**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Московский институт электроники и математики

Департамент прикладной математики

**Рабочая программа дисциплины**

«Дополнительные главы функционального анализа»

для образовательной программы «Прикладная математика»

направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика»

уровень «бакалавр»

Разработчик программы

Шур М. Г., m.shur@inbox.ru

Одобрена на заседании департамента прикладной математики

 «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2015 г.

Руководитель департамента А.В. Белов \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Рекомендована Академическим советом образовательной программы

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2015 г., № протокола\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Утверждена «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2015 г.

Академический руководитель образовательной программы

 Л. А. Манита \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Москва, 2015

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.*

# Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.04 «Прикладная математика» подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Дополнительные главы функционального анализа».

Программа разработана в соответствии с:

* ФГОС ВПО;
* Образовательной программой 01.03.04 «Прикладная математика»;
* Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.04 «Прикладная математика» подготовки бакалавра, утвержденным в 2015 г.

# Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа» является:

* дальнейшее освоение основных понятий и методов функционального анализа;
* создание теоретической базы для последующего обучения смежным математическим дисциплинам;
* освоение основных навыков приближенного решения функциональных и интегральных уравнений.

# Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен.

* Знать:
* понятие компактности и его роль в математике;
* теорию ограниченных линейных операторов, включая элементы спектральной теории и приложения к теории линейных интегральных уравнений;
* классическое преобразование Фурье и его аналог для квадратично суммируемых функций.
* Уметь:
* применять методы функционального анализа при решении прикладных задач.

# 4. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических дисциплин (вариативная часть).

Изучение данной дисциплины базируется на знаниях и умениях приобретённых в рамках курсов:

* «Математический анализ»;
* «Линейная алгебра и геометрия»;
* «Функциональный анализ».

Для освоения дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями:

* знание курсов «Математический анализ» и «Функциональный анализ» в полном объеме;
* знание курса «Линейная алгебра и геометрия» в части, касающейся теории матриц и теории линейных пространств.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении дисциплин:

* «Теория случайных процессов»;
* «Математическая физика».

# Тематический план учебной дисциплины

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название раздела | Всего часов  | Аудиторные часы | Самостоя­тельная работа |
| Лекции | Семинары |
| 1 | Пространства суммируемых в квадрате функций | 8 | 4 | 4 |  |
| 2 | Компактность | 12 | 6 | 6 |  |
| 3 | Линейные функционалы | 12 | 6 | 6 |  |
| 4 | Линейные операторы | 15 | 2 | 5 |  |
|  | **Итого:** | **60** | **30** | **30** |  |

# Формы контроля знаний студентов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | Год | Параметры |
| 1 | 2 |
| Текущий (неделя) | Коллоквиум 1 | 8 |  | Коллоквиум в устной форме(2 ауд. часа; завершается на консультации) |
|  | Коллоквиум 2 |  | 13 | Коллоквиум в устной форме(2 ауд. часа; завершается на консультации) |
| Итоговый | Экзамен |  | 16 | Экзамен в устной форме |

## 6.1. Критерии оценки знаний, навыков

На коллоквиуме и экзамене для получения оценок 4 – 5 баллов студент должен продемонстрировать знание основных определений и примеров и не допускать принципиальных ошибок в формулировках основных теорем. При полном ответе ставятся оценки 8-10 баллов в зависимости от наличия или отсутствия небольших недочетов (например, ошибок технического характера или неполной аргументации).

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-балльной шкале.

**6.2. Порядок формирования оценок по дисциплине**

При текущем или итоговом контроле работа оценивается в соответствии с п. 1.

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарах: учитывается активность студентов и предлагаемых ими решений. Оценки за работу на семинарах преподаватель выставляет в рабочую ведомость.

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов: учитывается правильность решения задач, включенных в текущие домашние задания, полнота аргументации и число решенных задач. Оценки за самостоятельную работу преподаватель выставляет в рабочую ведомость.

