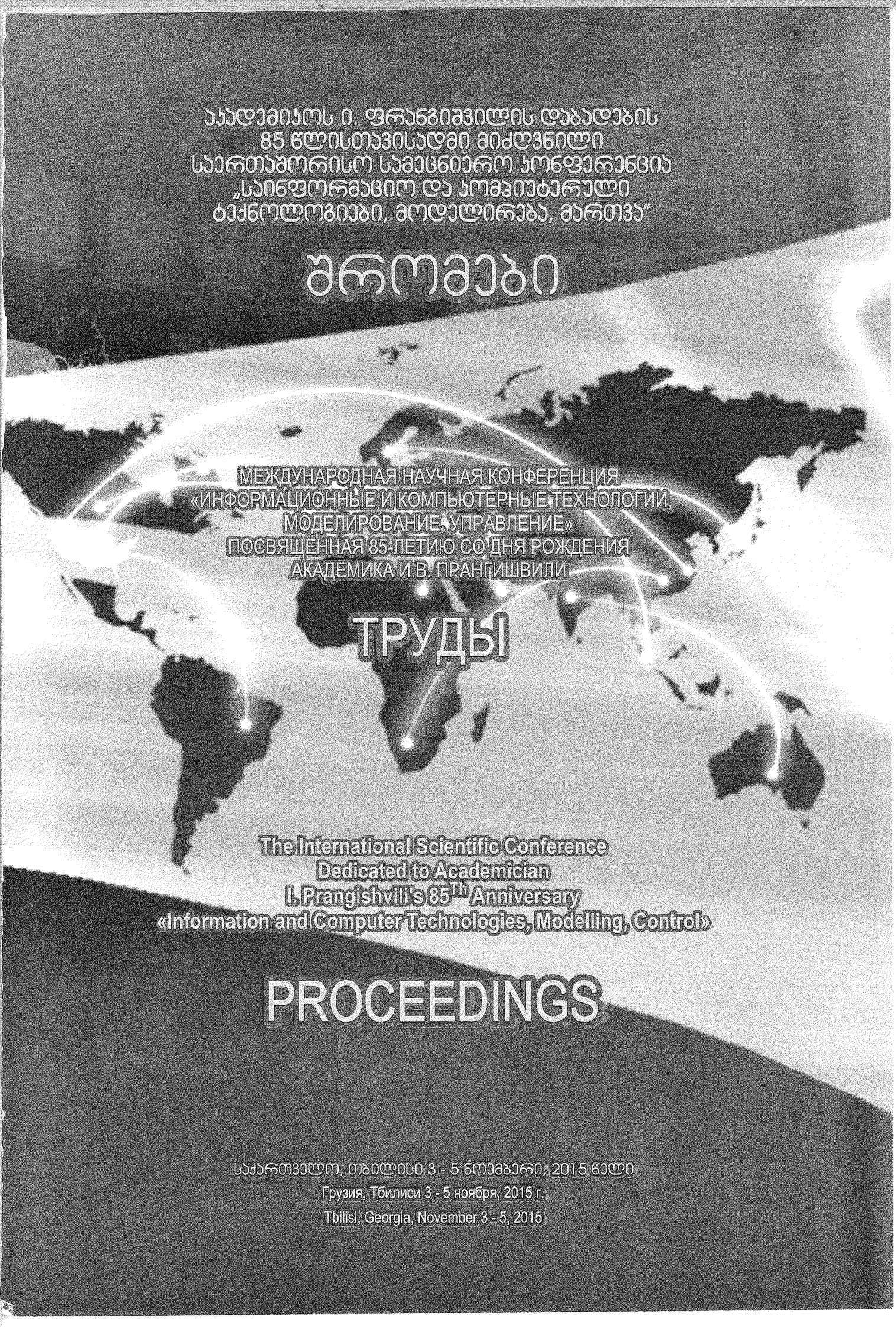

აკადემიკოს ი. ფრანგიშვილის დაბადების
85 წლისთავისადმი მიძღვნილი
საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია
„საინფორმაციო და კომპიუტერული
ტექნოლოგიები, მოდელირება, მართვა"

