Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Академический руководитель
образовательной программы
«Прикладная математика и информатика»
А.С. Конушин
____

«___» _____________ 2015 г.

Программа дисциплины

Математический анализ, часть 3

для направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
подготовки бакалавра

Авторы: д.ф.-м.н., доцент А.Е. Лепский,
к.ф.-м.н., доцент А.Г. Федотов

Одобрена на заседании департамента математики факультета экономических наук
«__» ________ 2015г
Руководитель департамента Ф.Т. Алескеров

Рекомендована Академическим советом
образовательной программы
«Прикладная математика и информатика» «___»________ 2015 г.

Москва, 2015

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих дисциплину «Математический анализ».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом Государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет – Высшая школа экономики», в отношении которого установлена категория «национальный исследовательский университет»;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2015 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математический анализ, часть 3» являются:

- ознакомление студентов с основами современной теории функций комплексного переменного;
- ознакомление студентов с основами современного функционального анализа.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

ЗНАТЬ И УМЕТЬ ИСПОЛЬЗОВАТЬ понятия:

- комплексного числа;
- функции комплексного переменного (ФКП);
- конформного отображения;
- интеграла от ФКП по кривой;
- голоморфной функции;
- ряда Лорана;
- особых точек ФКП и вычетов ФКП в особых точках;
- метрического пространства и сходимости в МП;
- сепарабельного и полного МП;
- компактности в МП и критерии компактности;
- сжимающего отображения и его применения;
- нормированного, банахова, евклидова и гильбертова пространств;
- линейного функционала и линейного оператора в нормированном и гильбертовом пространствах;
- спектра оператора.

ИМЕТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ:

- о различных понятиях дифференцируемости ФКП;
- об основных свойствах ФКП;
- о геометрических принципах теории ФКП;
- о критериях компактности в различных МП;

- о различных понятиях сходимости в функциональных пространствах;
- о свойствах основных классов операторов (сопряженных, самосопряженных, компактных и др.);
- об основных принципах линейного функционального анализа.

ИМЕТЬ НАВЫК:
- работы с комплексными числами, решения алгебраических и других простых уравнений в комплексных числах, вычисления значений комплексных функций, комплексного описания плоских областей;
- исследования функции на голоморфность, восстановления действительной и мнимой частей;
- вычисления интеграла от ФКП по кривой;
- применения интегральной теоремы и формулы Коши;
- разложения функции в ряд Лорана;
- исследования особых точек голоморфной функции и вычисления вычетов в этих точках;
- применения вычетов к вычислению некоторых определенных, несобственных интегралов и сумм числовых рядов;
- проверки аксиом метрики, полноты МП, открытости и замкнутости множеств в МП, сепарабельности МП, компактности множеств в МП;
- проверки сжимаемости отображения в МП;
- проверки аксиом нормы и скалярного произведения;
- нахождения предела последовательности в различных функциональных пространствах (в том числе в пространстве операторов) и относительно разных типов сходимости;
- ортогонализации системы функций в различных евклидовых пространствах;
- нахождения нормы линейного оператора;
- нахождения обратного оператора;
- нахождения спектра оператора;
- проверки оператора на компактность.

ДОЛЖЕН ВЛАДЕТЬ:
- методами теории вычетов;
- методом простой итерации в МП;
- регулярными методами суммирования рядов;
- методами нахождения нормы оператора и обратного оператора (метод резольвент);
- методами нахождения спектра оператора.

Выпускник по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» с квалификацией (степенью) бакалавр в соответствии с целями основной образовательной программы и задачами профессиональной деятельности, указанными в пп. 3.2.1 и 3.6 ОС ГОБУ ВПО НИУ ВШЭ, должен обладать следующими компетенциями:

Код компетенции по порядку	**Код компетенции по ЕК**	**Уровни формирования, зачетные единицы**	**Формулировка компетенции**
УК-6	СК-Б7	РБ, 0.5	Способен вести исследовательскую деятельность, включая анализ проблем, постановку целей и задач, выделение объекта и предмета исследования, выбор способа и методов исследования, а также оценку его качества
ПК-3	ИК-Б1.1 НИД/ПД	РБ, 0.25	Способен провести теоретическую и эксперименталь-

Код компетенции по порядку	Код компетенции по ЕК	Уровни формирования, зачетные единицы	Формулировка компетенции
	(ПМИ)		ную оценку математического метода, алгоритма, модели данных
ПК-11	ИК-Б2.1/3_3.1_2.4.1 (ПМИ)	РБ МЦ, 0.25	Способен анализировать тексты и документы по математике и компьютерным наукам на русском (государственном) и английском языках
ПК-15	ИК-Б5.2	РБ СД, 5	Способен описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математических и компьютерных наук

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к математическому и естественнонаучному циклу дисциплин, к блоку дисциплин базовой части, обеспечивающих подготовку.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- математический анализ, части 1 и 2;
- геометрия алгебра;
- дифференциальные уравнения.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- моделирование непрерывных процессов (доп. главы дифференциальных уравнений);
- моделирование физических процессов (физика, уравнения математической физики);
- методы оптимизации.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоят. работа
			Лекции	Семинары	
	1 модуль				
1	Комплексные числа. Множества, пути и кривые на комплексной плоскости.	16	4	4	8
2	Понятие функции комплексного переменного. $\mathbb{R}-$ и $\mathbb{C}-$дифференцируемость. Производная. Голоморфность функций.	12	2	2	8
3	Элементарные ФКП: дробно-линейные функции, степенные, показательная функция, функция Жуковского.	14	4	2	8
4	Интегрирование ФКП. Интегральная теорема и формула	12	2	4	6

	Коши.				
	2 модуль				
5	Теорема о разложении в ряд Лорана и ее следствия. Особые точки и вычеты. Приложения теории вычетов.	28	6	6	16
6	Свойства голоморфных функций.	8	2	2	4
	3 модуль	126	28	28	70
7	Метрические пространства	28	6	6	16
8	Компактность	28	6	6	16
9	Нормированные и евклидовы пространства	35	8	8	19
10	Ограниченные операторы в банаховом и гильбертовом пространствах	35	8	8	19
	Всего часов	**216**	**48**	**48**	**120**

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	**Форма контроля**	**Модули**			**Параметры**
		1	**2**	**3**	
текущий (неделя)	контрольная работа (КР)		4	7	письменная работа на 80 минут
	домашнее задание (ДЗ)		4	7	письменное задание и вычислительная часть, срок выполнения: 10 недель
промежуточный	экзамен (ЭКЗ)		1		письменная работа теоретически-практического характера на 120 мин
итоговый	экзамен (ЭКЗ)			1	письменная работа теоретически-практического характера на 120 мин

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Оценка всех форм контроля знаний осуществляется по 10-ти бальной шкале. При этом домашнее задание засчитывается на:

100% при получении на КР [6,10]баллов,
50% при получении на КР [3,6) баллов,
0% при получении на КР [0,3) баллов.