Оценка за текущую работу в *i* – м (*i* = 1, 2) модуле рассчитывается по формуле:

$$Q\_{текущий i}=0,5\*Q\_{коллоквиум i}+0,5\*Q\_{текущ. д. з.} $$

Накопленные оценки формируются по формулам:

$$Q\_{накоплен. i}= Q\_{текущий i}$$

$$Q\_{итоговая накопл.}=0,5\*Q\_{накопл. 1}+0,5\*Q\_{накопл. 2}$$

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается по формуле:

$$Q\_{результирующая}=0,3\* Q\_{итоговая накопл.}+0,7\* Q\_{экзамен}$$

Каждая из указанных оценок выставляется по 10-балльной шкале и округляется по арифметическому способу.

# Содержание дисциплины

 **Раздел 1.** **Пространства суммируемых и суммируемых в квадрате функций**

 Лекции 1, 2. Определения и основные свойства пространств суммируемых и суммируемых в квадрате функций (линейность, нормируемость, полнота и т. д.).

 На семинарах кратко обсуждаются соответствующие положения теории и решаются задачи. Каждый семинар занимает 2 ауд. часа. Семинары 1, 2 проводятся по материалу лекций 1,2.

***Литература: базовый учебник (см. п. 10.1), гл. 7, § 1, §2.***

**Раздел 2. Комплексность**

Лекции 3, 4. Вполне ограниченные множества в полных метрических пространствах. Теорема Арцела.

Лекция 5. Компактность. Свойства непрерывных функций на компактах.

Семинары 3, 4 соответствуют лекциям 3, 4, а семинар 5 – лекции 5.

***Литература: базовый учебник, гл. 7, § 7.***

 **Раздел 3. Линейные функционалы**

 Лекции 6, 7. Сопряженное пространство. Примеры ограниченных линейных функционалов. Теорема Рисса об общем виде ограниченных линейных функциаоналов.

Лекция 8. Слабая и сильная сходимости в сопряженном пространстве.

Семинары 6, 7 проводятся по материалам лекций 6,7. Семинар 8 отводится коллоквиуму 1 (при необходимости коллоквиум продолжается на консультации). Семинар 9 соответствует лекции 8.

***Литература*:** ***базовый учебник, гл. 4, § 1 - 3.***

 **Раздел 4.** **Линейные операторы**

 Лекция 9. Пространство ограниченных линейных операторов и соответствующие примеры.

Лекции 10-11. Обратный оператор. Теорема о ряде Неймана. Спектр и резольвента оператора ограниченного линейного оператора.

Лекция 12. Компактные операторы. Теорема о спектре компактного оператора. Приложения теорем о спектре в теории линейных интегральных уравнений.

Лекция 13. Понятие сопряженного оператора. Теорема Гильберта о структуре компактного самосопряженного оператора.

Лекция 14-15. Преобразования Фурье и Фурье-Планшереля.

Семинар 10 проводится по материалу лекции 9, а семинары 11-12 – по материалам лекций 10, 11. Семинар 13 отводится коллоквиуму 2. Семинары 14, 15 соответствуют лекциям 13, 14.

***Литература*:** ***базовый учебник, гл. 4, § 1 – 3, гл. 8, § 3-5 .***

# Образовательные технологии

 Все семинары проводятся в интерактивной форме и на них решаются соответствующие задачи. При необходимости кратко обсуждаются соответствующие теоретические положения.

# Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

##  Тематика заданий текущего контроля

На коллоквиуме 1 обсуждаются разделы «Компактность» и «Линейные функционалы» в объеме, соответствующем вопросам 1-9 из п. 9.2. На коллоквиуме 2 обсуждается раздел «Линейные операторы», см. вопросы 10-19.

