**Правительство Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования   
"Национальный исследовательский университет   
"Высшая школа экономики"**

Факультет экономических наук

Департамент математики

**Рабочая программа дисциплины**

**Линейная алгебра и геометрия**

для образовательной программы «Прикладная математика и информатика» направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра (2015 – 2016 учебный год)

Разработчик программы

Д.И.Пионтковский, доктор физико-математических наук, dpiontkovski@hse.ru

Одобрена на заседании департамента математики факультета экономических наук

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_ 2015  г.

Руководитель департамента Ф.Т.Алескеров

Рекомендована Академическим советом

образовательной программы

«Прикладная математика и информатика» «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2015  г.,

№ протокола\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Утверждена «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2015 г.

Академический руководитель образовательной программы

Конушин А.С.

Москва, 2015

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

# Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих дисциплину «Линейная алгебра и геометрия».

Программа разработана в соответствии с:

* Образовательным стандартом Государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет – Высшая школа экономики», в отношении которого установлена категория «национальный исследовательский университет»;

Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2014 г.

# Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра и геометрия» являются

* + 1. ознакомление студентов с основами линейной алгебры, аналитической геометрии и общей алгебры;

2) формирование у студентов навыков использования методов линейной алгебры для формализации и решения прикладных задач, в том числе экономических и геометрических, и, особенно, возникающих в задачах анализа данных и в компьютерных науках.

**3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины**

В результате освоения дисциплины студент должен:

* Знать основные теоремы линейной алгебры и иметь четкое представление об основных алгебраических структурах, используемых в задачах линейной алгебры;
* Уметь решать задачи линейной алгебры и аналитической геометрии, перечисленные в программе курса, иметь представление об алгоритмической сложности таких задач;
* Иметь навыки решения систем линейных уравнений, вычисления определителей, исследования квадратичных форм, нахождения собственных векторов, приведения оператора к жордановой форме, определения типов и свойств кривых и поверхностей первого и второго порядка.

Выпускник по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» с квалификацией (степенью) бакалавр в соответствии с целями основной образовательной программы и задачами профессиональной деятельности, указанными в пп. 3.2 и 3.6.1 настоящего ОС ГОБУ ВПО ГУ-ВШЭ, должен обладать следующими компетенциями.

| ***Компетенция*** | ***Код по ФГОС / НИУ*** | ***Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)*** | ***Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции*** |
| --- | --- | --- | --- |
| Общенаучная | ОНК-1 | Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-2 | Способность перейти от проблемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-3 | Способность использовать методы критического анализа, развития научных теорий, опровержения и фальсификации, оценить качество исследований в некоторой предметной области | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-4 | Готовность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при работе в какой-либо предметной области | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-5 | Готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий аппарат дисциплины | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-6 | Способность приобретать новые знания с использованием научной методологии и современных образовательных и информационных технологий | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-7 | Способность порождать новые идеи (креативность) | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Инструментальные | ИК-2 | Умение работать на компьютере, навыки использования основных классов прикладного программного обеспечения, работы в компьютерных сетях, составления баз данных | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-1 | Способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-2 | способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-3 | способность в составе научно-исследовательского и производственного коллектива решать задачи профессиональной деятельности в соответствии с профилем подготовки, общаться с экспертами в других предметных областях | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-4 | способность критически оценивать собственную квалификацию и её востребованность, переосмысливать накопленный практический опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-8 | способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая разработку математических моделей, алгоритмических и программных решений | Стандартные (лекционно-семинарские) |

# Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина является обязательной и относится к математическому и естественнонаучному циклу МЕ.00.

Для освоения учебной дисциплины не требуются знания и компетенции, выходящие за пределы требованиям к поступающим на программу бакалавриата.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Математический анализ;
* Дифференциальные уравнения;
* Теория вероятностей и математическая статистика;
* Анализ данных;
* Машинное обучение,

и других.