შრომები

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«ИНФОРМАЦИОННЫЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ,
МОДЕЛИРОВАНИЕ, УПРАВЛЕНИЕ»
ПОСВЯЩЁННАЯ 85-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
АКАДЕМИКА И.В. ПРАНГИШВИЛИ

ТРУДЫ

The International Scientific Conference
Dedicated to Academician
I. Prangishvili's 85Th Anniversary
«Information and Computer Technologies, Modelling, Control»

PROCEEDINGS

საქართველო, თბილისი 3 - 5 ნოემბერი, 2015 წელი
Грузия, Тбилиси 3 - 5 ноября, 2015 г.
Tbilisi, Georgia, November 3 - 5, 2015

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
GEORGIAN TECHNICAL UNIVERSITY
ГРУЗИНСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

აკადემიკოს ივერი პრანგიშვილის დაბადების 85-ე წლისთავისადმი მიძღვნილი
საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია

საინფორმაციო და კომპიუტერული ტექნოლოგიები, მოდელირება, მართვა

შრომები

International Scientific Conference

Dedicated to 85th anniversary of Academician I.V. Prangishvili

Information and Computer Technologies, Modelling, Control

PROCEEDINGS

Международная научная конференция

посвященная 85-летию со дня рождения академика И.В. Прангишвили

Информационные и компьютерные технологии, моделирование, управление

ТРУДЫ

თბილისი – TBILISI – **ТБИЛИСИ**
2015

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
საქართველოს საინჟინრო აკადემია
რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის მართვის პრობლემების ინსტიტუტი
საერთაშორისო საინჟინრო აკადემია

GEORGIAN TECHNICAL UNIVERSITY
GEORGIAN ENGINEERING ACADEMY
INSTITUTE OF CONTROL SCIENCES OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
INTERNATIONAL ENGINEERING ACADEMY

ГРУЗИНСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНЖЕНЕРНАЯ АКАДЕМИЯ ГРУЗИИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ РАН
МЕЖДУНАРОДНАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ АКАДЕМИЯ

კონფერენცია ტარდება შოთა რუსთაველის
ეროვნული სამეცნიერო ფონდის მხარდაჭერით

THE CONFERENCE IS SUPPORTED BY THE SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

КОНФЕРЕНЦИЯ ПРОВОДИТСЯ ПРИ ПОДДЕРЖКЕ НАЦИОНАЛЬНОГО НАУЧНОГО ФОНДА ИМ. ШОТА РУСТАВЕЛИ

© საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2015
ISBN 978-9941-20-575-0
http://www.gtu.ge/

ყველა უფლება დაცულია. ამ გამოცემის არც ერთი ნაწილი (იქნება ეს ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) არანაირი ფორმით და საშუალებით (იქნება ეს ელექტრონული თუ მექანიკური), არ შეიძლება გამოყენებულ იქნას გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

საავტორო უფლებების დარღვევა ისჯება კანონით.

Потенциальная оптимальность и потенциальная недоминируемость в задачах выбора

Владислав Владимирович Подиновский

Резюме — **Понятия потенциальной оптимальности и потенциальной недоминируемости являются базовыми для задач выбора, в которых предпочтения описываются при помощи семейств бинарных отношений. Дается краткий обзор результатов, связанных с этими понятиями и полученных в работах, опубликованных в последние годы.**

Индексационные термины — **многокритериальные задачи принятия решений, отношение предпочтения потенциально оптимальные альтернативы, потенциально недоминируемые альтернативы.**

