), 513-523.
- 60 Солтон Дж. *Динамические библиотечно-поисковые системы*: Пер. с. англ. М.: Мир, 1979, 557 с.
- 61 Gusfield D. *Algorithms on strings, trees and sequences: computer science and computational biology*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- 62 Porter M.F., An algorithm for suffix stripping// *Program: electronic library and information systems*, 1980, 14(3), 130-137.
- 63 Bird S., Klein E., Loper E. *Natural Language Processing with Python*. – Sebastopol: O'Reilly Media Inc, 2009.

- 64 Cantador I., Bellogin A., Vallet D. Content-based recommendation in social tagging systems// Proc. of the fourth ACM conference on Recommender systems (RecSys-2010). Barcelona, Spain, September 26 – 30, 2010, 237-240.
- 65 Gupta A., Kumaraguru P. Credibility ranking of tweets during high impact events// Proc. of the first Workshop on Privacy and Security in Online Social Media (Lyon, France, April 17, 2012, 2-8.
- 66 Xia F., Liu T., Wang J., Zhang W., Li H. Listwise approach to learning to rank – theory and algorithm// Proc. of the 25th International Conference on Machine Learning (ICML-2008). Helsinki, Finland, July 5-9, 1192-1199.
- 67 Агеев М.С., Добров Б.В., Лукашевич Н.В. Автоматическая рубрикация текстов: методы и проблемы// Ученые записки Казанского государственного университета, серия Физико-математические науки, 2008, 150 (4), 25-40.
- 68 Galitsky B., Ilvovsky D., Kuznetsov S., Strok F. Matching sets of parse trees for answering multi-sentence questions// Proc. of the Recent Advances in Natural Language Processing (RANLP-2013), Hissar, Bulgaria, September 12 – 14, 2013, 285-294.
- 69 Deerwester S., Dumais S.T., Furnas G.W., Landauer T.K., Harshman R. Indexing by Latent Semantic Analysis// Journal of American society for Information Science, 1980, 41(6), 391-407.
- 70 Blei D.M., Ng D.M., Jordan M.I. Latent Dirichlet allocation// The Journal of Machine Learning Research, 2003, 3, 993-1022.
- 71 Blei D. Probabilistic topic models// Communications of the ACM. 2012, 55(4), 77-84.
- 72 Wang Q., Xu J., Li H., Craswell N. Regularized latent semantic indexing: A new approach to large-scale topic modeling// ACM Transactions on Information Systems. 2013, 31(1), 147-156.
- 73 Ильинский Д.А., Черняк Е. Системы автоматической обработки текстов// Открытые Системы. СУБД, 1, 2014, 51-53.

- 74 Черняк Е.Л., Миркин Б.Г. Использование мер релевантности строки-текст для автоматизации рубрикации научных статей// Бизнес-информатика, 2014, 2, 51-62.
- 75 Chernyak E., Mirkin B. An AST Method for Scoring String-to-Text Similarity in Semantic Text Analysis// Clusters, Orders, and Trees: Methods and Applications, Springer Optimization and its Applications, Springer, 92, 2014, 331-340.
- 76 Chernyak E., Mirkin B. A method for refining a taxonomy by using annotated suffix trees and Wikipedia resources// Procedia Computer Science, 31, 2014, Procedia Computer Science, 31, 2014, 193-200.
- 77 Tyson L. Who's Bashing Whom: Trade Conflict in High Technology Industries. – Washington: Institute for International Economics. 1992.
- 78 78. UNIDO. Industrial Development Report 2012/2013. – Vienna: UNIDO. 2013.
- 79 Алексеров Ф.Т., Писляков В.В., Субочев А.Н., Чистяков А.Г. Построение рейтингов журналов по менеджменту с помощью методов теории коллективного выбора// препринт WP7/2011/04, Москва: НИУ ВШЭ, 2011.
- 80 Алексеров Ф.Т., Писляков В.В., Субочев А.Н. Построение рейтингов журналов по экономике с помощью методов теории коллективного выбора// препринт WP7/2013/03, Москва: НИУ ВШЭ, 2013.
- 81 Aleskerov F. T., Pislyakov V., Subochev A. Ranking Journals In Economics, Management And Political Science By Social Choice Theory Methods// Working papers by NRU Higher School of Economics. Series WP BRP "Science, Technology and Innovation". 2014. No. WP BRP 27/STI/2014.
- 82 Айзerman М.А., Алексеров Ф.Т. Задача Эрроу в теории группового выбора (анализ проблемы)// Автоматика и телемеханика. 1983, 9, 127-151.
- 83 Copeland A.H. A reasonable social welfare function (mimeo)// 1951. University of Michigan, Ann Arbor (Seminar on Application of Mathematics to the Social Sciences).

- 84 Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. – М.: Наука, 1990.
- 85 Miller N. A new solution set for tournaments and majority voting: Further graph-theoretical approaches to the theory of voting// American Journal of Political Science, 1980, 24, 68-96.
- 86 Aleskerov F., Subochev A. Modeling optimal social choice: matrix-vector representation of various solution concepts based on majority rule// Journal of Global Optimization, 2013, 56(2), 737-756.
- 87 von Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. – Princeton: Princeton University Press, 1944.
- 88 Subochev A. Dominant, Weakly Stable, Uncovered Sets: Properties and Extensions// Working paper WP7/2008/03. Moscow: SU – Higher School of Economics. 2008.
- 89 Aleskerov F., Kurbanov E. A Degree of Manipulability of Known Social Choice Procedures// Current Trends in Economics: Theory and Applications / Eds. Alkan A., Aliprantis Ch., Yannelis N. N.Y.: Springer-Verlag, 1999, 13-27.
- 90 Aleskerov F., Subochev A. Matrix-vector representation of various solution concepts// Working paper WP7/2009/03, Moscow: SU – Higher School of Economics, 2009.
- 91 Daniels H.E. Round-robin tournament scores// Biometrika, 1969, 56, 295-299.
- 92 Ушаков И.А. Задача о выборе предпочтительного объекта// Известия Академии Наук СССР. Сер.: Техническая кибернетика, 1971, 4, 3-7.
- 93 Chebotarev Yu., Shamis E. Preference fusion when the number of alternatives exceeds two: indirect scoring procedures// Journal of the Franklin Institute, 1999, 336, 205-226.
- 94 Laslier J.F. Tournament Solutions and Majority Voting. – Berlin: Springer, 1997.