# Тематический план учебной дисциплины

**Тематический план учебной дисциплины**

Курс «Линейная алгебра и геометрия» относится к числу базовых и рассчитан на преподавание в течение всего первого курса (144 аудиторных часа).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Название темы** | **Всего часов** | **В т.ч. лекции** | **В т.ч. семинары** | **Самост. работа** |
| 1 | Векторы и матрицы | **31** | **6** | **6** | **15** |
| 2 | Определитель | **31** | **8** | **8** | **15** |
| 3 | Решение систем линейных уравнений | **36** | **8** | **8** | **20** |
| 4 | Линейные пространства | **54** | **12** | **12** | **30** |
| 5 | Комплексные числа | **18** | **4** | **4** | **10** |
| 6 | Квадратичные формы и скалярные произведения | **64** | **12** | **12** | **40** |
| 7 | Собственные векторы | **88** | **14** | **14** | **50** |
| 8 | Аналитическая геометрия | **30** | **8** | **8** | **18** |
|  |  |  |  |  |  |
| **Итого** |  | **342** | **72** | **72** | **198** |

# Содержание дисциплины

Звездочками отмечены вопросы, которые изучаются учащимися самостоятельно с помощью учебных ассистентов в процессе решения задач («система листков»). Также с помощью такой системы предусмотрено углубленное изучение основных тем, специально здесь не отмеченное.

1. **Векторы и матрицы.**

Векторы как упорядоченные наборы чисел. Линейные операции. Скалярное произведение, неравенство Коши, неравенство треугольника, угол между векторами.

Линейные многообразия, прямые. Прямые и плоскости в трехмерном пространстве, способы задания, углы между ними.

Матрицы и линейные операции над ними. Различные алгоритмические реализации умножения матриц. Простейшие матричные уравнения, система линейных уравнений в матричной форме. Невырожденные (обратимые слева) матрицы.

\*Другие определения произведения матриц.

\*Простейшая линейная производственная модель.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 2, 3; дополнительная литература: 2,3,5,6,8 (здесь и далее ссылки даны на список литературы ниже в разделе 9)

1. **Определитель.**

Маломерные определители. . Расстояния, площади многоугольников и объемы тетраэдров и параллелепипедов в двумерном и трехмерном арифметическом пространстве.

Перестановки. Знак перестановки*,* разложение перестановки в произведение транспозиций.

Понятие группы. Примеры.

\*Примеры и некоторые свойства групп подстановок. Группы симметрий. Подгруппы, порядок элемента группы. Теорема Кэли.

Определитель квадратной матрицы.

Свойства определителя. Способы вычисления определителей. Определитель произведения матриц.

\*Аксиоматическое определения определителя.

\*Классические определители.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 1; дополнительная литература: 2,3,5,6,8.

1. **Решение систем линейных уравнений.**

Решение системы линейных уравнений с невырожденной матрицей. Формулы Крамера.

Формула обратной матрицы.

Элементарные преобразования. Общая схема редукции*.* Метод Гаусса.

Ранг матрицы: различные определения. Миноры и вычисление ранга.

Другие способы вычисления обратной матрицы.

Теорема Кронекера-Капелли, альтернатива Фредгольма. Общий вид решений системы линейных уравнений.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 1; дополнительная литература: 2,3,5,6,8.

1. **Линейные пространства.**

Определение и примеры линейных пространств. Подпространство. Линейная независимость, базис, размерность. Замена координат. Размерности суммы и пересечения подпространств.

Линейные отображения и линейные операторы. Изоморфизм линейных пространств. Замена базисов. Ядро и образ линейного отображения.

\* Свойства решетки подпространств линейного пространства.

\*Факторпространства. Точные последовательности. Тензорное произведение линейных пространств.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 7; дополнительная литература: 2,3, 8, 10.

1. **Комплексные числа.**

Понятие поля. Примеры: некоторые числовые поля, поле из двух элементов.

Определение комплексного умножения на плоскости. Основные операции с комплексными числами. Модуль и аргумент, формулы Муавра, формула Эйлера. Решение простейших алгебраических уравнений. \*Основная теорема алгебры.