Введение

Наиболее распространенными задачами принятия индивидуальных решений являются задачи выбора одной наилучшей альтернативы (варианта, плана, стратегии, ...) из заданного (сформированного) множества альтернатив. При анализе таких задач с использованием математических методов для моделирования предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР), широко используются бинарные отношения предпочтения. Например, теория важности критериев предполагает, что предпочтения описываются такими отношениями [1], [2]. Если предпочтения представляются одним таким отношением и это отношение является полным (т.е. любые два варианта сравнимы по этому отношению), то базовым является понятие *оптимальности*, а если частичным (т.е. не всякие два варианта сравнимы по этому отношению), то базовым является понятие *недоминируемости* (см., например, [3]). Если же используется семейство бинарных отношений (т.е. заранее неизвестно, какое именно из входящих в него отношений описывает предпочтения ЛПР), то базовыми являются понятия *потенциальной оптимальности* (если все отношения из семейства являются полными) и понятие *потенциальной недоминируемости* (если отношения из семейства являются частичными). Понятие потенциальной оптимальности было введено первоначально для случая, когда предпочтения моделируются при помощи функции ценности (полезности) с неточно известными параметрами, например, весами критериев [4], [5[. Для случая семейства бинарных отношений, которые можно представить функцией ценности, понятие потенциальной оптимальности было предложено в [6], а для общего случая – в [7], [8]; понятие потенциальной недоминируемости было введено в [9].

Данная работа является обзорной: в ней приводятся основные результаты из статей [7] – [13], опубликованных в самые последние годы.

Базовые определения

Пусть X –множество альтернатив и R – заданное на нем отношение нестрогого предпочтения: $x'Rx''$ означает, что альтернатива x' не менее предпочтительна, чем x''. Предполагается, что множество X содержит не менее двух альтернатив, а отношение R является *квазипорядком* (оно рефлексивно и транзитивно). Если для любых вариантов x' и x'' верно $x'Rx''$ или $x''Rx'$, то квазипорядок R называется *полным*, в противном случае – *частичным*.

Отношение R порождает отношение безразличия I и отношение (строгого) предпочтения P: если верно $x'Rx''$ и $x''Rx'$, то справедливо $x'Ix''$ (альтернативы x' и x'' безразличны, или одинаковы по предпочтительности); если же верно $x'Rx''$, но $x''Rx'$ неверно, то справедливо $x'Px''$ (альтернатива x' предпочтительнее альтернативы x''). Для квазипорядка R отношение I есть эквивалентность (оно симметрично, рефлексивно и транзитивно), а отношение P – строгий частичный порядок (оно иррефлексивно и транзитивно).

Альтернатива x^* называется *оптимальной* (*по* R), если для любой альтернативы x верно x^*Rx. Оптимальная альтернатива существует, если множество X конечно, а квазипорядок R является полным. Однако в задачах

Рукопись получена 30 октября 2015 года. Статья подготовлена в ходе проведения работы в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики" (НИУ ВШЭ) и с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.

В. В. Подиновский – Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 20 ул. Мясницкая, Москва 121309, Российская Федерация (e-mail: podinovski@mail.ru).

принятия решений отношение R часто оказывается частичным и оптимальные альтернативы не существуют. Поэтому в анализе задач принятия решений широко применяется понятие недоминируемости.

Альтернатива x^* называется *недоминируемой* (*по* P), если не существует альтернативы x, для которой верно xPx^*. В противном случае эта альтернатива называется *доминируемой* (*по* P).

Обозначим через X^R и X^P множества оптимальных и недоминируемых альтернатив соответственно. Если X^R непусто, то справедливо равенство $X^R = X^P$.

Множество X^P называется *внешне устойчивым*, если для любой альтернативы $x \notin X^P$ найдется альтернатива $x^* \in X^P$ такая, что выполнено x^*Px. Если множество X конечно, то множество X^P не пусто и, более того, внешне устойчиво. Именно из внешне устойчивого множества X^P надлежит выбрать наилучшую альтернативу.