Возможны и другие формы защит домашнего задания.

Все задания зачетного варианта содержат теоретический вопрос и задачу. При письменном ответе на теоретический вопрос студент должен продемонстрировать уровень знаний основных определений, теорем, методов и пр., доказательств некоторых теоретических положений курса. При решении практической задачи студент должен показать умение применить теоретические факты к решению данной задачи, продемонстрировать навыки решения данного класса задач. Оценки теоретической и практической части задания относятся как 3:7.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка всех форм контроля знаний осуществляется по 10-ти бальной шкале с точностью до 0.1 и не округляются. Округляется только накопленная, промежуточная и итоговая оценки по правилам (но промежуточная и итоговая оценки вычисляются с учетом неокругленной накопленной):

- если дробная часть итоговой оценки находится в пределах [0, 0.3], то – в меньшую сторону;
- если дробная часть итоговой оценки находится в пределах [0.7, 0.99], то – в большую сторону;
- если дробная часть итоговой оценки находится в пределах (0.3, 0.7), то – на усмотрение преподавателя в зависимости от посещения занятий и работе на занятиях.

При этом, если итоговая оценка до округления окажется в пределах (3, 4), то она округляется до 3-х баллов.

Формула расчета (промежуточного) итогового балла:

$$О_{\text{Промежут(Итог)}} = 0{,}6 \cdot О_{\text{Накопл}} + 0{,}4 \cdot О_{\text{Экз}},$$

где $О_{\text{Накопл}} = О_{\text{Текущая}} = 0{,}7 \cdot О_{\text{КР}} + 0{,}3 \cdot О_{\text{ДЗ}}$ – накопленная оценка (взвешенная сумма оценок за домашнее задание и контрольные работы), $О_{\text{Экз}}$ – оценка, полученная на экзамене.

Итоговая оценка по циклу дисциплин «Математический анализ, части 1,2,3», выставляемая в диплом, рассчитывается по формуле:

$$О_{\text{Итог\_диплом}} = (0{,}1 \cdot О_{\text{зач\_1}} + 0{,}17 \cdot О_{\text{зач\_2}} + 0{,}1 \cdot О_{\text{экз\_1}}) + (0{,}17 \cdot О_{\text{зач\_3}} + 0{,}21 \cdot О_{\text{экз\_2}}) + \\ + (0{,}1 \cdot О_{\text{экз\_3}} + 0{,}15 \cdot О_{\text{экз\_4}}),$$

где в каждой из трех скобок указаны промежуточные и итоговые оценки в порядке их следования с соответствующими коэффициентами за части 1, 2 и 3 курса «Математический анализ» соответственно. Оценка округляется по правилам арифметического округления.

7 Содержание дисциплины

1. Введение множества комплексных чисел. ([1], §1; [2], гл.1, §1; [6], гл.1, §1; [7], §1)

Количество часов аудиторной работы – 4 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 5 часов: проработка лекционного материала (ПЛ) – 1 час, подготовка к семинарским занятиям (ПС) – 2 часа, выполнение домашнего задания (ДЗ) – 2 часа.

Алгебраические структуры на числовых множествах $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Необходимость такого расширения поля $\mathbb{R}$, в котором существовало бы решение уравнение $x^2 + 1 = 0$. Матричная, векторная и алгебраическая модели расширений. Алгебраическое определение комплексного числа. Понятие комплексного сопряжения, модуля и их свойства. Тригонометрическая форма комплексного числа. Понятие комплексного аргумента. Действия над числами в тригонометрической форме. Формула Муавра и ее следствия (корень n-й степени).

2. Комплексная экспонента и другие комплексные значения. ([1], §1; [2], гл.2, §3)

Количество часов аудиторной работы – 4 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 5 часов: ПЛ – 1 час, ПС – 2 часа, ДЗ – 2 часа.

Равносильность различных определений (через ряд, через предел) комплексной экспоненты. Формула Эйлера. Свойства комплексной экспоненты. Применения комплексной экспоненты в тригонометрии. Определение комплексного логарифма, как обратного значения экспоненты. Многозначный логарифм и его главное значение. Свойства логарифма. Тригонометрические, гиперболические, показательные и обратные тригонометрические значения комплексного числа. Комплексная степень комплексного аргумента.

3. Открытые и замкнутые множества на комплексной плоскости. Пути и кривые в $\mathbb{C}$. ([1], §1; [2], §3)

Количество часов аудиторной работы – 4 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 5 часов: ПЛ – 1 час, ПС – 2 часа, ДЗ – 2 часа.

Окружность, круг в комплексной области. Предельные и внутренние точки множества. Топология в $\mathbb{C}$. Открытость и замкнутость $\mathbb{C}$. Понятие компактного множества. Компактификация $\mathbb{C}$. Сфера Римана. Понятие стереографической проекции. Метрики в $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$. Понятие комплекснозначной функции. Виды путей и кривых: гладкие, класса C^k, жордановы, эквивалентные, гомотопные. Границы и области в $\mathbb{C}$. Связные и n-связные множества.

4. Функции комплексного переменного. Понятия $\mathbb{R}-$ и $\mathbb{C}-$дифференцируемых функций. **Производная ФКП**. ([1], §2; [6], гл.1, §4; [7], §7)

Количество часов аудиторной работы – 4 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 5 часов: ПЛ – 1 час, ПС – 2 часа, ДЗ – 2 часа.

Однолистные функции. Предел и непрерывность ФКП. Формальные производные. $\mathbb{R}-$ и $\mathbb{C}-$линейность. Условия Коши-Римана в декартовой и полярной формах. Связь с гармоническими функциями. Восстановление одной части $\mathbb{C}-$дифференцируемой функции по другой. Сопряженная пара функций.

Производная ФКП, связь с $\mathbb{C}-$дифференцируемостью. Понятие голоморфной функции. Геометрические свойства дифференциала. Понятие конформности. Свойства конформных отображений. Геометрические свойства производной: консерватизм углов и растяжений.

5. Элементарные ФКП: ([1], §4; [2], гл.3, §2,3; [3], гл.2, §6; [6], гл.3, §1)

Количество часов аудиторной работы – 4 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 5 часов: ПЛ – 1 час, ПС – 2 часа, ДЗ – 2 часа.

а) линейная функция; б) дробно-линейная функция: дробно-линейный гомеоморфизм, конформность, алгебраические (групповые) свойства, геометрические свойства (сохранения окружностей и симметрии), дробно-линейный изоморфизм и автоморфизм; в) степенная функция; г) функция Жуковского; д) показательная функция.