- 95 Kendall M. A New Measure of Rank Correlation// *Biometrika*, 1938, 30, 81-89.
- 96 Kendall M. Rank correlation methods. – L.: Griffin, 1970. Русский перевод: Кендалл М. Ранговые корреляции. М.: Статистика, 1975.
- 97 Subochev A., Zakhlebin I. Alternative versions of the global competitive industrial performance ranking constructed by methods from social choice theory// Working paper WP7/2014/06. National Research University Higher school of Economics. Moscow: Higher School of Economics Publ. House, 2014.
- 98 Панчелюга В.А., Коломбет В.А., Панчелюга М.С., Шноль С.Э. Исследование эффекта местного времени на малых пространственно-временных масштабах// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2006, Т.3, 1(5), 116-121.
- 99 Shnoll S.E., Zenchenko K.I., Udaltsova N.V. Cosmophysical Effects in the Structure of Daily and Yearly Periods of Change in the Shape of Histograms Constructed from the Measurements of  $^{239}\text{P}$  u alpha-Activity// *Biophysics*, 2004, 49(1), 155.
- 100 Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Солодков В.М., Сердюк М.Ю. Динамический анализ стереотипов поведения крупнейших российских коммерческих банков// В кн.: Модернизация экономики и глобализация: В 3 кн. Кн.3. / Отв. ред.: Е.Г. Ясин. М.: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2009, 371-381.
- 101 Vanegas L.V., Labib A.W. Application of new fuzzy-weighted average (NFWA) method to engineering design evaluation // *International Journal of Production Research*, 2001, 39, 1147-1162.
- 102 Fodor J., Roubens M. Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- 103 Rothschild M., Stiglitz J.E. Some further results on the measurement of inequality// *Journal of Economic Theory*, 1973, 6, 188-204.

- 104 Shorrocks A.F. Ranking Income distributions// *Economica*, 1983, 50, February, 3-17.
- 105 Sen A.K. On economic inequality. – Oxford: University Press, 1973.
- 106 Sevastjanov P.V., Róg P. A Probabilistic Approach to Fuzzy and Crisp Interval Ordering// *Task Quarterly*, 2003, 7(1), 147-156.
- 107 Ватник П.А. Теория риска: учеб. Пособие. – СПб.: С.-Петербург. гос. инж.-экон. ун-т., 2009.
- 108 Wolfstetter E. Topics in microeconomics: industrial organization, auctions and incentives. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- 109 Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – М.: Физматлит, 2007.
- 110 Aleskerov F.T., Chistyakov V.V., Kaliaguine V.A. Social threshold aggregations// *Social Choice and Welfare*, 2010, 35(4), 627-646.
- 111 Польдин О.В., Силаев А.М. Сравнение образовательных программ по результатам ЕГЭ зачисленных студентов// *Вопросы образования*, 2011, 3, 192-209.
- 112 Boland Ph.J., Singh H., Cukic B. The Stochastic Precedence Ordering with Applications in Sampling and Testing// *J. of Applied Probability*, 2004, 41(1), 73-82.
- 113 De Santis E., Fantozzi F., Spizzichino F. Relations between Stochastic Orderings and Generalized Stochastic Precedence//  
<http://arxiv.org/pdf/1307.7546.pdf>, 2014.
- 114 Шахнов И.Ф. Задачи ранжирования интервальных величин при много-критериальном анализе сложных систем// *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2008, 1, 37-44.
- 115 Zadeh L.A. Fuzzy sets// *Information and Control*, 1965, 8, 338-353.
- 116 Wang X., Ruan D., Kerre E.E. Mathematics of Fuzziness – Basic Issues. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

- 117 Adamo J.M. Fuzzy decision trees// *Fuzzy Sets and Systems*, 1980, 4, 207-219.
- 118 Yager R.R. A procedure for ordering fuzzy sets of the unit interval// *Information Sciences*, 1981, 24, 143-161.
- 119 Kerre E. The use of fuzzy set theory in electrocardiological diagnostics// In: Gupta, M., Sanchez, E. (eds.) *Approximate reasoning in decision-analysis*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982, 277-282.
- 120 Baas S.M., Kwakernaak H. Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets// *Automatic*, 1977, 13, 47-58.
- 121 Bronevich A.G., Rozenberg I.N. Ranking probability measures by inclusion indices in the case of unknown utility function// *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2014, 13, 49-71.
- 122 Dubois D., Prade H. Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory// *Information Science*, 1983, 30, 183-224.
- 123 Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – М.: Радио и связь, 1990.
- 124 Алекскеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. – М.: Физматлит, 2012.
- 125 Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. – М.: Физматлит, 2006.
- 126 Cassels J.W.S. An introduction to the geometry of numbers. – Springer-Verlag, 1959.
- 127 Бобров Р.А., Лепский А.Е. Ранжирование вузов по баллам ЕГЭ методами сравнения нечетких чисел// WP7/2014/01. – М.: Изд. дом. Высшей школы экономики, 2014. – 24 с.
- 128 Лепский А.Е. Распределение абитуриентов, зачисленных в вуз по баллам ЕГЭ, и ранжирование вузов// В сб. трудов XII Всероссийского совещания по проблемам управления, ВСПУ-2014, Москва 16-19 июня 2014 г. – М.: ИПУ РАН, 2014, 7919-7928. [Электрон. ресурс] ISBN 978-5-91450-151-5, <http://vspu2014.ipu.ru/prcdngs>

- 129 Лепский А.Е. Сравнение искаженных гистограмм вероятностными методами// Машинное обучение и анализ данных, 2014, 1(8), 949-965.
- 130 Lepskiy A. On the Stability of Comparing Histograms with Help of Probabilistic Methods// Procedia Computer Science, 2014, 31, 597-605.
- 131 Lepskiy A. On Comparison of Distorted Histograms// Strengthening Links Between Data Analysis and Soft Computing (Editors: P. Grzegorzewski, M. Gagolewski, O. Hryniwicz, M.A. Gil), Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer-Verlag, 2015, 315, 159-166.
- 132 Barber B., Odean T. Trading is hazardous to your wealth: The common stock investment performance of individual investors// Journal of Finance, 2000, 55(2), 773-806.
- 133 Odean T. Do investors trade too much?// American Economic Review, 1999, 89(5), 1279-1298.
- 134 Kahneman D. Thinking, fast and slow. – N.Y.: Penguin, 2011, 499 c.
- 135 Proskurin S., Penikas H. How Well Do Analysts Predict Stock Prices? Evidence from Russia// Working papers by NRU Higher School of Economics, Series FE "Financial Economics", Moscow, 2013.
- 136 Aleskerov F., Egorova L. Is it so bad that we cannot recognize black swans?// Economics Letters, 2012, 117(3), 563-565.
- 137 Venezia I., Nashikkar A., Shapira Z. Firm Specific and Macro Herding by Professional and Amateur Investors and Their Effects on Market Volatility// Journal of Banking & Finance, 2011, 5, 1599-1609.
- 138 Tedeschi G., Iori G., Gallegati M. Herding Effects in Order Driven Markets: The Rise and Fall of Gurus// Journal of Economic Behavior & Organization, 2012, 81, 82-96.
- 139 Rothig A., Chiarella C. Small traders in currency futures markets. – Sydney, Quantitative Finance Research Centre of University of Technology Sydney, 2010, Research Paper 278, 22 p.