Линейные пространства над полем.

Комплексное линейное пространство, комплексификация действительного пространства.

\*Алгебры над полем. Кватернионы. Геометрический смысл кватернионов.

\*Бесконечномерные алгебры. Симметрическая алгебра и алгебра Грассманна. Определитель как старшая внешняя степень оператора.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 4; дополнительная литература: 3,5,8, 10.

1. **Евклидовы пространства.**

Билинейные и квадратичные формы. Ортогональные базисы, процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Канонический вид и нормальный вид квадратичной формы, закон инерции. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Метод Якоби. Критерий Сильвестра.

Евклидовы пространства. Матрица Грама. Неравенство треугольника, неравенство Коши. Угол между векторами. Проекции, нормали, расстояния. Ортогональные и ортонормированные базисы, их построение. Объем параллелепипеда, его связь с ориентированным объемом и матрицей Грама.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 6,8; дополнительная литература: 2,4,5,6.

.

1. **Собственные векторы**.

Инвариантные подпространства и собственные вектора линейного оператора. Собственные значения и характеристический многочлен. Теорема о минимальной размерности инвариантных подпространств. Диагонализуемый оператор.

\*Модель межотраслевого баланса.

Корневые подпространства. Жорданова форма и жорданов базис. Алгоритм построения жорданова базиса. Матричные многочлены, теорема Гамильтона-Кэли, минимальный многочлен и его связь с характеристическим многочленом.

\*Фробениусова форма матрицы.

Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением. Самосопряженные (симметрические) операторы и ортонормированные собственные базисы. Унитарные и ортогональные операторы.

Литература: основной учебник: [Курош], гл. 7, 13; дополнительная литература: 2,4,5,6, 10.

1. **Основы аналитической геометрии**

Векторное и смешанное произведение векторов, их применение. \* Смешанное произведение и форма объема в многомерном пространстве.

Движения аффинного пространства, теорема о разложении движения в композицию ортогонального оператора и параллельного переноса. Общие квадрики в n-мерном арифметическом пространстве, теорема о приведении их движением к каноническому виду. Кривые второго порядка, их классификация. Свойства конических сечений. Классификация поверхностей второго порядка.

\* Основы проективной геометрии: проективные пространства, проективизация, понятие о проективном алгебраическом многообразии, изоморфизм групп GL(V) и H(V ) /PGL(V), задание проективного отображения его значениями на точках общего положения.

.

Литература: основной учебник: [3, параграфы 7.4 и 7.5]; дополнительная литература: 6,7; 3,8, 10

# Формы контроля знаний студентов

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | 1 год | | | | Кафедра | Параметры |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Текущий  (неделя) | Контрольная работа | 1 |  | 1 | 1 |  | Письменная работа 80 минут |
| Домашнее задание |  | 1 |  | 1 |  | Не менее 5--10 задач на каждое задание |
|  | Коллоквиум |  | 1 |  | 1 |  |  |
| Промежуточный | Экзамен |  | 1 |  |  |  | Выставляется по результатам контрольной, коллоквиума и домашнего задания, а также решения задач из листков. |
| Промежуточный | Экзамен |  |  |  | 1 |  | Выставляется по результатам двух контрольных, коллоквиума и домашнего задания, а также решения задач из листков. |

## Критерии оценки знаний, навыков

При текущем контроле студент должен продемонстрировать знание и понимание пройденного материала, владение навыками решения типовых задач, умение применять известные из лекций схемы теоретических рассуждений. методами определения решения или качественного исследования соответствующего дифференциального уравнения.

Это же должен продемонстрировать студент и на итоговом контроле.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

# Образовательные технологии

Проводятся стандартные лекционно-семинарские занятия и регулярные консультации с ответами на вопросы студентов. Применяются индивидуальные домашние задания, на коллоквиумах проводятся устные опросы и задаются теоретические задачи.