6. Интеграл от ФКП. Теория интеграла Коши. ([1], §5; [2], гл.4, §1,2; [3], гл.2, §2; [6], гл.1, §5,6)

Количество часов аудиторной работы – 4 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 5 часов: ПЛ – 1 час, ПС – 2 часа, ДЗ – 2 часа.

Определение и основные свойства интеграла: линейность, аддитивность, ориентированность, инвариантность относительно эквивалентного пути, оценка модуля. Ослабленный вариант интегральной теоремы Коши (через формулу Грина), усиленный вариант (схема доказательства Гурса), теорема для многосвязной области, для гомотопных путей. Понятие первообразной ФКП. Теорема о существовании первообразной. Общий вид первообразной. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Интеграл типа Коши, теорема о голоморфности интеграла типа Коши.

7. Ряд Лорана. ([1], §7; [2], гл.5, §1,2; [3], гл.4, §4; [6], гл.4, §1; [7], §17)

Количество часов аудиторной работы – 4 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 5 часов: ПЛ – 1 час, ПС – 2 часа, ДЗ – 2 часа.

Теорема о представлении голоморфной в кольце функции в виде ряда Лорана. Следствия из представления в виде ряда Лорана: неравенство Коши, теорема Лиувилля, основная теорема алгебры, теорема о представлении в виде ряда Тейлора, теорема Морера, теоремы Вейерштрасса о голоморфности ряда из голоморфных функций.

8. Особые точки голоморфной функции. ([1], §7; [2], гл.5, §2; [3], гл.4, §1,2,3; [6], гл.4, §2; [7], §18)

Количество часов аудиторной работы – 4 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 5 часов: ПЛ – 1 час, ПС – 2 часа, ДЗ – 2 часа.

Понятие и классификация изолированных особых точек (ИОТ). Характеризация ИОТ по виду главной части ряда Лорана. Теорема Сохоцкого. Бесконечно удаленные ИОТ. Классификация голоморфных функций по типу имеющихся у них особенностей: целые функции, мероморфные функции.

9. Элементы теория вычетов. ([1], §7; [2], гл.5, §3; [3], гл.4, §4, гл.6; [6], гл.5, §1,2; [7], §28,29)

Количество часов аудиторной работы – 4 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 5 часов: ПЛ – 1 час, ПС – 2 часа, ДЗ – 2 часа.

Понятие вычета. Вычисление вычетов в ИОТ. Теорема Коши о вычетах. Вычет в бесконечно удаленной точке. Теорема о полной сумме вычетов. Приложения вычетов к вычислению определенных, несобственных интегралов и рядов. Лемма Жордана и ее применения.

10. Свойства голоморфных функций. ([1], §6; [2], гл.4, §3; [6], гл.1, §6, гл.2; [7], §12,14)

Количество часов аудиторной работы – 2 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 2 часа: ПЛ – 0,5 часа, ПС – 0,5 часа, ДЗ – 1 час.

Нули голоморфных функций и теоремы единственности: изолированность нулей голоморфной функции, единственность голоморфной функции, равной нулю на множестве, имеющем предельную точку. Принцип максимума модуля, минимума модуля. Теорема Рунге.

11. Геометрические принципы ТФКП. ([1], §11-13; [2], гл.7, §3; [3], гл.5, §4; [6], гл.6, §1; [7], §32,33,36)

Количество часов аудиторной работы – 2 часа.

Количество часов самостоятельной работы – 3 часа: ПЛ – 0,5 часа, ПС – 0,5 часа, ДЗ – 2 часа.

Принцип сохранения области. Теорема Римана. Принцип сохранения границ (теорема Каратеодори) и обратное утверждение. Принцип симметрии. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше. Теорема Вейерштрасса. Применение принципа аргумента к исследованию устойчивости многочленов. Годограф Михайлова.

12. Метрические пространства. ([11], гл. 2, с.54-91)

Количество часов аудиторной работы – 12 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 16 часов: ПЛ – 4 часа, ПС – 3 часа, ДЗ – 9 часов.

Полнота метрических пространств (мп). Теорема о пополнении. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Ее следствие. Принцип равномерной ограниченности для непрерывных функций. Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения. Применения теоремы о неподвижной точке (функциональные уравнения, уравнения Фредгольма 2-го рода, уравнение Вольтерры, теорема Пикара).

13. Компактность. ([11], гл. 2, с.107-125)

Количество часов аудиторной работы – 12 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 16 часов: ПЛ – 4 часа, ПС – 3 часа, ДЗ – 9 часов.

Компактные множества и компакты в мп. Обобщенная теорема Вейерштрасса. Полная ограниченность подмножеств в мп. Теорема Хаусдорфа. Полунепрерывность снизу функций на мп. Теорема Фреше-Тонелли. Критерии компактности в конкретных мп. Обсуждение теоремы Брауэра о неподвижной точке и принципа Шаудера как ее обобщения. Теорема Пеано.

14. Нормированные и евклидовы пространства. ([11], гл. 5, с.130-179, с.188-207)

Количество часов аудиторной работы – 16 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 19 часов: ПЛ – 5 часа, ПС – 4 часа, ДЗ – 10 часов.

Нормированные и евклидовы пространства. Гильбертово пространство. Ортогональное проектирование. Разложение Фурье. Изоморфизм гильбертовых пространств. Сопряженное пространство. Его полнота. Строение ограниченных линейных функционалов в основных нормированных пространствах. Теорема Хана-Банаха. Теорема Банаха-Штейнгауза для функционалов. Приложение к теории рядов Фурье. Слабая сходимость в сопряженном пространстве. Сходимость квадратурных формул (теоремы Пойа и Стеклова), регулярные методы суммирования рядов (теорема Теплица).

15. Ограниченные операторы в банаховых и гильбертовом пространствах. ([11], гл. 4, с.233-266; гл. 9, с.476-490; [19], гл. 11, с.305-310)

Количество часов аудиторной работы – 16 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 19 часов: ПЛ – 5 часа, ПС – 4 часа, ДЗ – 10 часов.

Ограниченные линейные операторы в нормированных пространствах. Различные типы сходимости в пространстве операторов. Свойства спектра и резольвенты линейного ограниченного оператора. Решение интегрального уравнения Фредгольма разложением резольвенты в ряд Неймана. Решение интегрального уравнения с вырожденным ядром. Свойства компактных операторов. Самосопряженные операторы и их спектр. Теорема Фредгольма. Теорема Гильберта. Задача Штурма-Лиувилля.

8 Образовательные технологии

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Примерные задачи вычислительной части домашнего задания

1. Визуализируйте образ области $D \subseteq \mathbb{C}$ при действии отображения $w = f(z)$.