- 140 Taleb N.N. *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. – N.Y.: Penguin, 2008, 394 p.
- 141 Harras G., Sornette D. How to grow a bubble: A model of myopic adapting agents// *Journal of Economic Behavior & Organization*, 2011, 80(1), 137-152.
- 142 Cont R., Bouchaud J.-P. Herd Behavior and Aggregate Fluctuations in Financial Markets// *Macroeconomic Dynamics*, 2000, 4, 170-196.
- 143 Егорова Л.Г. Эффективность торговых стратегий мелких трейдеров// *Проблемы управления*, 2014, 5, 34-41.
- 144 Egorova L.G. Effectiveness of Different Trading Strategies for Price-takers// *Procedia Computer Science*, 2014, 31, 133-142.
- 145 Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений: Учебник. Изд. третье, перераб. и доп. – М.: Университетская книга, Логос, 2006.
- 146 Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений: Учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008.
- 147 Belton V, Gear T. On the meaning of relative importance// *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 1997, 6, 335-338.
- 148 Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2007.
- 149 Подиновский В.В., Потапов М.А. Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений: теория, методы, софт и приложения// *Открытое образование*, 2012, 2, 55-61.
- 150 Подиновский В.В., Потапов М.А., Нелюбин А.П., Подиновская О.В. Теория важности критериев: современное состояние и направления дальнейшего её развития// XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г. ИПУ РАН [Электронный ресурс]. М.: ИПУ РАН, 2014, 7697-7702. <http://vspu2014.ipu.ru/node/8581>

- 151 Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с однородными равнозначными критериями// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1975, 2, 330-344.
- 152 Гафт М.Г., Подиновский В.В. О построении решающих правил в задачах принятия решений// Автоматика и телемеханика, 1981, 6, 128-138.
- 153 Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями// Автоматика и телемеханика, 1976, 11, 118-127.
- 154 Fishburn P.C. Decision and value theory. – New York: Wiley, 1964.
- 155 Подиновский В.В. Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики// Автоматика и телемеханика, 2004, 8, 196-203.
- 156 Podinovski V.V. On the use of importance information in MCDA problems with criteria measured on the first ordered metric scale// Journal of multi-criteria decision analysis, 2009, 15, 163-174.
- 157 Подиновский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений// Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979, 117-145.
- 158 Подиновский В.В. Количественная важность критериев// Автоматика и телемеханика, 2000, 5, 110-123.
- 159 Podinovski V.V. The quantitative importance of criteria for MCDA// J. of Multi-Criteria Decision Analysis, 2002, 11, 1-15.
- 160 Kirkwood C.W., Sarin R. Ranking with partial information: A method and an application// Operations Research, 1985, 33(1), 38-48.
- 161 Podinovski V., Podinovskaya O. Criteria importance theory for decision making problems with a hierarchical criterion structure// Working paper WP7/2014/04. Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics, 2014.

- 162 Подиновская О.В., Подиновский В.В. Информация о важности групп критериев в многокритериальных задачах принятия решений. I. Качественная информация. Равноважные группы критериев равной важности// Информационные технологии моделирования и управления, 2014, 1(85), 58-67.
- 163 Подиновская О.В., Подиновский В.В. Информация о важности групп критериев в многокритериальных задачах принятия решений. II. Количественная важность// Информационные технологии моделирования и управления, 2014, (87), 238-247.
- 164 Podinovski V.V. Decision making under uncertainty with unknown utility function and rank-ordered probabilities// European journal of operational research, 2014, 239(2), 537-541.
- 165 Gibbard A. Manipulation of voting schemes// Econometrica, 1973.41, 587-601.
- 166 Satterthwaite M. Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions// Journal of Economic Theory, 1975, 10, 187-217.
- 167 Aleskerov F., Karabekyan D., Sanver M.R., Yakuba V. On the degree of manipulability of multi-valued social choice rules// Homo Oeconomicus, 2011, (1/2), 205-216.
- 168 Kelly J. Minimal Manipulability and Local Strategy-Proofness// Social Choice and Welfare, 1988, 5, 81-85.
- 169 Nitzan S. The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation// Public Choice, 1985, 47, 349–370.
- 170 Saari D. Basic geometry of voting. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- 171 Цвелиховский Б.Д. Доля манипулируемых профилей в теории колективного выбора// Препринт издательского дома ВШЭ. Серия WP7 "Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике". 2013. No. WP7/2013/07.

- 172 Lepelley, D., Mbih, B. The vulnerability of four social choice functions to coalitional manipulation of preferences// Social Choice and Welfare, 1994, 11, 253-265.
- 173 Bartholdi III J.J., Tovey C. A., Trick M.A. The computational difficulty of manipulating an election// Social Choice and Welfare, 1989, 6(3), 227-241.
- 174 Conitzer V., Sandholm T., Lang J. When are elections with few candidates hard to manipulate?// Journal of the ACM (JACM), 2007, 54(3), 14.
- 175 Narodytska N., Walsh T., Xia L. Manipulation of Nanson's and Baldwin's Rules// AAAI, 2011.
- 176 Bartholdi III J., Tovey C.A., Trick M.A. Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election// Social Choice and welfare, 1989, 6(2), 157-165.
- 177 Davies J., Katsirelos G., Narodytska N., Walsh T. Complexity of and Algorithms for Borda Manipulation// AAAI, 2011, 11, 657-662.
- 178 Betzler N., Niedermeier R., Woeginger G.J. Unweighted Coalitional Manipulation under the Borda Rule Is NP-Hard// IJCAI, 2011, 11, 55-60.
- 179 Faliszewski P., Hemaspaandra E., Schnoor H. Copeland voting: Ties matter// Proceedings of the 7th international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems-Volume 2. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2008, 983-990.
- 180 Coleman T., Teague V. On the complexity of manipulating elections// Proceedings of the thirteenth Australasian symposium on Theory of computing. Australian Computer Society, 2007, 65, 25-33.
- 181 Веселова Ю.А. Вычислительная сложность манипулирования в задаче голосования. // В кн.: Фундаментальная информатика, информационные технологии и системы управления: реалии и перспективы. FIITM-2014: материалы международной науч.-практич. конф. Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2014.