Говорят, что определенный на X квазипорядок R' (*непротиворечиво*) *продолжает* квазипорядок R, если выполнено $R \subset R'$ (откуда следует, что $I \subseteq I'$) и $P \subseteq P'$. Множество недоминируемых по P' вариантов $X^{P'}$, вообще говоря, уже множества X^P, так как справедливо вложение $X^{P'} \subseteq X^P$. Практически это означает, что получение дополнительной информации о предпочтениях может позволить сузить множество выбора наилучшего варианта.

Из теоремы Шпильрайна [14] следует, что всякий частичный квазипорядок R на X может быть продолжен до полного квазипорядка R'. Пусть $\boldsymbol{R}$ – класс (множество) всех полных квазипорядков, которые определены на X и продолжают R, и $\Re$ – некоторое семейство таких квазипорядков (т.е. $\Re$ – это непустое подмножество множества $\boldsymbol{R}$).

Альтернатива x^* называется *потенциально оптимальной для* $\Re$, если в $\Re$ существует квазипорядок R, для которого эта альтернатива является оптимальной. В противном случае она называется *заведомо неоптимальной для* $\Re$.

Альтернатива x^* называется *потенциально оптимальной*, если она потенциально оптимальна для $\boldsymbol{R}$.

Пусть $X(\Re)$ – множество всех потенциально оптимальных для $\Re$ альтернатив, а $X(\boldsymbol{R})$ – множество всех потенциально оптимальных альтернатив.

Теперь будем полагать, что задано семейство $\Re$ частичных квазипорядков, определённых на множестве альтернатив X и продолжающих частичный квазипорядок R (вырожденный случай, когда этот квазипорядок есть отношение равенства, не исключается). Множество строгих частичных порядков P, порождаемых квазипорядками R из $\Re$, обозначим через $\wp$.

Альтернатива x^* называется *потенциально недоминируемой* (*для* $\wp$), если найдется такое отношение $P^* \in \wp$, что x^* является недоминируемым (по P^*), т.е. xP^*x^* неверно для любого $x \in X$. В противном случае альтернатива x^* называется *заведомо доминируемой* (*для* $\wp$).

В том частном случае, когда все квазипорядки из $\Re$ оказываются полными, потенциально недоминируемый вариант x^* – это вариант, который является оптимальным по крайней мере для одного R из $\Re$, т.е. x^*Rx верно для любого $x \in X$. Следовательно, понятие потенциальной недоминируемости является обобщением понятия потенциальной оптимальности на случай частичных квазипорядков. Обозначим через $X(\wp)$ множество потенциально недоминируемых альтернатив.

Свойства потенциально оптимальных альтернатив

Здесь полагается, что класс $\boldsymbol{R}$ (а потому и всякое семейство $\Re \subseteq \boldsymbol{R}$) состоит из полных квазипорядков.

Теорема 1. Каждая потенциально оптимальная для $\Re$ альтернатива недоминируема по P, т.е. верно вложение $X(\Re) \subseteq X^P$, которое может быть строгим. Альтернатива является потенциально оптимальной тогда и только тогда, когда она недоминируема по P, т.е. верно равенство $X(\boldsymbol{R}) = X^P$.

Множество потенциально оптимальных для класса $\Re$ альтернатив $X(\Re)$ называется *покрывающим* (*множество* X), если для любой альтернативы $x \notin X(\Re)$ и для любого квазипорядка $R' \in \Re$ найдется альтернатива $x^* \in X(R')$ такая, что верно $x^*P'x$.

Теорема 2. Верны следующие утверждения:

2.1. Если множество X^R не пусто, то $X^R = X(\Re)$ для любого семейства $\Re$.

2.2. Любые две потенциально оптимальные для семейства $\Re$ альтернативы либо несравнимы, либо безразличны.

2.3. Пусть квазипорядок R' продолжает квазипорядок R, $\Re'$ и $\Re$ – классы полных квазипорядков, продолжающих R' и R соответственно, причем $\Re' \subseteq \Re$. Тогда $X(\Re') \subseteq X(\Re)$.

