**Правительство Российской Федерации**

Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

**Факультет компьютерных наук**

УТВЕРЖДАЮ

Академический руководитель образовательной программы «Прикладная математика и информатика»

А.С. Конушин

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2015 г.

Программа дисциплины

Математический анализ, часть 1

для направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

подготовки бакалавра

Автор программы: к.ф.-м.н, доцент А.А. Никитин

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Рекомендована  Академическим советом  образовательной программы  «Прикладная математика и информатика»  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_ 2015 г. |  | Одобрена  на заседании департамента математики факультета экономических наук  Руководитель департамента Ф.Т. Алескеров  «\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2015 г. |
|  |  |  |

Москва, 2015

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы

#### 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих дисциплину «Математический анализ».

Программа разработана в соответствии с:

* Образовательным стандартом Государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет – Высшая школа экономики», в отношении которого установлена категория «Национальный исследовательский университет»;
* Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2015 г.

#### 2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математический анализ, часть 1» являются:

* ознакомление студентов с теоретическими основами таких разделов математического анализа как теория множеств, теория числовых последовательностей, дифференцирование, неопределённое интегрирование, определённое интегрирование, функции многих переменных и др.;
* формирование практических навыков работы с числовыми последовательностями, производными функции одной и нескольких переменных, а также с интегрированием (неопределённым и определённым).

#### 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

ЗНАТЬ И УМЕТЬ ИСПОЛЬЗОВАТЬ основные понятия:

* теории числовых последовательностей, неопределённых и определённых интегралов;
* дифференциального исчисления функции одной и нескольких переменных.

ИМЕТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ:

* о различных типах сходимости несобственных интегралов;
* о числовых последовательностях;
* о числовых множествах;
* о дифференцировании функций одного и нескольких переменных.

ИМЕТЬ НАВЫК:

* вычисления пределов числовых последовательностей;
* нахождения производных;
* вычисления неопределённых и определённых интегралов;
* исследования несобственных интегралов на сходимость

ДОЛЖЕН ВЛАДЕТЬ:

* методами теории множеств;
* методами числовых последовательностей;
* методами дифференциального исчисления;
* методами теории интегрирования.

Выпускник по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» с квалификацией (степенью) бакалавр должен обладать следующими компетенциями (утверждены 25.05.2015 Академическим советом ОП, протокол №4):

| **Код компетенции по порядку** | **Код компетенции по ЕК** | **Уровни формирования, зачетные единицы** | **Формулировка компетенции** |
| --- | --- | --- | --- |
| УК-6 | СК-Б7 | РБ, 0.5 | Способен вести исследовательскую деятельность, включая анализ проблем, постановку целей и задач, выделение объекта и предмета исследования, выбор способа и методов исследования, а также оценку его качества |
| ПК-3 | ИК-Б1.1 НИД/ПД (ПМИ) | РБ, 0.25 | Способен провести теоретическую и экспериментальную оценку математического метода, алгоритма, модели данных |
| ПК-11 | ИК-Б2.1/3\_3.1\_2.4.1 (ПМИ) | РБ МЦ, 0.25 | Способен анализировать тексты и документы по математике и компьютерным наукам на русском (государственном) и английском языках |
| ПК-15 | ИК-Б5.2 | РБ СД, 6 | Способен описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математических и компьютерных наук |

**Виды и задачи профессиональной деятельности**

|  |  |
| --- | --- |
| **Научно-исследовательская деятельность** |  |
| Исследование и разработка математических моделей, алгоритмов, методов, программного обеспечения, инструментальных средств по тематике проводимых научно-исследовательских проектов; | НИД-3 |
| **Проектная и производственно-технологическая деятельность** |  |
| Разработка математических методов для анализа и построения моделей по тематике выполняемых научно-исследовательских прикладных задач или опытно-конструкторских работ | ПД-1 |

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к математическому и естественнонаучному циклу дисциплин, к блоку дисциплин базовой части, обеспечивающих подготовку.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

* математика в объёме программы средней школы;
* алгебра и геометрия (в объёме пройденного материала по параллельно читаемому курсу);

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

* знаниями основных понятий и теорем математики в объёме средней школы;
* навыками решения типовых задач математики в объёме средней школы;

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Дифференциальные уравнения;
* Теория вероятностей и математическая статистика;
* Математические модели в экономике;
* Оптимизация;
* Машинное обучение;
* Вычислительные методы;

