

Некоторые открытые проблемы теории сетей Петри

Владимир Анатольевич Башкин

ЯрГУ им. П. Г. Демидова, Ярославль

27 ноября 2015 г.

VAS — Vector Addition Systems

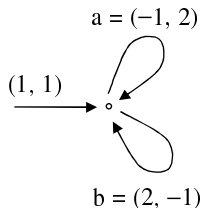
Один из наиболее компактных способов описания сетей Петри.

Система сложения векторов $\langle A, c_{init} \rangle$:

- $A \subset \mathbf{Z}^d$ — конечное множество *действий* (переходов),
- $c_{init} \in \mathbf{Nat}^d$ — *начальная конфигурация*.

$$A = \{a = (-1, 2), b = (2, -1)\}$$

$$c_{init} = (1, 1)$$



Трасса — последовательность действий $a_1, \dots, a_n$, такая, что

$$\forall i \leq n \quad c_{init} + a_1 + \dots + a_i \geq \bar{0}.$$

VAS — Vector Addition Systems

Трасса — последовательность действий $a_1, \dots, a_n$, такая, что

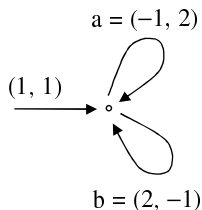
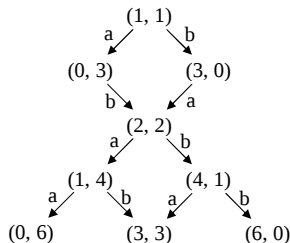
$$\forall i \leq n \ c_{init} + a_1 + \dots + a_i \geq \bar{0}.$$


abb — трасса, **a****a** — не трасса.

Выразительность

$\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ – не КС-язык – распознается некоторой VAS
 $\{\alpha \alpha^{-1} \mid \alpha \in \{a, b\}^*\}$ – КС-язык – не распознается никакой VAS

$\Rightarrow$ VAS (сети Петри) не сравнимы с магазинными автоматами
("умеют запоминать" вектора, но не строки)



Алгоритмические свойства

Регулярность языка трасс **разрешима** [Ginzburg and Yoeli 1980, Valk and Vidal-Naquet 1981] и EXPSPACE-полна [Demri 2010].

Покрываемость **разрешима** [Karp and Miller 1969] и EXPSPACE-полна [Rackoff 1978].

Достижимость EXPSPACE-трудна [Lipton 1976] и **разрешима** [Mayr 1981, Kosaraju 1982, новый алгоритм — Leroux 2010].

Эквивалентности **неразрешимы** [множеств состояний и языков трасс — Hack 1976, бисимулярность — Jančar 1995].

Верификация для логик ветвящегося времени **неразрешима** [фрагмент EF логики CTL — Esparza 1994].

⇒ один из наиболее выразительных среди поддающихся анализу классов систем с бесконечным числом состояний

Эквивалентные способы описания

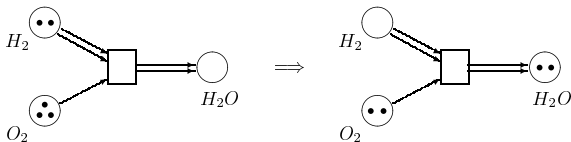
Наиболее популярные:

- Сети Петри [Petri 1960]
- Счетчиковые сети (VASS) [Hopcroft and Pansiot 1978]
- Алгебры процессов (P,P)-PRS – [Mayr 1997]

Общие свойства:

- структура данных – конечное мультимножество (вектор);
- асинхронность;
- локальность проверки и преобразования данных.

Сети Петри [Carl-Adam Petri, 1960 (1939)]



Сеть Петри $N = (P, T, F)$:

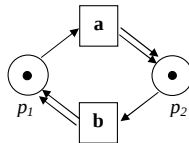
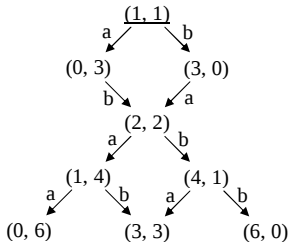
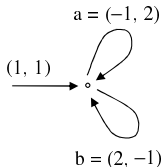
- P — множество позиций;
- T — множество переходов, $P \cap T = \emptyset$;
- $F : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow Nat$ — мультимножество дуг.

Разметка (состояние) $M : P \rightarrow Nat$ — мультимножество фишек.
Множество всех разметок обозначим как $\mathcal{M}(P)$.

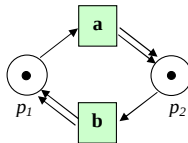
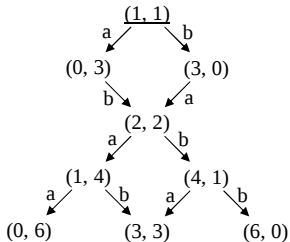
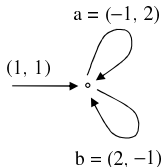
Смена состояния системы при срабатывании перехода t :

$$(2, 3, 0) \xrightarrow{t} (0, 2, 2).$$

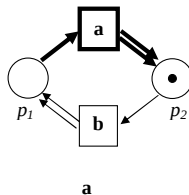
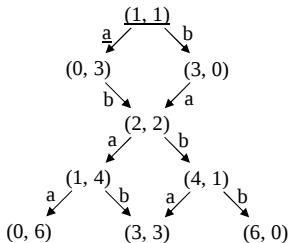
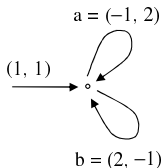
Моделирование VAS сетью Петри



