

ТОПОЛОГИЯ, ЗАДАЧИ ДЛЯ СЕМИНАРА, СПИСОК 7

**50.** Пусть  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство и  $f: X \rightarrow X$  — отображение со следующим свойством: существует такое  $\lambda \in (0; 1)$ , что  $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$  для всех  $x, y \in X$ . Докажите, что существует и единственна такая точка  $x \in X$ , что  $f(x) = x$ . (*Указание.*  $a, f(a), f(f(a)), \dots$ )

**51.** Пусть  $(X, \rho)$  — компактное метрическое пространство и  $f: X \rightarrow X$  — отображение со следующим свойством:  $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$  для всех  $x, y \in X, x \neq y$ . Докажите, что существует и единственна такая точка  $x \in X$ , что  $f(x) = x$ .

**52.** Останется ли верным утверждение задачи 51, если заменить в условии «компактное» на «полное»?

**53.** Для каждого  $x \in \mathbb{R}$  положим  $\mathbb{R}_x = \mathbb{R}$ ; тогда множество  $X = \prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_x$  можно отождествить с множеством всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ : элементу  $f \in X$  ставится в соответствие функция, которая переводит  $x$  в компоненту элемента  $f$  в  $\mathbb{R}_x$ . Пусть  $C(\mathbb{R}) \subset X$  — множество всех **непрерывных** функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ .

(а) Найдите замыкание  $C(\mathbb{R})$  в  $X$ , если считать, что на  $X$  задана топология произведения.

(б) Покажите, что замыкание  $C(\mathbb{R})$  в  $X$  не совпадает с множеством пределов  $\lim f_n$  для всех последовательностей  $\{f_n\}, f_n \in C(\mathbb{R})$ .

**54.** Зададимся последовательностью положительных чисел  $\{\delta_n\}$ , для которой ряд  $\sum_n \delta_n$  сходится, и обозначим через  $X$  множество числовых последовательностей  $a = \{a_n\}$ , удовлетворяющих условию « $a_j \in [0; \delta_j]$  для всех  $j$ ». Если  $a, b \in X$ , положим  $\rho(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$ .

Покажите, что  $X$  с метрикой  $\rho$  гомеоморфно произведению  $\prod_{n=1}^{\infty} [0; \delta_n]$ .

**55.** Докажите, что любое подпространство (т.е. подмножество с индуцированной топологией) регулярного пространства также регулярно.

**56.** Докажите, что замкнутое подпространство нормального пространства нормально. (Для произвольных подпространств это неверно — см. листок 3.)

**57.** Докажите, что произведение двух регулярных пространств регулярно. (Для нормальных пространств это неверно — см. листок 3.)