#### 5 Тематический план учебной дисциплины

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Название темы | Всего часов | Аудиторные часы | | Самостоятельная работа |
| лекции | сем. занятия |
|  | 1 курс, 1 модуль | 133 | **32** | **32** | **69** |
| 1 | Теория числовых множеств, | 32 | 8 | 8 | 16 |
| 2 | Теория числовых последовательностей. Критерий Коши сходимости числовой последовательности. | 38 | 10 | 9 | 19 |
| 3 | Понятие непрерывности функции. Классификация точек разрыва. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций | 30 | 8 | 7 | 15 |
| 4 | Первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Точная верхняя (нижняя) грань функции на множестве.. | 25 | 6 | 6 | 13 |
| 5 | РЕЗЕРВ / проведение контрольных мероприятий | 8 | 0 | 2 | 6 |
|  | **1 курс, 2 модуль** | **133** | **32** | **32** | **69** |
| 6 | Дифференциальное исчисление функции одной переменной. | 33 | 10 | 7 | 16 |
| 7 | Производные высших порядков. | 34 | 10 | 7 | 17 |
| 8 | Правила Лопиталя | 34 | 8 | 10 | 16 |
| 9 | Теорема Тейлора. | 16 | 4 | 4 | 8 |
| 10 | РЕЗЕРВ / проведение контрольных мероприятий | 16 | 0 | 4 | 12 |
| **Итого** | | **266** | **64** | **64** | **138** |

**Формы рубежного контроля и правила вывода оценок  
зачета и экзамена**

Предусмотрены 3 контрольные работы (в первом, втором и третьем модулях) и 3 домашних задания. В первом и четвертом модулях первого курса проводится экзамен, в третьем модуле первого курса – зачет; во втором и четвертом модулях второго курса проводится экзамен.

Оценки выводятся по следующим формулам.

**Оценка за экзамен «ОЭкз» = 0,15⋅«ОКр1» + 0,15⋅ «ОКр2» + 0,1⋅«ОСем»+ 0,1⋅«ОДКР1»+0,5«ОЭкз.раб.» + «ОБОНУС»** по десятибалльной шкале,

Где **⋅«ОКр1» --** оценка за аудиторную контрольную работу за первый модуль;

**«ОКр2» --** оценка за аудиторную контрольную работу за второй модуль;

**«ОСем» --** оценка за работу на семинарских занятиях;

**«ОДКР1» --** оценка за домашнюю контрольную работу №1;

**«ОЭкз.раб.» --** оценка за экзамен первого семестра;

**«ОБОНУС» --** Дополнительные баллы за решение задач повышенной сложности;

Оценка всех форм контроля знаний осуществляется по 10-ти бальной шкале и не округляются. Промежуточная и итоговая оценки вычисляются с учетом неокругленной накопленной. Для выставления в ведомость накопленная и итоговая оценки округляется до целых по правилам:

* если дробная часть итоговой оценки находится в пределах [0, 0,4], то – в меньшую сторону;
* если дробная часть итоговой оценки находится в пределах [0,6, 1), то – в большую сторону;
* если дробная часть итоговой оценки находится в пределах (0,4, 0,6), то – на усмотрение преподавателя в зависимости от посещения занятий, работы на занятиях и пр.

При этом если оценка до округления оказывается в пределах (3, 3,9), то она округляется до 3-х баллов; если оценка до округления оказывается больше 10, то она округляется до 10.

**Таблица соответствия оценок по десятибалльной  
и пятибалльной системам**

|  |  |
| --- | --- |
| По десятибалльной шкале | По пятибалльной шкале |
| 1 − неудовлетворительно  2 − очень плохо  3 − плохо | неудовлетворительно − 2 |
| 4 − удовлетворительно  5 − весьма удовлетворительно | удовлетворительно − 3 |
| 6 − хорошо  7 − очень хорошо | хорошо − 4 |
| 8 − почти отлично  9 − отлично  10 −блестяще | отлично − 5 |

Образцы типовых задач приводятся после программы.

##### 6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Оценивание для всех форм контроля знаний осуществляется по десятибалльной шкале. Часть теоретического материала (в большей степени технического характера) может быть вынесена на самостоятельное изучение с включением соответствующих вопросов и задач в контрольно-измерительные мероприятия.

В случае пропуска контрольной работы по уважительной причине студенту предоставляется однократная возможность написать работу в присутственные часы преподавателя. Уважительность отсутствия определяется Учебным офисом (Деканатом) на основании справки о болезни или иных документов.

Домашнее задание состоит из нескольких частей, каждая их которых выдается, сдается и оценивается отдельно. Совокупная оценка за домашнее задание представляет собой среднее арифметическое оценок за каждую из частей. Домашнее задание может предполагать ту или иную форму защиты сдаваемых решений. Информация о необходимости защиты и о ее форме доводится преподавателем до сведения студентов во время выдачи каждой из частей домашнего задания. Одной из форм защиты является решение в рамках проверочных письменных работ продолжительностью до 20 минут задач, аналогичных сданным задачам домашнего задания.