2. Даны области G_z и G_w на комплексной плоскости. Запишите ФКП $w = f(z)$, гомеоморфно отображающую область G_z на G_w и выполните проверку найденных решений, визуализировав области G_z и $f\left(G_z\right)$.

3. Локализуйте корни многочлена $p(z)$ во вложенных кругах $G_r=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\}$ с помощью принципа аргумента, визуализировав кривые $\partial G_r^*(f)=\{f(z):z\in\partial G_r\}$ и определив по визуализации индексы этих кривых для разных значений r.

4. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $a_0x^{(n)}+\ldots+a_nx=0$. Исследуйте устойчивость точки покоя этого уравнения с помощью годографа Михайлова, визуализировав соответствующие кривые.

9.2. Образцы задач контрольных работ

9.2.1 Контрольная работа по теме «Элементы теории функций комплексного переменного»

1. Решите уравнения (ответ – в алгебраической форме):

а) $z^3+6z^2+12z+8-\dfrac{(-1-i)^7(\sqrt{3}-3i)^{12}}{(-4+4i)^5}=0$; б) $\cos(z-i)=4i$; в) $z^{\frac{1}{\ln i}}=i+1$.

2. Укажите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases}|z-4|\le|z-1-5i|, & 1\le|z-2-2i|\le 3,\\ \operatorname{Re} z\ge 2, & |\arg(z-2-2i)|\ge\pi/6.\end{cases}$$

3. Покажите, что функция голоморфна в $\mathbb{C}$ и найдите ее производную:

а) $w=\sin(z^2i)$; б) $w=z^i$.

4. Вычислите с помощью формулы Коши

а) $\displaystyle\oint_\Gamma\frac{\sin 2z\,dz}{(z^2-(3i+1)z+2i-2)^k}$, если $\Gamma:|z-2i|=1, k=2$ и $\Gamma:|z-1-2i|=2, k=1$;

б) $\displaystyle\oint_\Gamma\frac{\operatorname{sh}z\,dz}{z^3-8i}$, $\Gamma: z=1-i+2\cos t+i\tfrac{3}{2}\sin t, 0\le t\le 2\pi$.

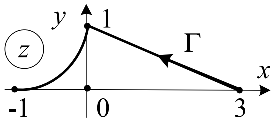
в) $\displaystyle\oint_\Gamma\frac{e^{3z}dz}{z^5+9z^3}$, $\Gamma:|z|+|z-3i|=4$.

5. Найдите все разложения в ряд Лорана с центром в точке z_0, укажите области сходимости полученных рядов, выделите главную и правильную части разложений

а) $f(z)=\dfrac{z^4-1}{z^3+4z}$, $z_0=-2i$; б) $f(z)=(z^2+2)\cos(\frac{\pi}{4}z)$, $z_0=1$.

6. Запишите ФКП, конформно отображающую: а) угол $\{z\in\mathbb{C}:\pi/6<\arg(z-1+2i)<\pi/3\}$ на круг $\{w\in\mathbb{C}:|w+2-i|<3\}$; б) единичный круг $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ на угол $\{w\in\mathbb{C}:-\pi/2<\arg(w+1-2i)<\pi/4\}$; в) полосу $1\le\operatorname{Re}z\le 3$ в замкнутую нижнюю полуплоскость с выколотой точкой $z=4$.

7. Вычислите интегралы (ответ – в алгебраической форме)



а) $\displaystyle\int_\Gamma z(\overline{z}+1+i)dz$; б) $\displaystyle\int_\Gamma(z^2-4z)\sin 2z\,dz$.

8. Вычислите интегралы с помощью теоремы Коши о вычетах:

а) $\displaystyle\int_{|z-2|=3}\frac{\operatorname{ch}(\pi z/4)dz}{z^2-(3i+1)z-2+i}$; б) $\displaystyle\int_{|z-i|=1}(2z^2+z-1)\cos(2/(z-i))dz$;

в) $\int_{|z+4i|=2} \frac{\sin(\pi i z)}{z^4+50z^2+625}dz$; г) $\int_{|z|=3} \frac{7z^{23}+2z}{(5z^{10}-64)(3z^{14}+1)}dz$.

9. Вычислите интегралы с помощью вычетов или найдите сумму ряда:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos xdx}{5-2\cos x}$; б) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)dx}{(x^3-27)^2}$; в) $v.p.\int_0^{\infty} \frac{x^3\sin 2xdx}{x^4-256}$; г) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{12n^2+16n-3}$.

9.2.2 Контрольная работа по теме «Элементы функционального анализа»

1. Компактны ли следующие множества функций в пространстве $C[0,1]$:

а) $\left\{n(1-\cos(\frac{1}{n}t)) : n\in\mathbb{N}\right\}$; б) $\left\{\sin\alpha t : \alpha\in[1,2]\right\}$.

2. Дано отображение $Ax(t)=\lambda\int_0^{\pi}\sin(s+t)x(s)\,ds+2$ в $C[0,\pi]$ ($C_1[0,\pi]$, $C_2[0,\pi]$). Найдите: а) при каких λ отображение A является сжимающим; б) приближенно неподвижную точку отображения A при $\lambda=\frac{1}{4}$, сделав три итерации методом последовательных приближений ($x_0(t)\equiv 0$); в) абсолютную и относительную ошибки двух последних приближений.

3. Найдите приближенное решение системы $\begin{cases}2xy^2+y^3=5,\\ 3x+2x^2y=14,\end{cases}$ сделав две последовательные итерации обобщенным методом Ньютона. Найдите абсолютную и относительную ошибки найденных приближенных решений в пространстве $\mathbb{R}^2_1$ (в $\mathbb{R}^2_\infty$) (точное <u>целочисленное</u> решение нужно «угадать» по приближенному).

4. Докажите, что функционалы $f_n(x)=\int_0^1 x(\frac{1}{n}t)dt$ являются линейными непрерывными в пространстве $C[0,1]$ и найдите их нормы. Будет ли последовательность функционалов $\{f_n\}$ слабо сходиться к $f(x)=x(0)$? Будет ли $\{f_n\}$ сильно ограниченной? (<u>Доп. вопрос</u>: будет ли $\{f_n\}$ сильно сходиться к f?)

5. Найдите ядро оператор $Ax(t)=3x(t)+(7t-3)x'(t)+\int\limits_0^t(4s-3)x''(s)ds$, $A:C^2[0,1]\to C^2[0,1]$.

6. Докажите, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найдите их нормы:

а) $A:C_1[0,1]\to C_1[0,1]$, $Ax(t)=x\left(\sqrt{t}\right)$; б) $A:l_2\to l_2$, $A(x_1,x_2,...)=(x_1+x_2,x_2+x_3,...)$;

в) $A:X\to X$, $Ap(t)=p'(t)+\int_0^1 p(s)ds$, если $X=(P^1[0,1],\|\ \|_2)$, $\|x\|_2=\sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}$.