# 8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

**8.1 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины**

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать около двух тысяч задач из “Сборника задач по линейной алгебре” И. В. Проскурякова, а также задачники [7,9]. Примеры теоретических вопросов, которые предлагались на коллоквиуме, приведены ниже.



# Порядок формирования оценок по дисциплине

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде двух распределенных домашних заданий (в течение, соответственно, 1-2 и 3-4 модулей), контрольных работ по итогам 2 и 3 моделей, а также коллоквиума в 4 модуле изучения курса. Итоговый контроль осуществляется в виде экзамена в форме (после 2 модуля) и в форме письменной контрольной работы (после 4 модуля). двух письменных экзаменов (после 4 и 6 модуля), а также двух коллоквиумов (в конце 2 и 4 модулей). Итоговые оценки Оитог по 10-балльной шкале формируются как округленные до целого числа баллов от 0 до 10 взвешенные суммы, вычисляемые следующим образом.

Оценка за промежуточный экзамен (2 модуль):

Оитог=0,2\*Ок.р.+0,1\*Од.з.+0,3\*Ол+0,4\*Окол. +0,1\*Осем,

где Ок.р., Од.з, Ол, Окол. и Осем обозначают оценки по 10-балльной шкале за контрольную работу, домашнее задание, устную сдачу задач по листкам, первый коллоквиум и активность на семинаре,. Итоговая оценка (4 модуль):

Оитог= 0,15\*Окр1+0,1\*Од.з.+0,25\*Ол+0,35\* Окол.+0,1\*Осем. + 0,15\*Окр2.,

где Окр3, Окр4, Од.з, Окол., Ол , Осем обозначают оценки по 10-балльной шкале за третью и четвертую контрольные работы, второе домашнее задание, устную сдачу задач по листкам во втором семестре и активность на семинаре во втором семестре, соответственно.

Способ округления оценок – арифметический во всех случаях, кроме следующих: оценка более 3 и менее 4 баллов всегда округляется до 3 баллов, а если при вычислении получается оценка выше 10 баллов, выставляется 10 баллов.

**Таблица соответствия оценок по десятибалльной и пятибалльной системе.**

|  |  |
| --- | --- |
| По десятибалльной шкале | По пятибалльной системе |
| 1 – неудовлетворительно  2 – очень плохо  3 – плохо | неудовлетворительно – 2 |
| 4 – удовлетворительно  5 – весьма удовлетворительно | удовлетворительно – 3 |
| 6 – хорошо  7 – очень хорошо | хорошо – 4 |
| 8 – почти отлично  9 – отлично  10 - блестяще | отлично - 5 |

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

В диплом выставляет итоговая оценка по учебной дисциплине.

# Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

## Базовые учебники

1. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* М., Наука, 1971

## Основная литература

1. Гельфанд И. М. *Лекции по линейной алгебре*. (Любое издание, кроме 1-го, напр., М., Наука, 1971)
2. Винберг Э. Б. *Курс алгебры.* М., Факториал, 1999 и последующие издания
3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. (Любое издание, напр., М., БИНОМ, 2005)

## Дополнительная литература

1. Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D., *Linear Algebra for Economists.* Berlin—Heidelberg, Springer, 2011
2. Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г., *Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии*, М., ГУ ВШЭ, 1998
3. Ким Г. Д. , Крицков Л. В., *Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том I*, М., «Планета знаний», 2007
4. А.И.Кострикин, Ю.И.Манин, *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, М., 1980
5. Сборник задач по алгебре. (Под редакцией А.И.Кострикина). М., «МЦНМО», 2009
6. Городенцев А.Л., *Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1*, М., МЦНМО, 2013

## Справочники, словари, энциклопедии не используются

## Программные средства

* Выбор программных средств для реализации алгоритмов осуществляется студентом.

В домашних заданиях для рутинных алгебраических вычислений возможно использование систем Maple или Mаtlab, а также, в некоторых случаях, интернет-сервиса Wolfram Alpha.

## Дистанционная поддержка дисциплины

Предусмотрена электронная переписка со студентами.