2.4. Если множество недоминируемых по P альтернатив X^P внешне устойчиво, то множество потенциально оптимальных альтернатив $X(\boldsymbol{R})$ является покрывающим.

2.5. Внешняя устойчивость X^P не гарантирует существования потенциально оптимальных для семейства

$\Re$ альтернатив.

2.6. Множество потенциально оптимальных для семейства $\Re$ альтернатив может быть покрывающим, даже если множество X^P не является внешне устойчивым.

Свойства потенциально недоминируемых альтернатив

Здесь и далее полагается, что семейство $\Re$ состоит из частичных квазипорядков, так что порождаемое им семейство $\wp$ состоит из строгих частичных порядков.

Теорема 3. Всякая потенциально недоминируемая для $\wp$ альтернатива является недоминируемой по P, т.е. $X(\wp) \subseteq X^P$.

Согласно определению потенциальной недоминируемости справедливо равенство $X(\wp) = \bigcup_{P' \in \wp} X^{P'}$. Это равенство указывает возможные пути проверки вариантов на потенциальную недоминируемость и построения множества $X(\wp)$ (см. [11]).

Множество $X(\wp)$ называется *покрывающим* (*множество* X), если для любой альтернативы $x \notin X(\wp)$ и каждого квазипорядка $P' \in \wp$ найдется альтернатива $x^* \in X(\wp)$ такая, что выполнено $x^* P' x$.

Теорема 4. Если множество X конечно, то множество $X(\wp)$ является покрывающим.

Пусть некоторые (а возможно, и все) квазипорядки $R \in \Re$ продолжены до квазипорядков R' (не обязательно полных), и эти квазипорядки R' составляют семейство $\Re'$. Иначе говоря, каждый $R'' \in \Re'$ есть продолжение некоторого $R' \in \Re$ или входит в $\Re$.

Теорема 5. Справедливо вложение $X(\wp') \subseteq X(\wp)$.

Таким образом, уточнение информации о предпочтениях сужает, вообще говоря, множество выбора наилучшей альтернативы.

На основе множества $\wp$ строится отношение предпочтения $P^w(\wp)$ – *отношение слабого доминирования* (слабое отношение Парето, или отношение Слейтера) следующим образом:

$x' P^w(\wp) x''$ тогда и только тогда, когда $x' P' x''$ справедливо для каждого $P' \in \wp$.

Пусть $X^w(\wp)$ – множество альтернатив, недоминируемых по $P^w(\wp)$.

Теорема 6. Справедливо вложение $X^w(\wp) \supseteq X(\wp)$, которое может быть строгим.

Эта теорема показывает, что использование потенциального недоминирования позволяет, вообще говоря, добиться большего сужения множества выбора, чем использование слабого (не)доминирования.

Пример с качественной важностью критериев

В теории важности критериев [1], [15] используется следующая математическая модель ситуации принятия решения: $\langle X, f, Z_0, R^* \rangle$, где X – множество альтернатив, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ – векторный критерий ($m \geq 2$); f_i – (частный) критерий, т.е. функция, определенная на X и принимающая значения из области возможных значений критериев – числового множества Z_0. Каждая альтернатива $x \in X$ характеризуется значениями $f_i(x)$ всех критериев, которые формируют векторную оценку $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ этой альтернативы. Множество всех векторных оценок есть $Z = Z_0^m$. Отношение R^* – это отношение нестрогого предпочтения ЛПР (частичный квазипорядок) на Z, заранее неизвестный.