7. Докажите, что оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $(Ax)(t)=x(t)+\lambda\int_0^1 e^{s+t}x(s)ds$ имеет ограниченный обратный оператор A^{-1} и найдите его.

8. Решите интегральное уравнение $x(t)-\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos(t+s)x(s)ds=y(t)$ в классе $C[0,\pi]$.

9. В вещественном линейном пространстве $C[-\pi,\pi]$ найдите собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t)=\int\limits_0^{\pi}\cos(t+s)x(s)ds$.

10. В вещественном линейном пространстве $C[0,\pi]$ найдите собственные значения и собственные векторы оператора $Ax(t)=x''(t)$, если оператор определен на множестве $D(A)=\{x\in C[0,\pi] : x''\in C[0,\pi],\ x(0)=x(\pi)=0\}$.

11. Какие из следующих операторов $A: C[0,1] \to C[0,1]$ являются компактными:

а) $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$; б) $Ax(t) = tx(t)$; в) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$.

9.3 Минимум вопросов и задач к экзамену-1

1. Решить уравнение $\sin\left(z^i\right) = i$ (ответ – в алгебраической форме).
2. Решить уравнение $\mathrm{Ln}(z^i + 1) = \pi i$ (ответ – в алгебраической форме).
3. Решить уравнение $\dfrac{2}{z^3 - z} = i$ (ответ – в алгебраической форме).

---

4. Докажите, что e^z – периодическая функция.
5. Докажите, что $\left|\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n\right| = e^{\mathrm{Re}\, z}$.
6. Докажите, что $\arg\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n\right) = \mathrm{Im}\, z$.

---

7. Запишите $(i+1)^i$ в алгебраической форме.
8. Запишите $\mathrm{Arcsin}(i+1)$ в алгебраической форме.
9. Запишите $\mathrm{Ln}(i^i + 1)$ в алгебраической форме.

---

10. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2i}{z+i}\right) \ge 1$.
11. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\begin{cases} |z| + |z+2i| \le 3,\ |z+3+2i| \le |z-3+2i| \\ |z| - |z+2i| \ge 1. \end{cases}$
12. Найдите расстояние между образами точек i и $i+1$ при стереографической проекции на сфере Римана.

---

13. Открытое множество это …
14. Замкнутое множество это …
15. Компактное множество это …

---

16. Путь на комплексной плоскости это …
17. Кривая на комплексной плоскости это …
18. Жорданова кривая это …
19. Спрямляемая кривая это …
20. Кривая класса C^k это …
21. Гомотопные кривые это …

---

22. Покажите, что множество $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 2\}$ – открытое, а множество $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| \le 2\}$ замкнутое.
23. Область на комплексной плоскости это …
24. Граница множества это …

---

25. Однолистная функция это …
26. Укажите какую-либо область однолистности функции z^2+2z.
27. Укажите какую-либо область однолистности функции $2\left(z+z^{-1}\right)$.

---

28. $\mathbb{R}-$ и $\mathbb{C}-$линейные функции это …
29. $\mathbb{R}-$ и $\mathbb{C}-$дифференцируемые функции это …
30. Условия Коши-Римана это …

---

31. Проверьте гармоничность функции $\dfrac{x}{x^2+y^2+2y+1}$.
32. Может ли функция $e^{x^2+y^2}\cos(2xy)$ быть мнимой частью некоторой голоморфной функции?
33. Найдите голоморфную функцию $f(z)$, если $\dfrac{-y-1}{(x+3)^2+(y+1)^2}$ – ее мнимая часть.

---

34. Голоморфная функция в точке это …
35. Производная функции комплексного переменного это …
36. На какой угол повернется касательная к кривой $z(t)=t^2+3ti$ в точке $z=1+3i$ при отображении $f(z)=z^2+2z$?
37. Конформное отображение это …

---

38. Перечислите алгебраические свойства дробно-линейной функции.
39. Перечислите геометрические свойства дробно-линейной функции.
40. Функция $w=\dfrac{z+i}{iz-1}$ отображает окружность $|z|=1$ на …
41. Найдите дробно-линейную функцию, отображающую точки $z_1=i$, $z_2=1-i$, $z_3=1+i$ на $w_1=-1$, $w_2=i$ и $w_3=1$ соответственно.
42. Найдите отображение полосы $\{z:1\le \operatorname{Re} z<2\}$ на угол $\{z:\pi/6\le \arg z<\pi/2\}$.

---

43. Формулировка интегральной теоремы Коши.
44. Формулировка интегральной теоремы Коши для многосвязной области.
45. Найдите $\int_{|z-1|=1}\dfrac{dz}{z^3+i}$.

---

46. Интегральная формула Коши это …
47. С помощью интегральной формулы Коши вычислите $\int_{|z+1+i|+|z-1-i|=3}\dfrac{dz}{z^2+(1-3i)z-2-i}$.
48. Теорема о среднем это … Чему равно среднее значение функции $f(z)=z^{-1}$ на окружности: а) $|z-2i|=1$; б) $|z|=1$
49. Интеграл типа Коши это …

---

50. Ряд Лорана, правильная и главные части ряда Лорана это …
51. Разложите функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+iz}$ в кольце $1<|z+i|<\infty$ в ряд Лорана.

52. Разложите функцию $f(z)=\sin\left(\dfrac{2+3z}{z^3}\right)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$.

---

53. Докажите неравенство Коши с помощью оценок коэффициентов ряда Лорана.
54. Докажите теорему Лиувилля с помощью неравенства Коши.
55. Докажите основную теорему алгебры с помощью теоремы Лиувилля.
56. Сформулируйте теорему Морера.
57. Докажите с помощью теоремы Морера теорему Вейерштрасса о голоморфности ряды из голоморфных функций.
58. Сформулируйте теорему единственности.
59. Сформулируйте принцип максимума модуля и найдите $\max\limits_{|z|\le 1}\left|z^2+3z-1\right|$.
60. Сформулируйте теорему Рунге.