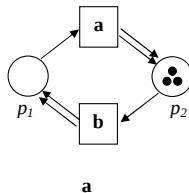
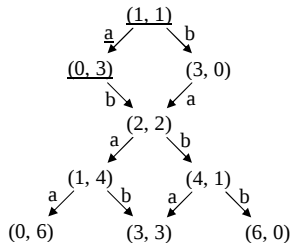
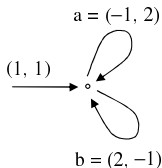
Моделирование VAS сетью Петри



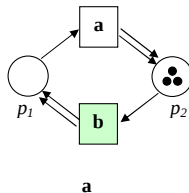
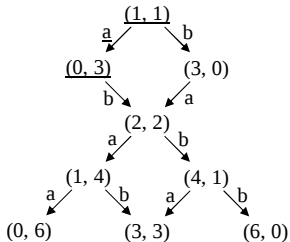
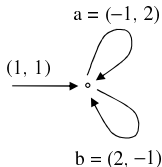
Моделирование VAS сетью Петри



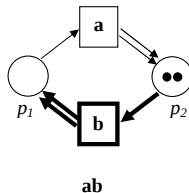
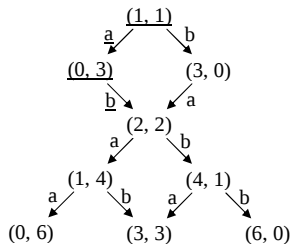
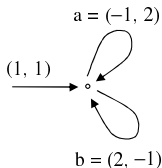
Моделирование VAS сетью Петри



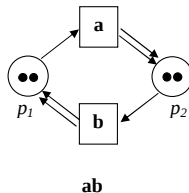
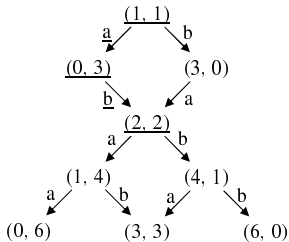
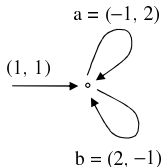
Моделирование VAS сетью Петри



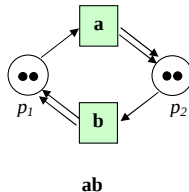
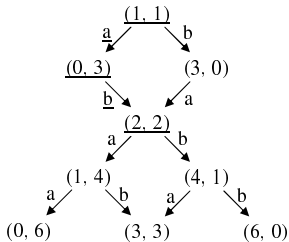
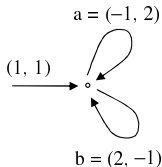
Моделирование VAS сетью Петри



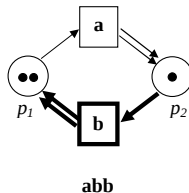
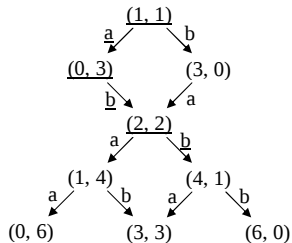
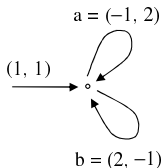
Моделирование VAS сетью Петри



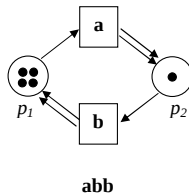
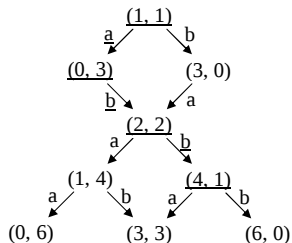
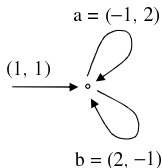
Моделирование VAS сетью Петри



Моделирование VAS сетью Петри



Моделирование VAS сетью Петри



1. Бисимуляции в сетях Петри

Эквивалентность поведений = бисимулярность состояний
(разметок сети).

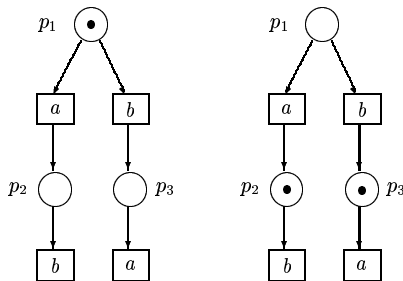
Бисимуляция (R.Milner, D.Park, 1980):

Два состояния бисимулярны, если внешний наблюдатель (который видит только метки срабатывающих переходов) не может различить, с какого из них система начала свою работу.

Бисимулярность сильнее языковой эквивалентности и лучше учитывает ветвления в дереве достижимых состояний.

Симуляция разметок — формальное определение

Пусть $R \subseteq \mathcal{M}(P) \times \mathcal{M}(P)$ — отношение на множестве разметок сети. R называется *симуляцией*, если для любой пары $(m_1, m_2) \in R$ и перехода $m_1 \xrightarrow{t} m'_1$ найдется имитирующий переход $m_2 \xrightarrow{u} m'_2$, такой что $(m'_1, m'_2) \in R$ и $l(u) = l(t)$.



$$R = Id(P) \cup \{(\emptyset, \emptyset), (p_1, p_2 + p_3)\}$$

Бисимуляция разметок — формальное определение

R называется *бисимуляцией*, если R и R^{-1} — симуляции.

Для любой сети Петри существует единственная наибольшая по вложению бисимуляция (обозначается $\sim$).

Негативный результат (P.Jančar, 1994)

Отношение $\sim$ неразрешимо.

Необходимо рассматривать более сильные отношения.

Подобие ресурсов

Формально: ресурс $r \in \mathcal{M}(P)$ — это мультимножество фишек.

(неформально: ресурсом мы считаем мультимножество фишек, каким-либо выраженным образом характеризующее все содержащиеся его разметки)

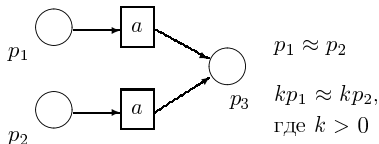
Определим отношение эквивалентности не на множестве состояний сети, а на множестве её ресурсов:

Подобие ресурсов (В.А.Башкин, И.А.Ломазова, 2000)

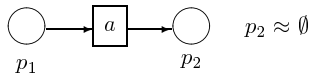
Ресурсы r и s *подобны* (обозначается $r \approx s$), если для любого ресурса t верно $t + r \sim t + s$.