На лекциях и семинарах студентам, дополнительно к обязательным заданиям, предлагаются так называемые бонусные, связанные обычно с заданиями повышенной сложности или с заданиями, требующими применение навыков из других дисциплин (в первую очередь – программирования). Сдача бонусных заданий учитывается в оценке «ОБОНУС».

Задания экзамена содержат теоретические вопросы и задачу. При ответе на теоретические вопросы студент должен продемонстрировать уровень знаний основных определений, теорем (включая их доказательство), методов и пр. При решении практической задачи студент должен показать умение применить теоретические факты к решению данной задачи, продемонстрировать навыки решения данного класса задач. Студент записывает ответы на теоретические вопросы и решение задачи, после чего в рамках устного ответа комментирует свои ответы и решения и устно дает ответы на дополнительные вопросы. Оценки теоретической и практической части задания относятся как 6:4. При этом в случае неудовлетворительной оценки за теоретическую часть задания за экзамен выставляется оценка 0 баллов независимо от успешности решения практической задачи. Неудовлетворительная оценка за теоретическую часть экзамена выставляется, в частности, если студент в рамках ответа хотя бы на один из теоретических вопросов демонстрирует незнание основных определений и/или формулировок основных теорем курса. Допускается сдача теоретической и практической частей экзамена в разные дни. По желанию студента в качестве оценки за практическую часть экзамена ему может быть засчитана минимальная из оценок за контрольные работы.

##### 6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка всех форм контроля знаний осуществляется по 10-ти бальной шкале и не округляются. Промежуточная и итоговая оценки вычисляются с учетом неокругленной накопленной. Для выставления в ведомость накопленная и итоговая оценки округляется до целых по правилам:

* если дробная часть итоговой оценки находится в пределах [0, 0,4], то – в меньшую сторону;
* если дробная часть итоговой оценки находится в пределах [0,6, 1), то – в большую сторону;
* если дробная часть итоговой оценки находится в пределах (0,4, 0,6), то – на усмотрение преподавателя в зависимости от посещения занятий, работы на занятиях и пр.

При этом если оценка до округления оказывается в пределах (3, 4), то она округляется до 3-х баллов; если оценка до округления оказывается больше 10, то она округляется до 10.

#### 7 Содержание дисциплины

**7.1. Введение. Элементы теории множеств и функций.** ([1], т.1, гл. 1, §§ 1, 2, [3], гл. 1, §§ 1 – 4)

Понятие множества и подмножества. Операции: объединение, пересечение, дополнение. Отображения множеств (функции). Числовые функции. Область определения, множество значений функции. Элементарные функции.

Понятие действительного (вещественного) числа. Сравнение действительных чисел. Примеры множеств действительных чисел. Промежутки. Ограниченные (сверху, снизу) и неограниченные множества действительных чисел. Верхние и нижние и точные верхние и нижние грани множеств действительных чисел. Максимальный и минимальный элемент множества. Теорема о существовании точных граней у ограниченного множества. Лемма о вложенных отрезках.

Элементы общей топологии. Понятие топологического пространства. Примеры. Системы окрестностей. Проколотые окрестности точки. Предельные точки. Граничные точки. Внутренние точки. Открытые и замкнутые подмножества.

**7.2. Теория пределов и непрерывных функций одной переменной.** ([1], т.1, гл. 1, §§ 3 ‑ 8, [3], гл. 1, §§ 5 – 9)

Числовые последовательности. Примеры. Понятие предела последовательности. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о переходе к пределу в неравенствах. Теорема о вынужденном пределе. Теорема о сходимости монотонных ограниченных последовательностей. Определение числа *е*. Бесконечно малые последовательности. Связь со сходящимися последовательностями. Арифметические свойства бесконечно малых и сходящихся последовательностей. Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми. Арифметические свойства для последовательностей, имеющих конечные и бесконечные пределы. Неопределенности. Определение подпоследовательности. Теорема о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности.

Определение предела функции в точке в терминах окрестностей, неравенств (Коши) и последовательностей (Гейне). Теорема об эквивалентности этих определений. Односторонние пределы, их связь с двусторонними. Пределы функции в бесконечности. Арифметические свойства функций, имеющих пределы (конечные или бесконечные) в точке или в бесконечности. Неопределенности. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах, о вынужденном пределе. Теорема о пределе сложной функции. Первый и второй замечательные пределы. Сравнение функций, *о*-символика, главная часть функции, порядок малости и порядок роста функции. Критерий Коши существования конечного предела функции.