 **9.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины**

Примерный перечень вопросов к экзамену по курсу

1. Приведите определение вполне ограниченного множества в полном метрическом пространстве. Выведите эквивалентное определение с использованием сходящихся подпоследовательностей. Приведите примеры.
2. Докажите теорему Арцела и проиллюстрируйте ее применение на примерах.
3. Приведите определение компакта в полном метрическом пространстве. Приведите примеры. Опишите связь между требованиями *а)* компактности и *б)* ограниченности и замкнутости множества.
4. Докажите теоремы о непрерывности функции на компактах.
5. Сформулируйте теорему об условии компактности.
6. Приведите примеры линейных функционалов в пространстве C[a,b]. Сформулируйте теорему Рисса об общем виде ограниченных линейных функционалов в этом пространстве.
7. Докажите теорему Рисса об общем виде ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве. Какие следствия влечет эта теорема для пространства $l\_{2}$ и $L\_{2}[a,b]$?
8. Определите два вида сходимости в сопряженном пространстве и установите связь между ними. Приведите примеры. Докажите, что дельта-функция является слабым пределом некоторой последовательности функционалов «типа функции» . допустимо ли здесь слабые пределы заменить сильными.
9. Сформулируйте теорему о слабой компактности шара в сопряженном пространстве.
10. Приведите примеры линейных непрерывных операторов в банаховых пространствах. Вычислите норму *а)* диагонального оператора в гильбертовом пространстве, *б)* оператора умножения на функцию в $L^{2}\left[a,b\right].$
11. Определите понятие обратного оператора. Что означает обратимость оператора на языке отображений? На языке уравнений? Приведите примеры. Выведите условия обратимости диагонального оператора в гильбертовом пространстве.
12. Докажите теорему Неймана об обратимости оператора, близкого к обратимому.
13. Определите понятие резольвенты и спектра оператора. Приведите соответствующие примеры для диагонального оператора в гильбертовом пространстве и оператора умножения в $L^{2}\left[a,b\right].$
14. Докажите теорему о спектре ограниченного линейного оператора (включая разложение в ряд Лорана).
15. Оцените норму интегрального оператора в $L^{2}\left[a,b\right]$ и изложите метод решения интегральных уравнений, основанный на разложении резольвенты оператора в ряд Лорана.
16. Докажите теорему о спектре конечномерного оператора и изложите метод решения интегральных уравнений с вырожденным ядром.
17. Определите понятие компактного оператора и приведите примеры. Докажите компактность интегрального оператора с квадратично суммируемым ядром.
18. Сформулируйте альтернативу Фредгольма и докажите теорему о спектре компактного оператора.
19. Определите понятие сопряженного оператора в гильбертовом пространстве и приведите примеры (в частности, найдите оператор, сопряженный интегральному оператору).
20. Выведите простейшие свойства самосопряженных операторов. Докажите, что спектральный радиус самосопряженного оператора равен его норме.
21. Докажите теорему Гильберта о структуре самосопряженного компактного оператора. Проиллюстрируйте ее на примере оператора свертки на окружности.
22. Определите классическое преобразование Фурье и выведите его простейшие свойства.
23. Определите оператор Фурье в пространстве $L^{2}(R)$, докажите его унитарность и найдите его спектр.

 **10. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

## 10.1 Базовый учебник

1. Колмогромов А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.

(Допустимо также использовать любое другое издание учебника).

##  10.2 Основная литература

1. Ананьевский И. М. Вопросы и задачи по функциональному анализу для студентов факультета прикладной математики. – М.: МИЭМ, 1996.

2. Федотов Ф. Г., Деменко В. Н., Голубаева З. Н. Разработка практических занятий по функциональному анализу в 5 семестре для студентов факультета прикладной математики. – М.: МИЭМ, 1996.

## Дополнительная литература

1. Кириллов А. А., Гвиашиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: МИЭМ, 1988.
2. Бородин П. А., Савчук Ф. М., Шейпак И. А. Задачи по функциональному анализу. Части 1,2. – М.: Изд-во ПС мех.-мат. Ф-та МГУ, 2010.

## Справочники, словари, энциклопедии

1. Функциональный анализ (под общей редакцией Крейна С. Г.). Сер. «Справочная математическая библиотека». – М.: Наука, 1972.

2. Математическая энциклопедия. Тома 1-5. – М.: Советская энциклопедия, 1977-1985.

.

.