В практических приложениях отношение R^* может быть построено (по крайней мере, частично) на основе получаемой от ЛПР информации о предпочтениях Г, в роли которой могут выступать сведения об относительной важности критериев и изменении предпочтений вдоль их «шкалы» Z_0. Первоначально полагается, что шкала критериев всего лишь порядковая. Предпочтения ЛПР согласованы с (сильным) отношением Парето P^s (т.е. $P^s \subset P^*$), которое определяется на Z так: $y P^s z$, если и только если $y_i \geq z_i$, $i = 1,\ldots, m$ и $y \neq z$. Пусть R^Γ – квазипорядок, построенный на Z с использованием информации Г. Отношение R^Γ индуцирует на множестве альтернатив X отношение нестрогого предпочтения – квазипорядок R_Γ следующим образом: $x' R_\Gamma x'' \Leftrightarrow f(x') R^\Gamma f(x'')$. Этот квазипорядок и используется для формирования решения задачи. Пусть $\Re$ – семейство частичных квазипорядков на X, которые продолжают квазипорядок R_Γ (они строятся с учетом некоторой дополнительной информации о предпочтениях, которая может быть получена от ЛПР). Теперь можно перейти к рассмотрению примера, который пояснит изложенные положения.

Пусть в трехкритериальной задаче ($m = 3$) множество $Z_0 = \{1, 2, 3\}$, а множество X содержит три альтернативы x^1, x^2 и x^3 с векторными оценками $y^1 = f(x^1) = (1, 3, 2)$, $y^2 = f(x^2) = (3, 3, 1)$ и $y^3 = f(x^3) = (1, 2, 3)$.

Предположим, что информация о важности критериев $\Omega = \{1\sim2\}$, т.е. состоит из единственного сообщения о том, что первый и второй критерии равноважны. Точные определения понятий равенства критериев в важности и превосходства в важности одного критерия над другим имеются в [1], [15], [16]. Там же показано, как на основе информации о качественной важности Ω построить на Z соответствующее отношение нестрогого предпочтения – частичный квазипорядок R^{Ω}. Оказывается, что в нашем примере векторные оценки y^1, y^2 и y^3 не сравнимы по R^{Ω}.

Проверим альтернативы на потенциальную недоминируемость, полагая, что исходным отношением R является отношение R_{Ω}. Если мы получим дополнительную информацию о важности критериев, то только следующие три упорядочения критериев будут согласованы с $\Omega = \{1\sim2\}$, это <1-2, 3>, <1-2-3>, <3, 1-2>. (Здесь, например, <1-2, 3> означает, что первый и второй критерии равноважны и каждый из них важнее третьего.) Можно показать, что семейство $\wp$ порождается тремя соответствующими отношениями предпочтения $P_1 = \{(x^2, x^1), (x^2, x^3), (x^1, x^3)\}$, $P_2 = \{(x^2, x^1), (x^2, x^3)\}$ и $P_3 = \{(x^3, x^1)\}$. Легко видеть, что альтернатива x^1 заведомо доминируема, а остальные две альтернативы x^2 и x^3 потенциально недоминируемы. Следовательно, альтернатива x^1 не может претендовать на роль наилучшей и ее можно исключить из рассмотрения.

Заметим, что здесь отношение $P^w(\wp)$ пусто, т.е. оно не позволяет сузить множество выбора.

Заключение

Понятия потенциальной оптимальности и потенциальной недоминируемости являются базовыми для задач единичного выбора, в которых предпочтения описываются семействами полных или только частичных квазипорядков: именно среди потенциально оптимальных или же, соответственно, среди потенциально недоминируемых альтернатив надлежит выбрать одну наилучшую альтернативу. Поэтому указанные понятия имеют большое и теоретическое, и практическое значение.

Более общими, по сравнению с рассмотренными задачами единичного выбора, являются задачи множественного выбора, когда нужно выбрать заданное число $l > 1$ лучших альтернатив [17]. Понятия потенциальной оптимальности и потенциальной недоминируемости обобщаются и на такие задачи (см. [8], [18]).