При замене в любой разметке одного ресурса на подобный ему другой ресурс наблюдаемое поведение сети не изменится.
Пара подобных ресурсов задаёт бесконечное множество пар бисимулярных разметок.

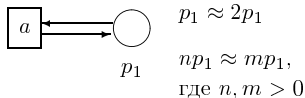
Примеры подобных ресурсов



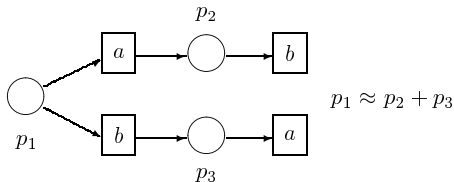
а) параллельное срабатывание



б) тупик



в) цикл



г) ресурсы разной мощности

Основные свойства подобия ресурсов

Теорема (2000–2003)

Подобие ресурсов для любой сети Петри:

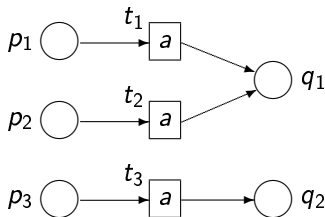
- отношение эквивалентности;
- сужение бисимуляции разметок;
- замкнуто относительно сложения;
- обладает конечным базисом;
- неразрешимо.

Бисимуляция ресурсов

Добавим требование замкнутости отн. срабатываний переходов (как в бисимуляциях разметок).

Бисимуляция ресурсов

Сужение подобия, аддитивно-транзитивное замыкание которого является бисимуляцией разметок.



$$p_1 \approx p_2 \approx p_3$$

$$q_1 \approx q_2$$

$$B_1 = Id(P) \cup \{(p_1, p_3), (p_3, p_1)\}$$

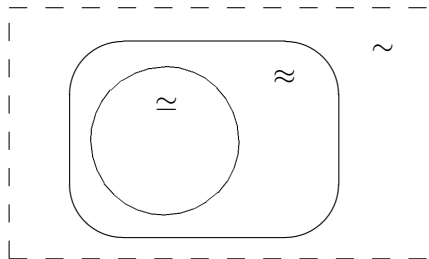
$$B_2 = B_1 \cup \{(q_1, q_2), (q_2, q_1)\}$$

B_1 — не бисимуляция ресурсов, B_2 — бисимуляция ресурсов

Бисимуляция ресурсов

Теорема

- Если B_1, B_2 — бисимуляции ресурсов, то $B_1 \cup B_2$ — бисимуляция ресурсов.
- Для любой сети существует максимальная по вложению бисимуляция ресурсов (обозн. $\simeq$).
- $(\simeq)$ является отношением эквивалентности.



Бисимуляция ресурсов

Теорема

- Любая бисимуляция ресурсов (в т.ч. $(\simeq)$) обладает конечным АТ-базисом.
- Существует алгоритм проверки, является ли данное конечное отношение базисом некоторой бисимуляции ресурсов.

Очевидная “процедура” приближения $(\simeq)$: перебор и проверка всевозможных базисов размера 2, 3, 4, ... Согласно теореме, рано или поздно мы встретим базис $(\simeq)$.

Бисимуляция ресурсов

Теорема

- Любая бисимуляция ресурсов (в т.ч. $(\simeq)$) обладает конечным АТ-базисом.
- Существует алгоритм проверки, является ли данное конечное отношение базисом некоторой бисимуляции ресурсов.

Очевидная “процедура” приближения $(\simeq)$: перебор и проверка всевозможных базисов размера 2, 3, 4, ... Согласно теореме, рано или поздно мы встретим базис $(\simeq)$. Но как понять, что это именно он?

Бисимуляция ресурсов

Теорема

- Любая бисимуляция ресурсов (в т.ч. $(\simeq)$) обладает конечным АТ-базисом.
- Существует алгоритм проверки, является ли данное конечное отношение базисом некоторой бисимуляции ресурсов.

Очевидная “процедура” приближения $(\simeq)$: перебор и проверка всевозможных базисов размера 2, 3, 4, ... Согласно теореме, рано или поздно мы встретим базис $(\simeq)$. Но как понять, что это именно он? **Открытая проблема.**

Бисимуляция ресурсов

Эквивалентная формулировка:

Открытая проблема 1

Разрешима ли проблема вычисления максимальной бисимуляции ресурсов ($\simeq$)?

Бисимуляция ресурсов

Эквивалентная формулировка:

Открытая проблема 1

Разрешима ли проблема вычисления максимальной бисимуляции ресурсов ($\simeq$)?

Гипотеза (2003)

$$(\sim) = (\simeq)$$

То есть максимальная бисимуляция ресурсов совпадает с подобием ресурсов. Контрпримеров пока не обнаружено.

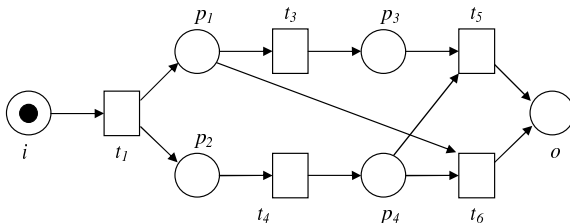
Следствия гипотезы:

- 1 Бисимуляция ресурсов неразрешима (негативный ответ на проблему 1).
- 2 Подобие ресурсов является бисимуляцией разметок.