- 182 Brockett C.D. Measuring Political Violence and Land Inequality in Central America// American political science Review, 1992, 86(1), 169-176.
- 183 Midlarski M.I. Rulers and the Ruled: Patterned Inequality and the Onset of Mass Political Violence// American Political Science Review, 1988, 82(2), 491-509.
- 184 Muller E.N., Seligson M.A., Fu H., Midlarski M.I. Land Inequality and Political Violence// American Political Science Review, 1989, 83(2), 577-596.
- 185 Brubaker R., Laitin D. Ethnic and Nationalist Violence// Annual Review of Sociology, 1998, 24, 423-452.
- 186 Chandra K. What is Ethnic Identity and Does It Matter?// Annual Review of Political Science, 2006, 9, 397-424.
- 187 Ginsburgh V., Weber S. How Many Languages Do We Need? The Economics of Linguistic Diversity. – Princeton. 2011.
- 188 Easterly W., Levine R. Africa's growth tragedy: policies and ethnic divisions// Quarterly Journal of Economics, 1997, 112(4), 1203-1250.
- 189 Alesina A., Baquir R., Easterly W. Public Goods and Ethnic Divisions// The Quarterly Journal of Economics, 1999, 114(4), 1243-1284.
- 190 Alesina A., La Ferrara E. Participation in Heterogeneous Communities// The Quarterly Journal of Economics, 2000, 115(3), 847-904.
- 191 Mauro P. Corruption and growth// Quarterly Journal of Economics, 1995, 110, 681-712.
- 192 Alesina A., Devlaeminck A., Easterly W., Kurlat S., Wacziarg R. Fractionalization// Journal of Economic Growth, 2003, 8(2), 155-194.
- 193 Collier P., Hoeffer A. Greed and Grievance in Civil War// Oxford Economic Papers, 2004, 56(4), 563-595.
- 194 Fearon J.D., Laitin D.D. Ethnicity, Insurgency, and Civil War// American Political Science Review, 2003, 97(1), 75-90.

- 195 Esteban J., Ray D. On the Measurement of Polarization// *Econometrica*, 1994, 62(4), 819-851.
- 196 Montalvo J., Reynal-Querol M. Ethnic polarization, potential conflict and Civil Wars// *American Economic Review*, 2005, 95, 796-816.
- 197 Desmet K., Ortúñoz-Ortín I., Weber S. Linguistic Diversity and Redistribution// *Journal of the European Economic Association*, 2009, 7, 1291-1318.
- 198 Desmet K., Ortúñoz-Ortín I., Weber S. Peripheral Diversity and Redistribution// *CEPR Discussion Papers*, 2005, 5112, 41p.
- 199 Алексеров Ф.Т., Голубенко М.А. Об оценке симметричности политических взглядов и поляризованности общества// Препринт WP7/2003/04. М.: ГУ ВШЭ, 2003. 24 с.
- 200 Клинов Г.А. О глоттохронологическом методе датировки распада языка// *Вопросы языкознания*, 1959, 2, 119-121.
201. Dyen I., Kruskal B.J., Black P. An Indo-European Classification: A Lexicostatistical Experiment// *Transactions of the American Philosophical Society*, 1992, 82(5), 1-132.
- 202 Хойер Г. Лексикостатистика (критический разбор)// *Новое в лингвистике*, 1, 88-107.
- 203 Ashraf Q., Galor O. Genetic Diversity and the Origins of Cultural Fragmentation// *American Economic Review*, 2013, 103(2), 528-533.
- 204 Кириченко И. Ксенофобия: испытание чужим// *Зеркало недели*, 2005: <http://www.demoscope.ru/weekly/2005/0215/gazeta09.php>.
- 205 Lind T. Fractionalization and Inter-Group Differences// *Kyklos*, 2007, 60(1), 123-139.
- 206 Esteban J., Ray D. Linking Conflict to Inequality and Polarization // *American Economic Review*, 2011, 101(4), 1345-1374.
- 207 Esteban J., Mayoral L., Ray D. Ethnicity and Conflict: An Empirical Study// *American Economic Review*, 2012, 102(4), 1310-1342.

- 208 Дробижева Л.М. Социальное неравенство этнических групп: представления и реальность. – М.: Academia, 2002, 480 с.
- 209 Магун В.С. Гражданские, этнические и религиозные идентичности в современной России. – М.: Издательство Института социологии РАН, 2006, 327 с.
- 210 Малахов В.С. Неудобства с идентичностью// Вопросы философии, 1998, 2, 4-10.
- 211 Паин Э.А. Этнополитический маятник. Динамика и механизмы этнополитических процессов в постсоветской России. – М.: Институт социологии РАН, 2004, 328 с.
- 212 Тишков В.А, Пивнева Е.А. Этнологические и антропологические исследования в академической науке// Новая и новейшая история, 2010, 3, 3-21.
- 213 Фадеева Л.А. Современная российская идентичность: ценность, конструкция, руководство к действию?// Под ред. Мельвиль А.Ю. Пространство и время в мировой политике и международных отношениях: материалы 4-го Конвента РАМИ. – М.: МГИМО – Университет, 2007.116 с.
- 214 Паин Э.А., Суслова М.Н. Способна ли демократия противостоять ксенофобии?// Россия в глобальной политике, 2012, 5, 62-76.
- 215 Дробижева Л.М. Этничность в современном обществе: новые подходы, старые мифы, социальные практики// Вестник Института социологии, 2010, 1, 82-91.
- 216 Зазнаев О.И. Политическая идентичность и политика идентичности: очерки. – Казань: Изд. Казанского университета, 2011, 232 с.
- 217 Паин Э.А. Этнические конфликты в постсоветской России// Вестник Института Кеннана в России, 2012, 22, 35-47.
- 218 Авксентьев В.А. 1996. Этнические конфликты: история и типология// Социологические исследования, 1996, 12, 43-50.
- 219 Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1967.