Ссылки

1. В. В. Подиновский, *Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений*, Москва, Физматлит, 2007.
2. В. В. Подиновский, М. А. Потапов, "Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений: теория, методы, софт и приложения", *Открытое образование*, № 2. С. 55-61, 2012.
3. A. K. Sen, *Collective Choice and Social Welfare*, Holden Day, San Francisco, 1970.
4. G. B. Hazen, "Partial information, dominance, and potential optimality in multiattribute utility theory", *Operations Research*, vol. 34, pp. 296-310, 1986.
5. E. S. Eum, K. S. Park, S. H. Kim, "Establishing dominance and potential optimality in multi-criteria decision analysis with imprecise weight and value", *Computers and Operation Research*, vol. 28, pp. 397-409, 2001.
6. D. J. White, "Notes in decision theory: Optimality and efficiency II", *European Journal of Operational Research*, vol. 4, pp. 426-427, 1980.
7. В. В. Подиновский, "О взаимосвязи понятий потенциальной оптимальности и недоминируемости", *Автоматика и телемеханика*, № 1, С. 184-187, 2012. *Английский перевод*: V. V. Podinovski, "On the relation of the notions of potential optimality and non-dominance", *Automation and Remote Control*, vol. 73, V. 73. no. 1, pp. 167-170, 2012.
8. V. V. Podinovski, "Non-dominance and potential optimality for partial preference relations", *European Journal of Operational Research*, vol. 229, pp. 482 – 486, 2013.
9. В. В. Подиновский, А. П. Нелюбин, "Потенциальная недоминируемость в задачах выбора ", в сб. *Информационные технологии в науке, образовании и бизнесе*, Материалы XLI Международной конференции IT + SE`13 (Гурзуф, 2 – 10 октября 2013 г.), Приложение к журналу "Открытое образование", 2015, С. 67-71.
10. В. В. Подиновский, А. П. Нелюбин, "Потенциальная недоминируемость в задачах выбора при неточной информации о предпочтениях", *Искусственный интеллект и принятие решений*, № 4, С. 83-95, 2014.
11. В. В. Подиновский, А. П. Нелюбин, "О построении множества потенциально недоминируемых вариантов", в сб. *Информационные технологии в науке, образовании и управлении*, Материалы XLII Международной конференции IT + SE`15 (Гурзуф, 22 мая – 01 июня 2015 г.), Москва: ИНИТ, 2015, С. 67-71.
12. V. V. Podinovski, "Potential optimality of Pareto optima", *Procedia Computer Science*, vol. 17, pp. 1107-1112, 2013.
13. В. В. Подиновский, "Потенциальная оптимальность в многокритериальной оптимизации", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, № 3, С. 44-55, 2014. *Английский перевод*: V. V. Podinovski, "Potential optimality in multicriterial optimization", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. vol. 54, no. 1, pp. 429- 438, 2014.
14. E. Szpilrajn, "Sur l'extension de l'ordre partiel", *Fundamenta Mathematicae*, vol. 16, pp. 386-389, 1930.
15. В. В. Подиновский, "Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями", *Автоматика и телемеханика*, № 11, С. 118-127, 1976. *Английский перевод*: V. V. Podinovskii, "Multicriterial problems with importance-ordered criteria", *Automation and Remote Control*, vol. 37, no. 11, part 2, pp. 1728-1736, 1976.
16. V. V. Podinovski, "Multicriteria optimization problems involving importance-ordered criteria", in *Modern Mathematical Methods of Optimization*, K.-H. Elste, Ed. Berlin: Akademie Verlag, 1993, pp. 254-267.
17. V. V. Podinovski, "Set choice problems with incomplete information about the preferences of the decision maker", *European Journal of Operational Research*, vol. 207, no. 1, pp. 371-379, 2010.
18. В. В. Подиновский, "Потенциальная недоминируемость в задачах выбора нескольких лучших вариантов", *Вестник Московского университета им. С. Ю. Витте, Серия 3: Образовательные ресурсы и технологии*, № 2 (3), С. 57-63, 2013.