Определения непрерывности функции в точке, их эквивалентность. Точки разрыва, их классификация. Непрерывность основных элементарных функций. Арифметические свойства непрерывных функций. Теорема о непрерывности сложной функции. Теоремы о локальной ограниченности и локальном сохранении знака для функций, непрерывных в точке. Свойства функций, непрерывных на отрезке (первая и вторая теоремы Вейерштрасса, теорема Коши). Критерий непрерывности монотонной функции на промежутке. Критерий существования и непрерывности обратной функции на промежутке. Понятие равномерной непрерывности функции на множестве. Теорема Кантора.

**7.3. Дифференциальное исчисление для функций одной переменной.** ([1], т.1, гл. 1, §§ 9 – 14 , [3], гл. 1, §§ 10 – 15)

Понятие производной функции в точке. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции в точке. Понятие дифференцируемости функции в точке. Необходимое условие дифференцируемости, необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Правила дифференцирования. Теорема о дифференцируемости и производной сложной функции. Теорема о дифференцируемости и производной обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Производные функций, графики которых заданы параметрически. Понятие дифференциала (первого) функции в точке. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной в точке.

Понятие об экстремумах функции одной переменной. Локальный экстремум. Необходимое условие для внутреннего локального экстремума (теорема Ферма). Основные теоремы о дифференцируемых функций на отрезке (теорема Ролля, формулы Лагранжа и Коши). Многочлен Тейлора и формула Тейлора для функций одной переменной с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Формулы Маклорена для основных элементарных функций. Правило Лопиталя. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на промежутке. Достаточные условия локального экстремума для функции одной переменной. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. Достаточные условия выпуклости (вогнутости). Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия для точки перегиба. Асимптоты графика функции одной переменной. Определение глобального максимума (минимума) функции одной переменной в области ее определения.

#### 8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

**Образцы задач для контрольных, зачетных и экзаменационных работ  
по математическому анализу для 1 курса**

1. Вычислить пределы:   
а) ; б) .

1. Вычислить производную функции:   
   а) ; б) .
2. Найти касательную прямую и нормаль, проведенные в точке *А*(1,1) к графику функции, заданной неявно уравнением .

4. Найти дифференциал функции , заданной параметрически:  в точке *А*, соответствующей значению параметра .

1. Найти участки возрастания и убывания и точки экстремума функции . Найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [1,4].
2. Найти асимптоты графика функции .
3. Провести полное исследование и нарисовать эскиз графика функции .
4. Разложить функцию  по формуле Тейлора в окрестности точки  до .
5. Разложить по формуле Маклорена до о(хn ) функции:   
   а) ; б) .
6. Вычислить пределы с помощью формулы Маклорена:   
   а) ; б) .
7. Вычислить предел или доказать, что он не существует:   
   а) ; б) .
8. Выяснить, будет ли функция  непрерывной в точке (0,0). Ответ обосновать.
9. Найти частные производные первого порядка для функций:  
   а) ; б) .
10. Найти первый дифференциал функции  в точке (1,0,1).
11. Найти производную функции  в точке *А*(1,1,0) по направлению вектора , где *М*(2,4,5), *N*(1,2,3).
12. Исследовать на экстремум функцию .
13. Найти экстремумы функции  при условии .
14. Вычислить неопределенные интегралы:   
    а) ; б) .
15. Вычислить определенные интегралы:   
    а) ; б) .

#### 9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

##### 9.1 Базовые учебники

Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. ‒ М.: Физматлит, 2001.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. ‒ М.: «Издательство Астрель», 2002

##### 9.2 Основная литература

1. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. ‒ М.: Физматлит, 2001 (или более позднее издание).
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. ‒ М.: «Издательство Астрель», 2002.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II, III − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

##### 9.3 Дополнительная литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1999.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. − М.: Наука, 1984.
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ в двух томах. ‒ М.: «Высшая школа», 1981 (имеется также переработанное трехтомное издание М.: Дрофа, 2006).
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Продолжение курса. ‒ М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987 (или любое другое издание).

##### 9.4 Справочники, словари, энциклопедии

Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. ‒ М.: Наука, 1983.

##### 9.5 Программные средства

Для успешного освоения дисциплины студенту необходимо выполнять часть вычислительных домашних заданий с использованием высокоуровневых пакетов программ для математических расчетов, таких как MathCad, MATLAB, Mathematica и пр. Некоторые домашние задания также требуют написание программ на любом языке программирования высокого уровня, например, C/C++.