- 220 Kamalova R. The Main Approaches to Measurement of Ethnic Heterogeneity// XV April International Academic Conference on Economic and Social Development. Moscow, 2015.
- 221 Kamalova R., Kostomarov V. Ethnic Heterogeneity: Main Notion and Measurement Problems// Report on XII All-Russia meeting on problems of control, 2014, 6208-6213.
- 222 Lipacheva A. Comparison of Polarization Indices in Special Cases// Report on XII All-Russia meeting on problems of control, 2014, 6220-6226.
- 223 Aizerman M., Aleskerov F. Theory of Choice. – Elsevier, North-Holland, 1995.
- 224 Алескеров Ф.Т., Курбанов Э. О степени манипулируемости правил коллективного выбора// Автомат. и телемех., 1998, 10, 134-146.
- 225 Вольский В.И. Процедуры голосования в малых группах с древнейших времен до начала XX века// Препринты. Издательский дом ВШЭ. Серия WP7, 2014.
- 226 Алескеров Ф.Т., Юзбашев Д.В., Якуба В.И. Пороговое агрегирование трехградационных ранжировок// Автоматика и телемеханика, 2007, 1, 147-152.
- 227 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.
- 228 Aleskerov F., Chistyakov V., Kalyagin V. Social threshold aggregations// Social Choice and Welfare, 35(4), 2010, 627-646.
- 229 Алескеров Ф.Т., Митичкин Е.О., Чистяков В.В., Швыдун С.В., Якуба В.И. Способ отбора эффективных вариантов в поисковых и рекомендательных системах (варианты)// Номер публикации: WO2014148948 A1. Номер заявки: PCT/RU2013/001180.
- 230 Швыдун С.В. Исследование нормативных свойств двухступенчатых процедур выбора// В кн.: XII Всероссийское совещание по проблемам управ-

ления, ВСПУ-2014, Москва, 16-19 июня 2014 г.: Труды [Электронный ре-  
сурс]. – М.: ИПУ РАН, 2014, 7977-7985.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Таблицы к подразделу 2.2

Таблица А.1 – Номера мест стран в рейтингах по отдельным показателям модели и в агрегированных рейтингах (страны упорядочены в соответствии с рейтингом, основанном на индексе CIP)

	MVApс	MXрс	MHVAsh	MVAsh	MHXsh	MXsh	ImWMVA	ImWMГ	CIP	правило Коупланда (1 версия)	правило Коупланда (2 версия)	правило Коупланда (3 версия)	непокрытое множество	минимальное внешнеустойчивое множество UC	марковское ранжирование MES
Число позиций в рейтинге	135	135	132	133	135	133	99	99	126	117	89	80	23	23	135
Япония	2	28	6	21	2	14	3	4	1	1	1	1	1	1	1
Германия	11	9	4	29	8	33	4	2	2	5	4	4	2	2	5
США	8	39	9	55	15	52	1	3	3	8	7	6	1	1	8
Южная Корея	10	16	8	7	6	1	5	6	4	3	2	3	1	1	4
Тайвань	7	15	3	6	7	4	10	11	5	2	2	2	1	1	2
Сингапур	1	1	1	14	10	23	28	18	6	4	3	3	1	1	3
Китай	54	54	24	2	20	2	2	1	7	9	10	4	2	1	6
Швейцария	3	5	35	30	9	15	24	16	8	6	5	5	2	2	7
Бельгия	14	2	19	52	31	30	26	9	9	11	8	8	2	3	12
Франция	21	23	13	73	14	27	7	5	10	12	9	8	3	3	11
Италия	22	24	27	53	33	14	8	7	11	16	14	10	4	4	18
Нидерланды	17	6	25	71	30	56	23	8	12	13	11	9	3	3	21
Швеция	5	7	10	25	25	24	20	21	13	7	6	6	2	2	9
Великобритания	19	31	20	83	17	47	6	10	14	17	15	11	4	4	14
Ирландия	6	4	2	15	34	13	31	26	15	10	7	7	2	2	10

Продолжение таблицы А.1

Австрия	9	8	22	31	22	32	25	24	16	14	12	9	3	3	22
Канада	20	26	31	78	29	77	13	13	17	23	18	15	5	5	26
Финляндия	4	11	14	13	40	17	29	32	18	15	13	10	4	3	16
Испания	30	32	36	75	26	40	14	14	19	25	18	17	5	5	27
Чехия	27	12	17	8	11	18	38	25	20	18	15	12	4	4	15
Малайзия	34	27	21	10	16	41	27	17	21	22	17	14	5	5	17
Мексика	43	44	28	45	4	46	12	12	22	26	19	16	5	5	25
Таиланд	40	40	11	1	19	39	19	19	23	20	16	12	2	1	13
Дания	13	10	41	72	37	60	39	31	24	29	22	18	5	4	28
Польша	33	36	33	17	24	28	22	22	25	28	20	17	6	5	29
Израиль	18	21	5	60	28	3	37	34	26	19	16	11	3	3	24
Словакия	25	13	18	9	13	6	48	33	27	21	17	13	5	4	20
Австралия	24	33	54	91	89	89	21	28	28	31	25	20	7	6	30
Венгрия	38	20	7	19	5	31	49	30	29	24	19	14	7	5	19
Турция	42	52	42	23	49	29	15	27	30	30	21	19	6	6	34
Норвегия	15	22	52	100	36	112	42	43	31	34	27	22	9	6	32
Словения	23	14	12	20	18	19	57	48	32	27	20	16	5	5	23
Бразилия	57	72	34	64	59	72	11	23	33	36	29	24	7	6	35
Португалия	32	34	55	69	51	22	44	41	34	33	26	22	8	6	44
Аргентина	31	62	45	43	45	84	17	42	35	32	24	21	8	6	38
Россия	60	57	53	39	79	100	18	20	36	38	30	26	7	6	39
Саудовская Аравия	39	46	23	80	61	116	30	35	37	35	28	23	8	7	40
Индонезия	77	85	30	11	68	80	16	29	38	38	36	21	8	6	36
Кувейт	26	25	75	89	103	94	55	46	39	45	35	31	10	7	51
Белоруссия	50	41	73	3	54	26	51	47	40	36	28	25	8	6	46
ЮАР	58	58	61	54	43	70	33	37	41	39	31	26	8	6	43
Люксембург	16	3	117	113	56	35	77	62	42	48	41	28	10	6	42
Индия	103	104	32	51	70	38	9	15	43	42	35	26	7	6	37
Филиппины	79	79	15	18	3	8	34	38	44	32	23	22	8	5	31
Чили	46	48	71	50	107	88	43	44	45	44	34	30	10	7	59
Румыния	75	45	37	66	32	21	54	39	46	37	30	25	8	6	45