2. Сети потоков работ (workflow)

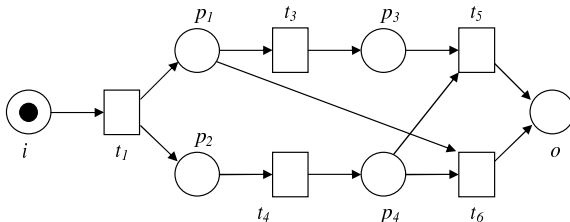
Важный частный случай сетей Петри — **сети потоков работ (workflow)** — модели технологических и бизнес-процессов:

- выделены начальная и конечная позиции i и o (*начало* и *завершение* процесса);
- любой узел сети лежит на пути из i в o (нет структурных тупиков и недостижимых узлов);
- начальная разметка — одна фишка в i .



Бездефектные потоки работ

Схема процесса называется *бездефектной* (sound), если он всегда *правильно завершается* — отсутствуют тупики, избыточные подпроцессы и лишние фишки после завершения.

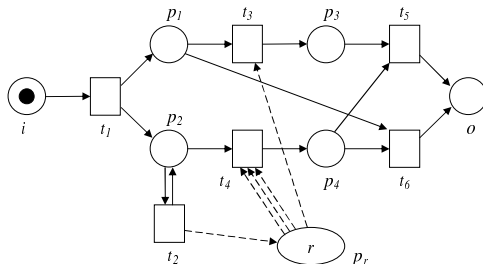


Бездефектность разрешима для сетей потоков работ:

- обыкновенных (W. van der Aalst, 1998);
- с ограниченным ресурсом (K. van Hee и др., 2005).

Потоки работ с ресурсами

Добавим в сеть неограниченный счётчик (определим RWF-сеть — WF-сеть с ресурсами):

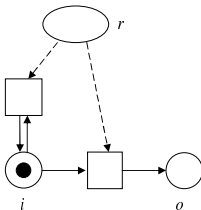


Бездефектность RWF-сетей

RWF-сеть *бездефектна*, если:

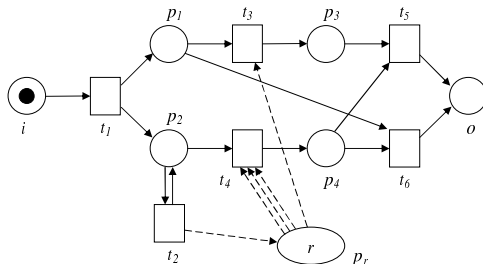
- 1 она правильно завершает работу;
- 2 добавление ресурсов не нарушает правильности завершения.

RWF-сеть, не являющаяся бездефектной:



Бездефектность RWF-сетей

Бездефектная RWF-сеть:



добавление неограниченного “счетчика” $\Rightarrow$
возможны бесконечные множества достижимости $\Rightarrow$
усложняется задача проверки бездефектности

Бездефектность одномерных RWF-сетей

Теорема (В.А.Башкин, И.А.Ломазова, 2012)

Для потоков работ с одномерным неограниченным ресурсом разрешимы проблемы:

- проверки бездефектности;
- определения минимального бездефектного ресурса.

Рассмотрен одномерный случай (одна ресурсная позиция).

Бездефектность одномерных RWF-сетей

Теорема (В.А.Башкин, И.А.Ломазова, 2012)

Для потоков работ с одномерным неограниченным ресурсом разрешимы проблемы:

- проверки бездефектности;
- определения минимального бездефектного ресурса.

Рассмотрен одномерный случай (одна ресурсная позиция).

Открытая проблема 2

Разрешима ли проблема для двух и более ресурсных позиций?

Рабочая гипотеза – разрешимость для любого n .

3. Клеточные сети Петри

“Сеть-внутри-сети” (И. А. Ломазова, 1999; S. Haddad, 1999; R. Valk, 1998)

Заменяем элементарные фишки на сложные объекты с собственным поведением. Внешний слой — *системная сеть*, внутренний слой — *объектные сети* (фишки). Слои каким-то образом взаимодействуют.

Классические net-within-net: и система, и объект — сети Петри.

3. Клеточные сети Петри

“Сеть-внутри-сети” (И. А. Ломазова, 1999; S. Haddad, 1999; R. Valk, 1998)

Заменяем элементарные фишки на сложные объекты с собственным поведением. Внешний слой — *системная сеть*, внутренний слой — *объектные сети* (фишки). Слои каким-то образом взаимодействуют.

Классические net-within-net: и система, и объект — сети Петри.

“Упростим” модель: система — оргграф, объекты — конечные автоматы. Синхронизация — только между объектами через совместные ресурсы.

Сети автоматов с ресурсами (Р-сети)

Обобщенная фишка (внутренний объектный слой):

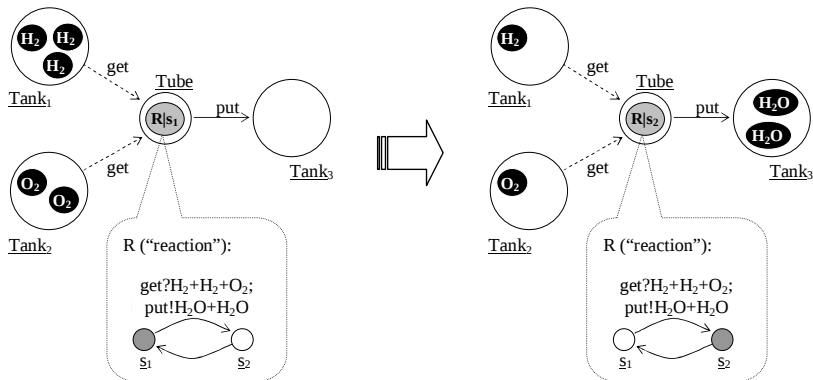
Автомат с ресурсами (Resource Driven Automaton) — конечный автомат, переходы которого могут быть помечены ресурсными выражениями, обозначающими потребление и/или производство внешних ресурсов через внешние порты.