---

61. Дайте классификацию изолированных особых точек.
62. Как связана классификация особых точек с видом главной части ряда Лорана?
63. Найдите все особые точки функции $f(z)=\dfrac{\cos(\pi z)}{2z^3+z^2}+e^{1/(z+2)}$ и укажите их характер.
64. Сформулируйте теорему Сохоцкого.
65. Целые и мероморфные функции это …

---

66. Вычет функции $f(z)$ в особой точке a это …
67. Сформулируйте теорему Коши о вычетах и теорему о полной сумме вычетов. Вычислите $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{7z^{23}+2z}{(5z^{10}-64)(3z^{14}+1)}dz$.
68. Докажите формулу вычисления вычета в полюсе n-го порядка.
69. Найдите вычеты функции $f(z)=\dfrac{\cos(2\pi z)}{4z^3-z^2}+e^{1/(z-1)}$ во всех ее особых точках.
70. Покажите, как применяется теория вычетов к вычислению несобственных интегралов и вычислите $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-3)dx}{(x^3-27)^2}$.
71. Сформулируйте лемму Жордана и с ее помощью вычислите $v.p.\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^3\sin 2x dx}{x^4-256}$.
72. Докажите формулу вычисления обратного преобразования Лапласа (преобразования Меллина) с помощью вычетов и решите задачу Коши $\ddot{x}+4x=1-2te^{3t}$, $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$, применив эту формулу.
73. Докажите формулу суммирования числовых рядов с помощью вычетов и найдите сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{12n^2+16n-3}$.

---

74. Что такое логарифмический вычет?
75. Вычислите $\displaystyle\int_{|z-1|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, если $f(z)=\dfrac{z^2+3iz-4}{z^3+5iz^2+6i}$.
76. Сформулируйте принцип аргумента и с его помощью оцените число корней многочлена $p(z)=2z^3-11z^2+18z-14$ в круге $\{z:|z|<3\}$.

77. Сформулируйте теорему Руше. Локализуйте корни многочлена $p(z)=z^4-9z+1$ во вложенных кругах $G_r=\{z:|z|<r\}$ $\partial G=\{z:z=re^{it},0\le t<2\pi\}$.
78. Дано линейное однородное ДУ $x'''+5x''+9x'+5x=0$. Исследуйте устойчивость точки покоя этого уравнения с помощью годографа Михайлова, найдите все корни характеристического многочлена, разложив его на линейные и квадратичные множители с целыми неопределенными коэффициентами, запишите общее решение этого уравнения.
79. Сформулируйте теорему Римана.

9.4 Минимум задач к экзамену-2

I. Метрические пространства

1. Являются ли метрикой на вещественной прямой следующие функции:

а) $\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$; б) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$; в) $arctg\,|x-y|$?

2. Покажите, что на множестве ограниченных последовательностей $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}$ функции:

а) $\sup\limits_i \dfrac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$; б) $\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}\cdot\dfrac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$ определяют метрику.

3. Пусть $\rho(m,n)=\begin{cases}1+(m+n)^{-1}, & m\ne n,\\ 0, & m=n,\end{cases}$ $m,n\in\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел). Докажите, что пара $(\mathbb{N},\rho)$ – полное метрическим пространством?

4. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X. Докажите, что функции $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, $\rho_2(x,y)=\ln\left(1+\rho(x,y)\right)$, $\rho_3(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$ также являются метриками.

5. В пространстве $C[0,2]$ найдите расстояние между функциями:

а) $x(t)=2\sin\pi t$, $y(t)=2\cos\pi t$; б) $x(t)=t^2$, $y(t)=6t$;

в) $x(t)=\sin\pi t$, $y(t)=3\cos\pi t$; г) $x(t)=t^2$, $y(t)=t$.

6. В пространствах $C[0,\frac{7}{2}]$, $C_1[0,\frac{7}{2}]$, $C^1[0,\frac{7}{2}]$ найдите расстояние между функциями $x(t)=t^2$, $y(t)=2t+3$.

7. В пространствах $C[0,2]$, $C_1[0,2]$, $C_2[0,2]$, $C^1[0,2]$, $C^2[0,2]$ найдите расстояние между функциями:

а) $x(t)=t^2$, $y(t)=3t+4$; б) $x(t)=t^2-8t-1$, $y(t)=-4t+3$.

8. Является ли открытым в пространстве $C[a,b]$ множество $\{f\in C[a,b]:0<f(x)<1\ \forall x\in[a,b]\}$?

9. Является ли открытым в пространстве l_∞ множество $\{(x_k)\in l_\infty:0<x_k<1,\ k=1,2,...\}$?

10. Пусть A – подмножество метрического пространства (X,ρ). Докажите, что функция $f(x)=\rho(x,A)=\inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)$ непрерывна.

11. Показать, что пространство $\mathbb{R}^n_p$, $p\ge 1$ полное.

12. Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой:

а) $\rho(x,y)=|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}y|$; б) $\rho(x,y)=|e^x-e^y|$; в) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$?

Если нет, то попишите пополнение этих пространств по соответствующей метрике.

13. Пусть множество $X=\left\{x=(x_k):\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sqrt{|x_k|}<\infty\right\}$, метрика в котором имеет вид $\rho(x,y)=\sup\limits_k\left\{\frac{1}{k!}\sqrt[3]{|x_k-y_k|}\right\}$. Исследуйте метрическое пространство (X,ρ) на полноту и сепарабельность. Если метрическое пространство (X,ρ) неполное, то найдите его пополнение.

14. Пусть множество $X=\left\{x=(x_k):\sum_{k=1}^{\infty}k^2|x_k|<\infty\right\}$, метрика в котором имеет вид $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{|x_k-y_k|}$. Исследуйте метрическое пространство (X,ρ) на полноту и сепарабельность. Если метрическое пространство (X,ρ) неполное, то найдите его пополнение.

15. Пусть P – множество всех вещественных многочленов, метрика в котором имеет вид $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left|(x-y)^{(k)}(0)\right|$. Исследуйте метрическое пространство (P,ρ) на полноту и сепарабельность. Если метрическое пространство (P,ρ) неполное, то найдите его пополнение.

16. Показать, что метрики $\rho_1(x,y)=\sqrt{|x_1-y_1|+|x_2-y_2|}$, $\rho_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, $\rho_\infty(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$ эквивалентны на вещественной плоскости, то есть задают одну и ту же топологию.

17. Докажите, что пространство $\mathbb{R}_2^n$ сепарабельно.

18. Докажите, что дискретное метрическое пространство, состоящее из счётного числа точек, сепарабельно.

19. Докажите, что пространство $C[a,b]$ сепарабельно.

20. Докажите, что пространство l_2 сепарабельно.

21. Докажите, что пространство m не сепарабельно.

II. Компактность в метрических пространствах

1. Докажите, что компакты в $\mathbb{R}_2^n$ – это замкнутые ограниченные множества.

2. Покажите, что единичный шар в l_2 не является компактом.

3. Докажите, что компактное метрическое пространство сепарабельно.

4. Докажите что компакт метрического пространства – замкнутое множество.

5. Докажите, что множество M в l_2 является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто, ограничено и $\forall\varepsilon>0\ \exists n:\ \sum_{k=n}^{\infty}|x_k|^2<\infty\ \ \forall x=(x_k)\in M$.

6. Докажите, что параллелепипед $\left\{x=(x_k)\in l_2:|x_k|\le\frac{1}{k},\ k=1,2,...\right\}$ является компактом в l_2.