Продолжение таблицы А.1

Литва	47	30	74	32	57	36	69	51	47	43	33	29	10	7	50
Новая Зеландия	29	37	87	70	86	91	52	57	48	50	40	33	12	6	52
Греция	36	50	78	101	58	58	46	54	49	46	38	29	11	8	48
Хорватия	44	42	40	44	38	20	61	64	50	40	32	27	8	7	49
Венесуэла	51	66	36	41	117	108	36	49	50	48	37	32	10	7	62
Эстония	45	19	46	49	50	34	82	63	51	42	35	26	10	7	41
Украина	88	59	63	22	47	37	50	40	52	41	32	28	10	6	53
Вьетнам	96	78	66	12	72	68	45	36	53	53	43	34	11	7	66
Иран	72	86	24	42	81	104	35	45	54	52	42	33	11	7	58
Коста-Рика	41	51	80	24	23	59	60	70	55	47	38	30	8	7	47
Катар	28	17	77	130	71	124	78	65	56	60	45	41	11	6	55
Тунис	62	53	99	38	46	43	58	58	57	49	39	33	10	6	54
Болгария	69	47	47	48	62	65	70	56	58	51	41	33	11	7	57
Тринидад-и-Тобаго	52	29	26	103	92	57	84	68	58	55	46	36	12	9	56
Мальта	37	18	16	86	27	9	92	78	59	33	26	22	8	6	33
Египет	71	100	56	34	74	76	32	53	60	54	44	35	11	7	68
Перу	66	75	84	59	124	85	47	50	61	61	48	40	12	7	75
Колумбия	67	93	65	67	60	107	41	59	62	61	47	41	12	7	76
Исландия	12	35	86	84	44	113	83	90	63	69	53	45	12	7	77
Марокко	84	81	57	68	55	50	53	57	64	59	45	40	11	6	73
Гонконг (КНР)	64	56	39	132	35	83	66	66	65	57	46	37	11	7	79
Латвия	63	38	64	96	63	45	85	69	66	59	46	39	11	9	65
Оман	48	49	79	104	48	122	73	72	67	67	50	44	13	10	80
Казахстан	74	65	106	65	52	118	56	61	68	63	47	43	13	6	78
Сальвадор	59	77	70	16	97	25	65	76	69	62	50	40	11	7	67
Иордания	68	67	48	40	41	48	73	74	70	58	46	38	11	7	60
Уругвай	35	74	88	57	85	98	61	81	71	68	51	46	13	9	81
Пакистан	104	110	51	35	111	44	40	52	72	56	45	37	11	7	69
Ливан	56	68	69	99	42	62	72	79	73	65	51	42	11	7	61
Сербия	99	64	68	46	64	49	81	67	74	66	48	44	11	7	71
Гватемала	86	84	81	74	88	67	68	71	75	73	54	50	13	7	88

Продолжение таблицы А.1

Бангладеш	107	111	67	37	127	12	46	60	76	66	53	41	12	6	70
Маврикий	55	55	124	47	131	5	86	88	77	71	58	44	14	11	63
Шри-Ланка	94	89	92	61	113	66	64	71	78	77	59	52	14	10	91
Сирия	90	98	59	58	84	92	62	73	79	74	56	50	14	7	85
Алжир	100	83	94	116	133	114	59	55	80	79	61	53	14	11	89
Босния-и-Герцеговина	89	60	43	90	83	61	88	78	81	70	52	48	13	9	83
Македония	70	63	83	33	91	74	88	85	82	72	55	48	13	10	84
Свазиленд	61	61	132	4	69	10	91	91	83	64	49	43	11	10	64
Ботсвана	95	43	58	127	125	7	94	75	84	76	63	49	14	11	82
Эквадор	83	92	102	63	82	117	67	77	85	78	60	53	14	11	93
Кипр	49	73	91	114	21	55	88	94	86	73	57	47	14	10	72
Кот-д-Ивуар	106	102	82	36	65	99	75	77	87	80	62	53	12	7	86
Камбоджа	105	97	131	27	118	73	80	77	88	83	66	54	15	13	90
Гондурас	80	106	104	26	73	95	74	89	89	79	61	53	14	12	92
Боливия	97	91	116	62	130	96	79	80	90	84	66	56	15	13	94
Ямайка	81	82	72	108	123	11	89	90	91	81	64	52	14	13	95
Албания	87	88	85	85	94	54	89	90	92	82	62	55	14	10	103
Нигерия	125	108	38	125	120	119	63	50	93	88	70	59	15	11	87
Грузия	102	99	60	88	39	53	91	92	94	84	65	57	15	13	96
Камерун	101	113	96	28	108	105	71	89	95	86	69	58	15	13	102
Армения	91	101	110	56	78	69	91	93	96	85	67	58	15	13	104
Парагвай	93	105	89	76	104	119	83	92	97	87	70	58	15	13	98
Конго	110	76	125	120	1	101	95	83	98	90	70	60	16	14	100
Кения	115	114	119	93	77	86	76	82	99	91	71	62	15	13	97
Сенегал	112	107	76	87	101	64	89	87	99	89	68	61	15	13	108
Барбадос	78	69	29	128	53	16	98	97	100	75	55	51	11	10	74
Габон	92	70	113	126	110	121	95	90	100	93	72	63	16	13	109
Фиджи	82	87	112	81	112	82	96	96	101	92	72	62	15	15	106
Танзания	116	117	129	92	102	87	75	86	102	96	73	65	16	13	112
Азербайджан	109	95	108	129	93	128	91	84	103	94	72	64	16	15	115
Суринам	76	71	93	94	114	123	97	96	104	94	74	61	16	13	99

Продолжение таблицы А.1

Монголия	111	80	114	105	132	75	97	89	105	97	73	66	16	15	111
Панама	73	112	109	117	96	106	83	97	106	95	74	62	16	14	101
Замбия	117	109	62	93	100	120	91	88	107	95	72	65	16	13	113
Макао (КНР)	53	94	122	131	121	93	93	98	108	105	80	70	17	16	118
Белиз	65	90	74	77	134	110	97	98	109	98	76	64	17	15	107
Молдавия	113	103	111	98	105	79	96	94	110	99	75	66	17	15	110
Таджикистан	108	124	126	5	12	126	91	97	111	104	82	68	17	16	122
Мадагаскар	122	118	123	73	128	63	91	93	112	101	77	67	17	15	116
Киргизия	118	115	118	82	90	115	96	96	113	103	78	70	18	16	121
Гана	123	119	130	106	76	127	90	93	114	106	78	71	17	16	129
Непал	127	121	127	110	87	51	91	93	114	103	80	69	17	16	117
Уганда	124	125	95	109	95	102	87	95	115	102	79	68	17	16	114
Йемен	121	120	121	118	122	130	88	94	116	107	80	72	17	16	128
Мозамбик	114	127	97	79	115	131	85	97	117	107	81	71	17	16	124
Сент-Люсия	85	96	103	124	67	78	98	99	117	100	78	65	17	15	105
Кабо-Верде	98	116	44	102	135	81	98	99	118	107	81	71	19	16	127
Малави	128	123	90	97	99	111	95	96	119	108	82	73	19	16	119
Гаити	120	130	115	95	129	42	94	98	120	111	85	75	19	18	125
Судан	119	129	101	112	126	132	80	96	120	110	84	74	19	17	120
Нигер	132	122	49	121	106	71	97	96	121	109	83	73	17	16	123
Руанда	126	126	107	115	119	90	96	98	122	113	86	77	20	19	130
Эфиопия	131	133	98	123	66	129	88	97	123	112	86	76	17	16	126
ЦАР	130	131	100	111	116	109	98	99	124	115	87	79	21	21	132
Бурунди	133	134	128	107	80	125	98	99	125	116	88	80	22	22	135
Эритрея	134	135	105	119	98	103	98	99	126	117	89	80	23	23	134
Гамбия	129	128	120	122	109	97	99	99	126	114	87	78	21	20	131
Ирак	135	132	50	133	75	133	97	98	126	115	87	79	21	20	133