Фактически “вывернутая наизнанку” счетчиковая сеть, счетчики которой “плавают” вокруг и доступны через порты.

Системная сеть (внешний слой):

Сеть, фишками которой являются Р-автоматы, а дуги помечены именами портов.

Пример Р-сети



Свойства Р-сетей

Теорема

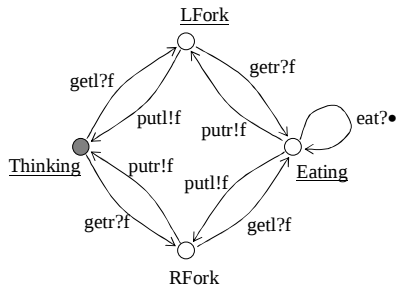
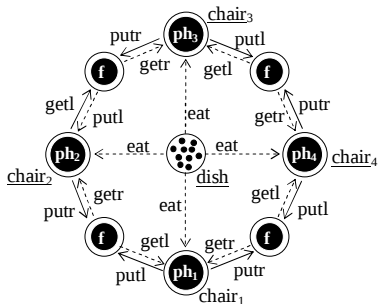
Р-сети равномощны сетям Петри.

⇒ обладают тем же набором разрешимых свойств.

Особенности Р-сетей:

- Двухуровневая структура позволяет разделить системные элементы от объектных (удобство трансформации модели).
- Косвенное взаимодействие агентов через общие ресурсы (в отличие от известных формализмов “сеть-внутри-сети”, нет необходимости в синхронизирующих событиях).
- Наглядное моделирование пространственных структур.

Обедающие философы (Dining Philosophers)

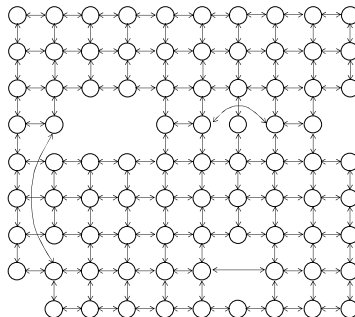
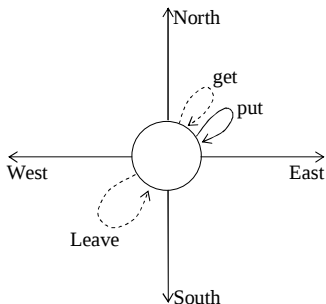


Системная сеть (схема обеденного стола) и объектный автомат (алгоритм поведения фишки-философа).

“Муравьиные колонии”

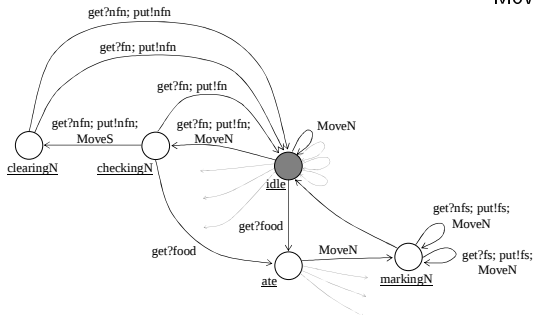
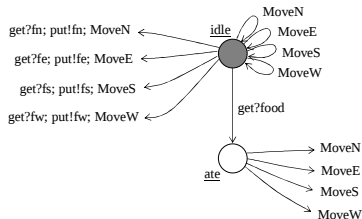
Классический пример децентрализованной координации:

- Лес — конечная решетка *точек* (локаций), связанных тропинками.
- Конечное множество *муравьёв*, бродящих по лесу в поисках *еды* (локация может содержать конечное множество единиц еды).
- Если муравей находит что-то и съедает, то в течение нескольких шагов в одном направлении оставляет за собой след из феромонов.
- Муравей может воспользоваться чужим феромонным следом в поисках еды; если след ошибочный (еда кончилась), то он его может “стереть”.



Муравей может использовать выходные порты *North*, *East*, *South* и *West* для того, чтобы переместить себя в другую локацию. Для моделирования покидания текущей локации добавлен входной порт *Leave*.

Порты *get* и *put* позволяют поднимать и класть предметы.



Константы:

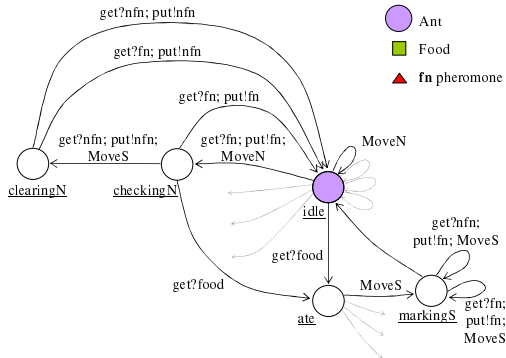
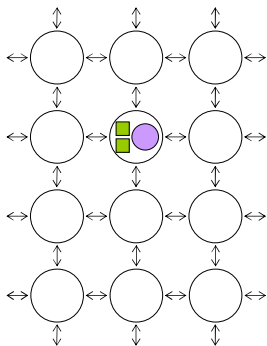
food, fn, fe, fs, fw : item
nfn, nfe, nfs, nfw : item

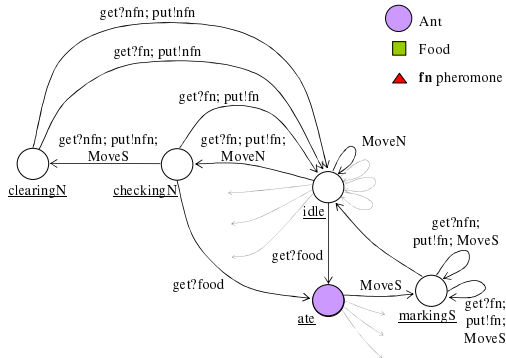
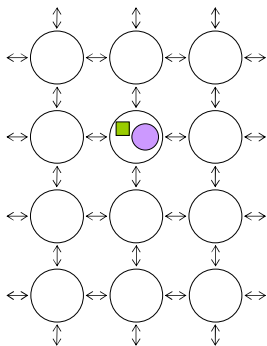
Порты:

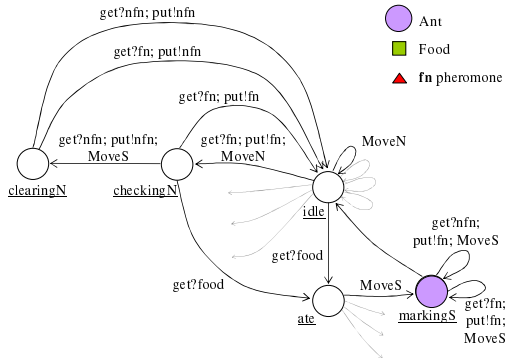
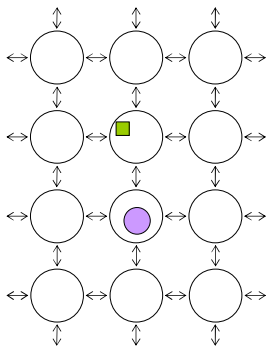
?get, !put : item
!North, !East, !South, !West : ant
?Leave : ant

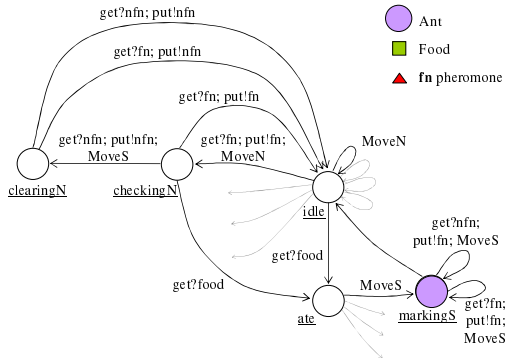
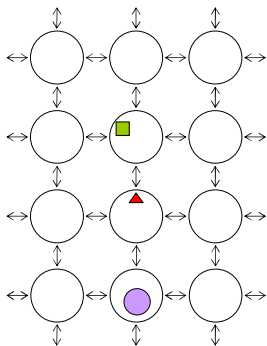
Макроподстановки:

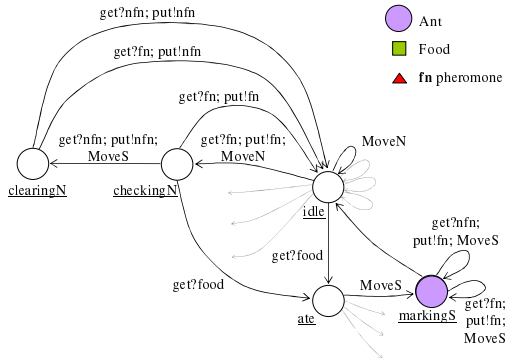
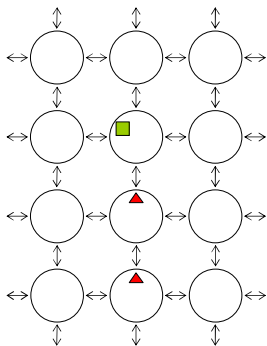
MoveW ::= Leave?this; West!this
MoveN ::= Leave?this; North!this
MoveS ::= Leave?this; South!this
MoveE ::= Leave?this; East!this

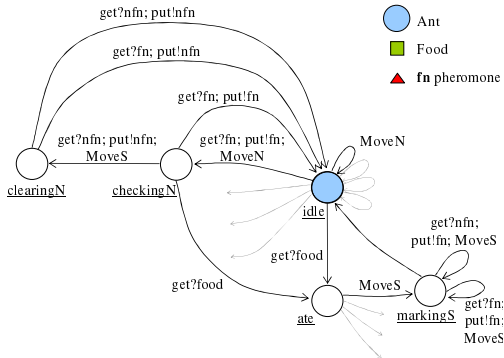
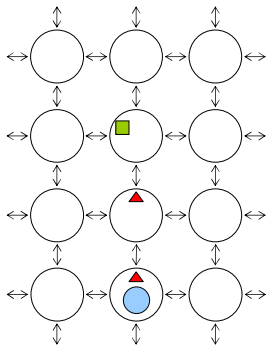


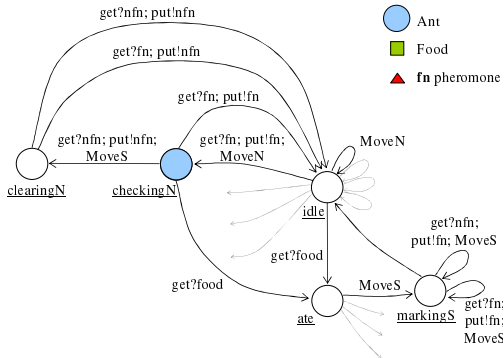
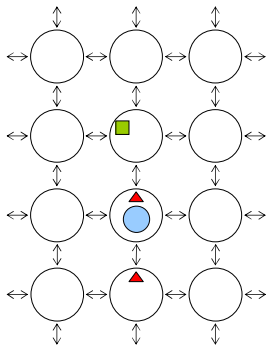