7. Покажите, что последовательность $\{\sin(2^n\pi x)\}$ не является равностепенно непрерывной в пространстве $C[0,1]$.

8. Покажите, что последовательность $\{\sin(nx)\}$ не является равностепенно непрерывной в пространстве $C[0,\pi]$.

9. Докажите, что множество $\left\{f\in C^1[0,1]:\|f\|_C+\|f'\|_C=1\right\}$ компактно в $C[0,1]$.

10. Пусть M – равномерно ограниченное множество функций в $C[a,b]$. Докажите, что множество N функций вида $y(t)=\int_0^t x(s)ds$, $x(t)\in M$, компактно.

11. Докажите, что равномерно ограниченное множество функций $M\subseteq C[a,b]$, удовлетворяющих условию Липшица с общей постоянной, является компактом в $C[a,b]$.

12. Докажите, что множество функций $M \subseteq C[a,b]$, ограниченных при некотором фиксированном $t_0 \in [a,b]$ и удовлетворяющих условию Липшица с общей постоянной, является компактом в $C[a,b]$.

13. Докажите, что множество таких функций $x(t) \in C^1[a,b]$, что $|x(0)| \le c_1$, $\int_a^b |x'(t)|^2\,dt \le c_2$ компактно в $C[a,b]$.

14. Докажите, что равномерно ограниченное множество многочленов степени не больше n является компактом в $C[a,b]$.

15. Компактны ли следующие множества функций в пространстве $C[0,1]$:

а) $\{t^n : n \in \mathbb{N}\}$; б) $\{n(1-\cos(\frac{1}{n}t)) : n \in \mathbb{N}\}$; в) $\{\sin nt : n \in \mathbb{N}\}$;

г) $\{\sin(n+t) : n \in \mathbb{N}\}$; д) $\{\sin \alpha t : \alpha \in \mathbb{R}\}$; е) $\{\sin \alpha t : \alpha \in [1,2]\}$;

ж) $\{\operatorname{arctg} \alpha t : \alpha \in \mathbb{R}\}$; з) $\{e^{1-\alpha t} : \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \ge 0\}$.

III. Теоремы о неподвижной точке

1. Покажите, что если евклидова норма $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$ преобразование $\mathbb{R}_2^n \to \mathbb{R}_2^n$ меньше единицы, то отображение сжимающее.

2. Покажите, что если столбиковая норма $\|A\|_1 = \max\{|a_{11}|+|a_{21}|, |a_{12}|+|a_{22}|\}$ преобразования $\mathbb{R}_1^2 \to \mathbb{R}_1^2$ меньше единицы, то отображение сжимающее.

3. Покажите, что если строчная норма $\|A\|_\infty = \max\{|a_{11}|+|a_{12}|, |a_{21}|+|a_{22}|\}$ преобразования $\mathbb{R}_\infty^2 \to \mathbb{R}_\infty^2$ меньше единицы, то отображение сжимающее.

4. Пусть функция $f(t)$ задана и дифференцируема на $[a,b]$ и отображает этот отрезок в себя, причем $\max\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)| < 1$. Докажите, что уравнение $f(t) = t$ имеет на $[a,b]$ единственное решение.

5. Пусть функция $f(t)$ задана и дифференцируема на всей вещественной оси и для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство: а) $|f'(t)| \le \lambda < 1$; б) $|f'(t)| \ge \lambda > 1$. Докажите, что уравнение $f(t) = t$ имеет единственное решение.

6. Докажите, что уравнение $f(t) = t + \varepsilon f(t^k)$, $0 < \varepsilon < 1$, $k > 1$ имеет единственное решение $f(t) \in C[a,b]$.

7. Найдите приближенное решение уравнение методом последовательных приближений, подобрав параметр, гарантирующий сжимаемость отображения:

а) $\dfrac{1}{x} = x^2 + 3x$; б) $5x^3 - 20x + 3 = 0$; в) $x^3 - 9x^2 + 30x - 22 = 0$.

8. Является ли сжимающим отображение $f(x) = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[0, \frac{1}{4}]$?

9. Докажите, что при $0 \le a \le 1$ итерации $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a)$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$, сходятся к $\sqrt{a}$.

10. Является ли отображение $\begin{cases} y_1 = 0{,}1x_1 - 0{,}3x_2, \\ y_1 = 0{,}4x_1 + 0{,}1x_2 \end{cases}$ сжимающим в $\mathbb{R}_2^2, \mathbb{R}_1^2, \mathbb{R}_\infty^2$?

11. Следующие системы преобразуйте так, чтобы их можно было решить итерационным методом:

а) $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x - 3y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

Сделайте три итерации методом последовательных приближений. Найдите абсолютную и относительную ошибки найденных приближенных решений.

12. При каких λ оператор Фредгольма $Ax(t) = \lambda\int_0^1 (t-s)\,x(s)\,ds$ является сжимающим при действии: а) $C[0,1] \to C[0,1]$; б) $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$?

13. При каких λ оператор Вольтерра $Bx(t) = \lambda\int_0^t (t-s)x(s)ds$ является сжимающим при действии: а) $C[0,1] \to C[0,1]$; б) $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$?

14. Докажите, что оператор $Ax(t) = \lambda\int_0^t x(s)\,ds + 1$ при $|\lambda| < 1$ является сжимающим в $C[0,1]$. Найдите неподвижную точку этого оператора при $\lambda = 0{,}5$. Сделайте три итерации методом последовательных приближений $(x_0(t) \equiv 0)$. Найдите относительную и абсолютную погрешности найденных приближенных решений.

IV. Нормированные и банаховы пространства

1. В пространствах $\mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_3^3$ найдите нормы элементов $x = (1,-2,5)$, $y = (-2,3,1)$ и расстояние между ними.

2. В пространствах $C[-1,5]$, $C_1[-1,5]$ найдите норму элемента $x(t) = 4t^3 - t^4$.

3. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ функционал:

а) $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a,b]}$; б) $|x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{C[a,b]}$.

4. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ функционал:

а) $\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$; б) $\max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$; в) $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

г) $|x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$; д) $\int_a^b |x(t)|\,dt + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$.

5. Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a,b]$: а) открытым; б) замкнутым?

6. Будет ли замкнутым в пространстве $C[a,b]$ множество всех многочленов степени: а) $\le k$; б) $= k$?

7. Найдите пределы последовательностей:

а) $x_n(t) = \dfrac{nt}{1+n^2t^2}$ в $C[0,1]$ и $C_1[0,1]$; б) $x_n(t) = \dfrac{\ln(1+n^2t^2)}{2n^2}$ в $C^1[0,1]$;

в) $x_n = \dfrac{nt}{n+t}$ в $C[0,2]$; г) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ в $C[0,1]$.