Таблица А.2 – Меры ранговой корреляции рейтингов

		MVApc	MXpc	MHVAsh	MVASH	MHXsh	MXsh	ImWMVA	ImWMT	CIP	правило Коупланда (1 версия)	правило Коупланда (2 версия)	правило Коупланда (3 версия)	непокрытое множество UC	миним.	Внешнеуст.	Множ-во MES
Коэффициент Кендалла $\tau_b$																	
MVApc	1,000	0,767	0,476	0,318	0,465	0,365	0,510	0,553	0,715	0,718	0,715	0,723	0,714	0,691	0,714		
MXpc	0,767	1,000	0,487	0,289	0,466	0,421	0,440	0,576	0,704	0,716	0,716	0,716	0,706	0,689	0,709		
MHVAsh	0,476	0,487	1,000	0,319	0,471	0,399	0,517	0,578	0,595	0,637	0,633	0,643	0,654	0,635	0,633		
MVASH	0,318	0,289	0,319	1,000	0,319	0,381	0,436	0,422	0,440	0,456	0,455	0,458	0,471	0,476	0,448		
MHXsh	0,465	0,466	0,471	0,319	1,000	0,354	0,422	0,470	0,529	0,559	0,563	0,556	0,576	0,571	0,556		
MXsh	0,365	0,421	0,399	0,381	0,354	1,000	0,289	0,370	0,430	0,476	0,472	0,482	0,492	0,472	0,485		
ImWMVA	0,510	0,440	0,517	0,436	0,422	0,289	1,000	0,808	0,732	0,701	0,703	0,701	0,717	0,720	0,679		
ImWMT	0,553	0,576	0,578	0,422	0,470	0,370	0,808	1,000	0,833	0,801	0,805	0,798	0,808	0,801	0,774		
CIP	0,715	0,704	0,595	0,440	0,529	0,430	0,732	0,833	1,000	0,930	0,926	0,925	0,907	0,877	0,888		
Cop. (1)	0,718	0,716	0,637	0,456	0,559	0,476	0,701	0,801	0,930	1,000	0,979	0,982	0,937	0,897	0,921		
Cop. (2)	0,715	0,716	0,633	0,455	0,563	0,472	0,703	0,805	0,926	0,979	1,000	0,959	0,936	0,899	0,905		
Cop. (3)	0,723	0,716	0,643	0,458	0,556	0,482	0,701	0,798	0,925	0,982	0,959	1,000	0,935	0,896	0,933		
UC	0,714	0,706	0,654	0,471	0,576	0,492	0,717	0,808	0,907	0,937	0,936	0,935	1,000	0,915	0,913		
MES	0,691	0,689	0,635	0,476	0,571	0,472	0,720	0,801	0,877	0,897	0,899	0,896	0,915	1,000	0,878		
Markovian	0,714	0,709	0,633	0,448	0,556	0,485	0,679	0,774	0,888	0,921	0,905	0,933	0,913	0,878	1,000		
Доля совпадающих парных сравнений г (в %)																	
MVApc	100	88,36	73,80	65,89	73,27	68,24	74,89	77,13	85,66	85,77	85,32	85,59	81,77	78,78	85,72		
MXpc	88,36	100	74,32	64,46	73,30	71,02	71,43	78,25	85,11	85,65	85,34	85,23	81,38	78,70	85,44		
MHVAsh	73,80	74,32	100	65,91	73,55	69,93	75,23	78,33	79,65	81,68	81,22	81,57	78,84	76,10	81,65		
MVASH	65,89	64,46	65,91	100	65,96	69,02	71,23	70,55	71,92	72,67	72,33	72,40	69,96	68,49	72,37		
MHXsh	73,27	73,30	73,55	65,96	100	67,68	70,53	72,98	76,36	77,82	77,73	77,27	75,10	73,03	77,80		
MXsh	68,24	71,02	69,93	69,02	67,68	100	63,89	68,00	71,42	73,63	73,19	73,60	71,01	68,33	74,24		
ImWMVA	74,89	71,43	75,23	71,23	70,53	63,89	100	89,46	85,86	84,28	84,08	83,89	81,49	79,73	83,34		
ImWMT	77,13	78,25	78,33	70,55	72,98	68,00	89,46	100	90,98	89,29	89,22	88,77	85,97	83,62	88,13		
CIP	85,66	85,11	79,65	71,92	76,36	71,42	85,86	90,98	100	96,24	95,75	95,56	91,14	87,68	94,34		
Cop. (1)	85,77	85,65	81,68	72,67	77,82	73,63	84,28	89,29	96,24	100	98,40	98,40	92,65	88,66	95,91		
Cop. (2)	85,32	85,34	81,22	72,33	77,73	73,19	84,08	89,22	95,75	98,40	100	96,95	92,59	88,68	94,80		
Cop. (3)	85,59	85,23	81,57	72,40	77,27	73,60	83,89	88,77	95,56	98,40	96,95	100	92,38	88,62	96,06		
UC	81,77	81,38	78,84	69,96	75,10	71,01	81,49	85,97	91,14	92,65	92,59	92,38	100	89,08	91,45		
MES	78,78	78,70	76,10	68,49	73,03	68,33	79,73	83,62	87,68	88,66	88,68	88,62	89,08	100	87,72		
Markovian	85,72	85,44	81,65	72,37	77,80	74,24	83,34	88,13	94,34	95,91	94,80	96,06	91,45	87,72	100		