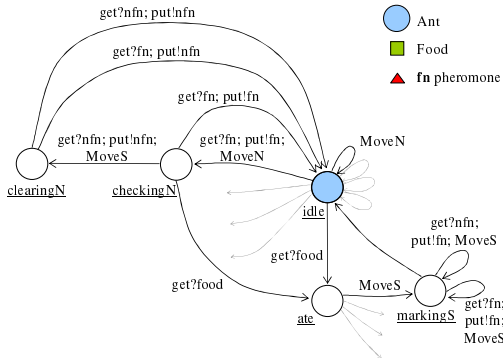
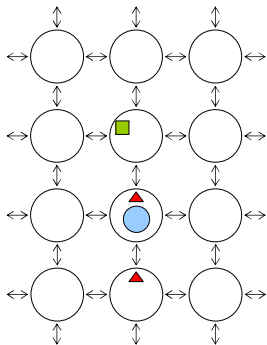


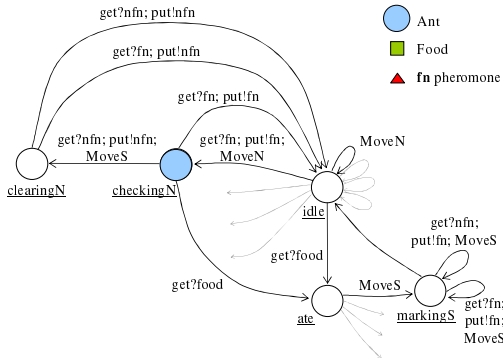
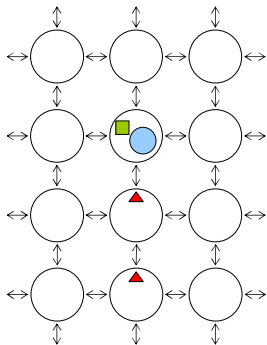


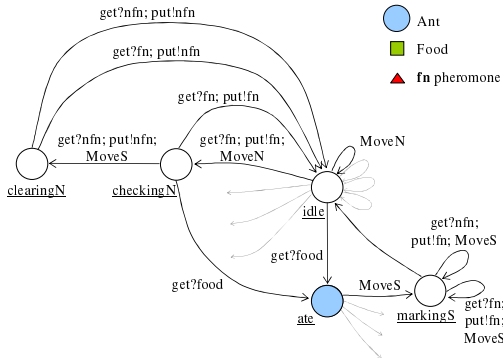
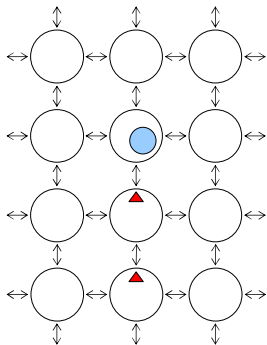


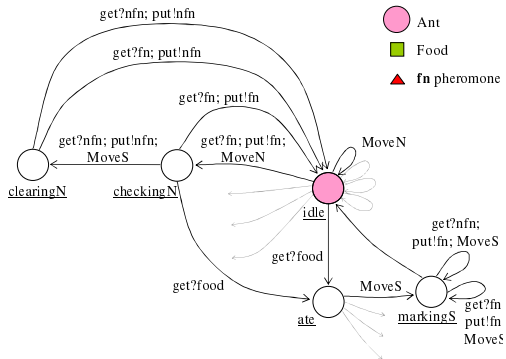
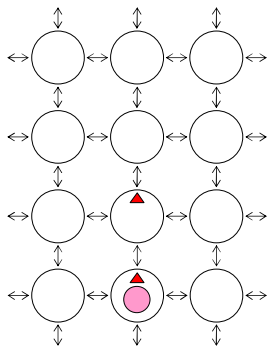


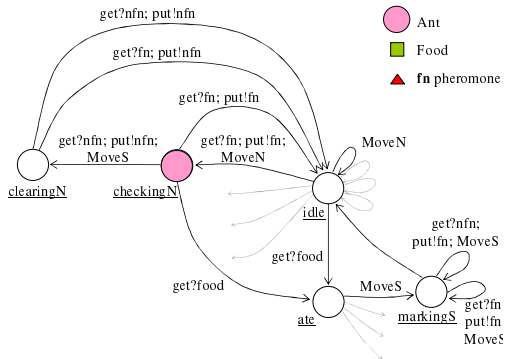
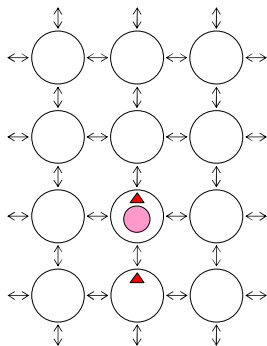


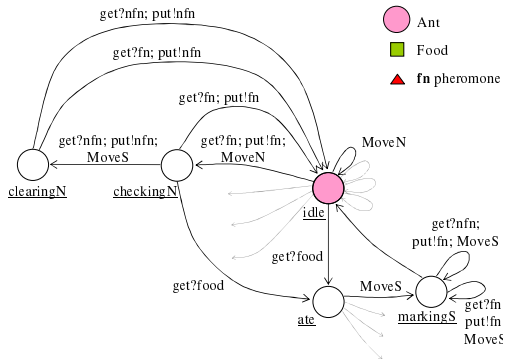
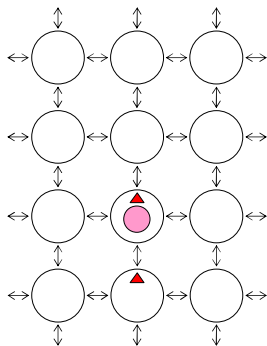


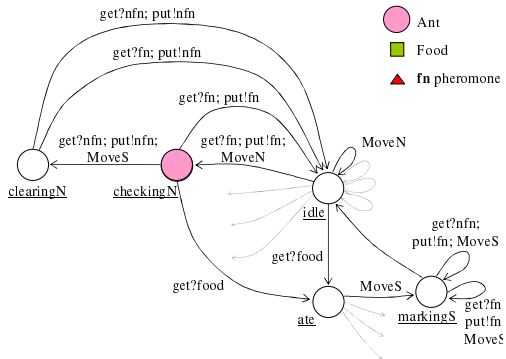
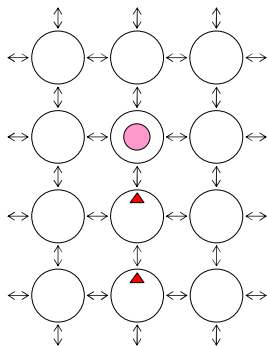