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Таблицы к подразделу 3.4

Таблица Б.1 – Исследование свойств существующих процедур выбора («+» – процедура выбора удовлетворяет нормативному условию, «-» – процедура выбора не удовлетворяет нормативному условию, «X» – условие не существует для данного правила)

№	Процедуры выбора	Нормативные условия					
		Условие наследования (H)	Условие согласия (C)	Условие отбрасывания (O)	Аксиома выбора Эрроу (ACA)	Условие монотонности 1	Условие строгой монотонности 2
1	Правило простого большинства	+	-	+	-	X	-
2	Правило относительного большинства	-	-	-	-	-	-
3	Обратное правило простого большинства	-	-	-	-	-	-
4	Аналог правила одобряющего голосования	-	-	-	-	-	-
5	Двухступенчатое правило относительного большинства	-	-	-	-	X	-
6	Правило Хара (Процедура Уэйра)	-	-	-	-	X	-
7	Правило Борда	-	-	-	-	+	-
8	Правило Блэка	-	-	-	-	+	-
9	Обратное правило Борда	-	-	-	-	-	-
10	Правило Нансона	-	-	-	-	-	-
11	Процедура Кумбса	-	-	-	-	X	-
12	Минимальное доминирующее множество	-	+	+	-	+	-
13	Минимальное непокрытое множество	-	-	-	-	+	-
14	Минимальное слабоустойчивое множество	-	-	-	-	+	-
15	Правило Фишберна	-	-	-	-	+	-
16	Непокрытое множество I	-	-	-	-	+	-

Продолжение таблицы Б.1

17	Непокрытое множество II	-	+	-	-	+	-	-	-
18	Правило Ричалсона	-	-	-	-	+	-	-	-
19	Победитель Кондорсе	+	+	-	-	+	X	-	-
20	Ядро	+	+	-	-	+	+	-	-
21	k-устойчивые множества ( $k>1$ )	-	-	-	-	-	-	-	-
22	Пороговое правило	-	-	-	-	+	-	-	+
23	Первое правило Копланда	-	-	-	-	+	-	-	-
24	Второе правило Копланда	-	-	-	-	+	-	-	-
25	Третье правило Копланда	-	-	-	-	+	-	-	-
26a	Надпороговое правило выбора (порог – константа)	+	+	+	+	+	+	+	-
26b	Надпороговое правило выбора (порог – зависит от X)	-	-	-	-	+	+	-	-
27	Минимаксная процедура	-	-	-	-	+	-	-	-
28	Процедура Симпсона	-	-	-	-	+	-	-	-

Таблица Б.2 – Исследование свойств процедур выбора («+» – процедура выбора удовлетворяет нормативному условию, «-» – процедура выбора не удовлетворяет нормативному условию, «X» – условие не существует для данного правила)

		Нормативные условия						
		Условия рациональности			Условия монотонности		Условие пороговой некомпенсируемости	
		Условие наследования (H)	Условие согласия (C)	Условие отbrasывания (O)	Аксиома выбора Эрроу (ACA)	Условие монотонности 1	Условие монотонности 2	
Этап 1		Этап 2						
№	Название процедуры	№	Название процедуры					
2 3 4	Правило относительного большинства Обратное правило простого большинства Аналог правила одобряющего голосования ( $q>1$ )	5 6 11	Двухступенчатое правило относительного большинства Правило Хара (Процедура Уэйра) Процедура Кумбса	- - -	- - -	- - -	X -	-
9 10 11	Обратное правило Борда Правило Нансона Процедура Кумбса	1 5 6 11 19	Правило простого большинства Двухступенчатое правило относительного большинства Правило Хара (Процедура Уэйра) Процедура Кумбса Победитель Кондорсе	- - - - -	- - - - -	- - - - -	X -	-
7 8	Правило Борда Правило Блэка	1 5 6 19	Правило простого большинства Двухступенчатое правило относительного большинства Правило Хара (Процедура Уэйра) Победитель Кондорсе	- - - -	- - - -	+ X	-	-
2 3 4	Правило относительного большинства Обратное правило простого большинства Аналог правила одобряющего голосования ( $q>1$ )	1 19	Правило простого большинства Победитель Кондорсе	- -	- -	- +	X -	-

Продолжение таблицы Б.2

7 8	Правило Борда Правило Блэка	9 10 11 21	Правило Блэка Обратное правило Борда Правило Нансона k-устойчивые множества ( $k>1$ )	-	-	-	-	<b>+</b>	-	-	-
2 3 4 7 8	Правило относительного большинства Обратное правило простого большинства Аналог правила одобряющего голосования ( $q>1$ ) Правило Борда Правило Блэка	2 3 4 7 8 12 13 14 15 16 17 18 20 22 23 24 25 26 27 28	Правило относительного большинства Обратное правило простого большинства Аналог правила одобряющего голосования ( $q>1$ ) Правило Борда Правило Блэка Минимальное доминирующее множество Минимальное непокрытое множество Минимальное слабоустойчивое множество Правило Фишберна Непокрытое множество I Непокрытое множество II Правило Ричалсона Ядро Пороговое правило Первое правило Копланда Второе правило Копланда Третье правило Копланда Надпороговое правило выбора (порог – зависит от X) Минимаксная процедура Процедура Симпсона	-	-	-	-	<b>+</b>	-	-	-
9 10	Обратное правило Борда Правило Нансона	12 13 16 18 20	Минимальное доминирующее множество Минимальное непокрытое множество Непокрытое множество I Правило Ричалсона Ядро	-	-	-	-	-	-	-	-

Продолжение таблицы Б.2

		2	Правило относительного большинства									
		4	Аналог правила одобряющего голосования ( $q>1$ )									
		8	Правило Блэка									
		14	Минимальное слабоустойчивое множество									
		15	Правило Фишберна									
9	Обратное правило Борда	17	Непокрытое множество II	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	Правило Нансона	21	$k$ -устойчивые множества ( $k>1$ )									
		22	Пороговое правило									
		23	Первое правило Копланда									
		24	Второе правило Копланда									
		25	Третье правило Копланда									
		26	Надпороговое правило выбора (порог – зависит от $X$ )									
		27	Минимаксная процедура									
		28	Процедура Симпсона									
9	Обратное правило Борда	3	Обратное правило простого большинства	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	Правило Нансона	11										
2	Правило относительного большинства	9	Правило Блэка									
3	Обратное правило простого большинства	10	Обратное правило Борда	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	Аналог правила одобряющего голосования ( $q>1$ )	11	Правило Нансона									
		21	$k$ -устойчивые множества ( $k>1$ )									