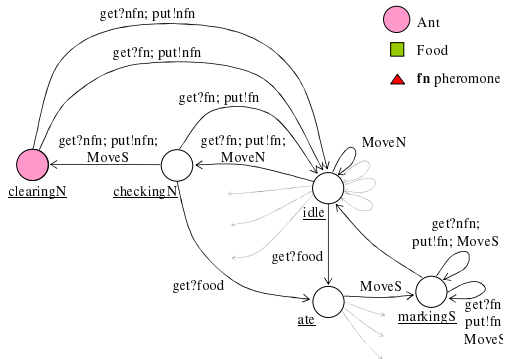
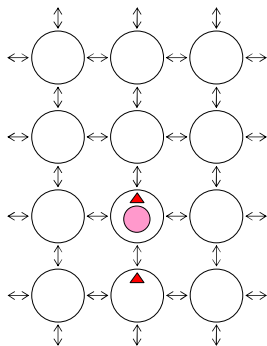


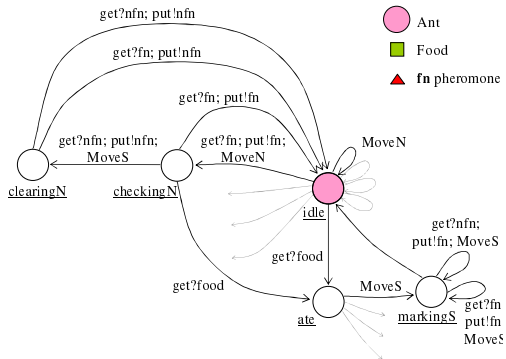
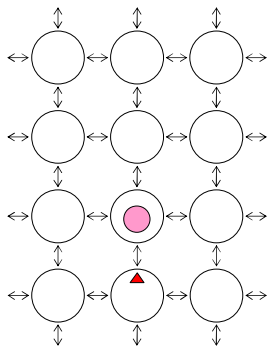












Клеточные сети

Естественный переход к бесконечному случаю:

Конечные сообщества Р-автоматов, располагающиеся в узлах некоторой **бесконечной регулярной** системной сети.

Модель, подобная **Клеточным Автоматам** $\Rightarrow$ *Клеточные Р-сети (Cellular Resource Driven Automata, CRDA).*

Отличия от классических КА:

- асинхронность;
- отдельная ячейка — не автомат, а сеть Петри.

Отличия от классических сетей Петри:

- неограниченное число сетей;
- взаимодействие между сетями.

Иерархия классов клеточных сетей

Рассмотрены 1-dim CRDA — одномерные клеточные сети (сети-цепочки), а также их сужения:

- 1-dim iCRDA — только входные порты;
- 1-dim oCRDA — только выходные порты;

Теорема (В.А.Башкин, И.А.Ломазова, 2012)

- 1-dim iCRDA = конечные автоматы;
- Сети Петри без коммуникаций (Communication-free Petri nets) $\subseteq$ 1-dim oCRDA;
- Сети Петри $\not\subseteq$ 1-dim oCRDA;
- 1-dim oCRDA $\subset$ машины Тьюринга;
- 1-dim CRDA = машины Тьюринга.

Моделирующие возможности клеточных сетей

Новая модель. Различные трактовки:

- Сеть Петри с бесконечным множеством позиций.
- Асинхронный клеточный автомат с неограниченным числом состояний ячейки.
- Динамически изменяющееся множество взаимодействующих (в т.ч. порождающих и уничтожающих друг друга) автоматов.
- Динамически изменяющееся множество сетей Петри с разделяемыми позициями.

Содержательные сужения (например, на основе топологии системной решетки).

Моделирующие возможности клеточных сетей

Новые “пространственные” свойства:

- Локальность.
- Ограниченность диаметра.
- Размерность.
- ...

Возможные применения: сложные клеточные автоматы, мобильные сети, мультиагентные системы и т.п.

Моделирующие возможности клеточных сетей

Новые “пространственные” свойства:

- Локальность.
- Ограниченность диаметра.
- Размерность.
- ...

Возможные применения: сложные клеточные автоматы, мобильные сети, мультиагентные системы и т.п.

Много открытых проблем.

Основные публикации

- ❶ *Башкин В.А., Ломазова И.А.* Бисимуляция ресурсов в сетях Петри // Известия РАН: Теория и системы управления. — 2003. — №4. — С.115–123.
- ❷ *Bashkin V.A., Lomazova I.A.* Petri Nets and resource bisimulation // Fundamenta Informaticae. — 2003. — Vol.55. №2. — P.101–114.
- ❸ *Башкин В.А., Ломазова И.А.* Моделирование мультиагентных систем с помощью обобщенных сетей активных ресурсов // Кибернетика и системный анализ. — Киев, 2011. — №2. — С.31–39.
- ❹ *Bashkin V.A., Lomazova I.A.* Resource Driven Automata Nets // Fundamenta Informaticae. — 2011. — Vol. 109. №3. — P.223–236.
- ❺ *Bashkin V.A., Lomazova I.A.* Cellular Resource-Driven Automata // Fundamenta Informaticae. — 2012. — Vol. 120. № 3-4. — P.245–259.
- ❻ *Bashkin V.A., Lomazova I.A.* Decidability of k-Soundness for Workflow Nets with an Unbounded Resource // Transactions on Petri Nets and Other Models of Concurrency. LNCS. — 2014. — Vol. 8910. P.1–18.