8. Сходится ли последовательность $\{x_n\}$, $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, \dots)$, в пространстве l_3?

9. Сходится ли последовательность $\{x_n\}$, $x_n = (\underbrace{1,\dots,1}_{n}, 0, \dots)$, в пространстве l_1?

10. Докажите, что последовательность $\{x_n(t)\}$, $x_n(t) = n^2te^{-nt}$ ($n \in \mathbb{N}$), сходится поточечно к функции $x(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0,1]$, но не сходится в пространстве $L_1[0,1]$.

11. Дана последовательность $\{x_n\}$, $x_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots)$, $x_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots), \dots$, $x_n = (\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \dots), \dots$. К какой последовательности она сходится покоординатно? Сходится ли она к тому же пределу в метриках пространств l_1, l_2, l_∞?

12. Образуют ли в пространстве $C[-1,1]$ (замкнутые) подпространства следующие множества функций:

а) монотонные функции; б) четные функции;
в) нечетные функции; г) многочлены;

д) многочлены степени $\leq k$; е) непрерывно дифференцируемые функции;

ж) непрерывные кусочно-линейные функции;

з) функции, удовлетворяющие условию $x(0)=0$;

и) функции, удовлетворяющие условию $\int_{-1}^{1} x(t)dt = 0$;

к) функции, удовлетворяющие условию Липшица с какой-нибудь постоянной, зависящей от функции.

13. Докажите, что пространство c_0 является (замкнутым) подпространством в пространстве c, а c является (замкнутым) подпространством в пространстве m.

14. Докажите, что подпространство банахова пространства является банаховым пространством.

15. Докажите, что любое конечномерное линейное нормированное пространство является банаховым.

16. Докажите, что в банаховом пространстве последовательность непустых замкнутых вложенных множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет, и притом единственную, общую точку.

17. Докажите, что в банаховом пространстве любая последовательность непустых замкнутых вложенных шаров имеет общую точку.

V. Евклидовы и гильбертовы пространства

1. Покажите, что если в гильбертовом пространстве H последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x и $\|x_n\| \to \|x\|$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится сильно.

2. Докажите, что в пространстве со скалярным произведением для любых элементов x, y, z имеет место тождество Аполлония $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2$.

3. Пусть X — вещественное линейное нормированное пространство и для любых $x, y \in X$ выполняется равенство параллелограмма: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$. Докажите, что формула $(x,y) = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right\}$ задает скалярное произведение в этом пространстве.

4. Покажите, что в пространстве $C[0,1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

5. Покажите, что в пространстве l_1 нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

6. Пусть x_n, y_n принадлежат единичному шару гильбертова пространства и $(x_n, y_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Докажите, что $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

7. Докажите, что для того, чтобы элемент x гильбертова пространства H был ортогонален подпространству $L \subseteq H$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство $\|x\| \leq \|x-y\|$.

8. Докажите, что для произвольного множества M в гильбертовом пространстве H множество $M^{\perp}$ является подпространством.

9. Ортогонализируйте независимую систему функций $\{1, t, t^2\}$ в пространстве непрерывных функций с весом: а) $C_{2,\rho}[0,\infty)$, $\rho(t) = e^{-t}$; б) $C_{2,\rho}(-\infty,\infty)$, $\rho(t) = e^{-t^2}$.

VI. Линейные операторы в нормированном пространстве. Компактные операторы

1. Докажите, что любой линейный оператор из конечномерного нормированного пространства в конечномерное нормированное является непрерывным.

2. Пусть H − гильбертово пространство, $A: H \to H$ − ограниченный линейный оператор, определенным на всем H. Докажите, что $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x,y\in H,\\ x\neq 0, y\neq 0}} \dfrac{|(Ax, y)|}{\|x\|\|y\|}$.

3. Покажите, что оператор дифференцирования из $C[0,1]$ в $C[0,1]$ с областью определения на многообразии непрерывно дифференцируемых функций является неограниченным.

4. Докажите, что оператор дифференцирования из $C^1[0,1]$ в $C[0,1]$ непрерывен.

5. Найдите значение линейного функционала в $\mathbb{R}_2^2$ в точке (7,8), если в точке (1,1) его значение равно -1, а норма функционала равна $\sqrt{13}$.

6. Значение линейного функционала в $\mathbb{R}_\infty^2, \mathbb{R}_1^2$ в точке (1,1) равно -1, а его норма равна 12. Найдите его значение в точке (7,8).

7. Докажите, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найдите их нормы:

а) $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$;

б) $A: C[-1,1] \to C[-1,1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^t x(s)ds - \int_0^1 sx(s)ds$;

в) $A: L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, $Ax(t) = x\left(\sqrt{t}\right)$;

г) $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = t\int_0^1 x(s)ds$.

8. Пусть $\{e_n\}$ − ортонормированный базис гильбертова пространства H, $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Докажите, что если последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, то равенства $Ae_n = \lambda_n e_n$ определяют ограниченный линейный оператор $A: H \to H$, определенный на всем H, причем $\|A\| = \sup|\lambda_n|$.

9. Пусть X, Y − банаховы пространства, $\{A_n\} \subseteq L(X,Y)$, $A_n x \to Ax$ на любом элементе $x \in X$. Докажите, что если $x_n \to x$, то $A_n x_n \to Ax$.

10. Докажите, что оператор дифференцирования $C^1[0,1]$ в $C[0,1]$ имеет правый, но не имеет левого обратного.

11. Найдите область значений $R(A)$ оператора $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$. Существует ли на $R(A)$ обратный оператор и ограничен ли он?

12. Найдите спектр и резольвенту оператора $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$, $A: C[0,1] \to C[0,1]$.

13. Пусть $\{e_n\}$ − ортонормированный базис гильбертова пространства H, $A: H \to H$ − компактный оператор. Докажите, что $Ae_n \to 0$.

14. Докажите, что любой линейный непрерывный оператор, действующий из l_2 в l_1 − компактен.

15. Докажите, что диагональный оператор $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)$ в пространстве l_2 компактен тогда и только тогда, когда $\lambda_n \to 0$.

16. Какие из следующих операторов $A: C[0,1] \to C[0,1]$ являются компактными:

а) $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$; б) $Ax(t) = tx(t)$; в) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$;

г) $Ax(t) = \int_0^t e^{ts} x(s)ds$; д) $Ax(t) = x(t^2)$.

10 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

10.1 Учебно-методическое и информационное обеспечение части «Элементы теории функций комплексного переменного»

10.1.1 Базовый учебник

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного. – М.: Наука, 1985, 336 с.

10.1.2 Основная литература

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного. – М.: Наука, 1985, 336 с.
2. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984, 320 с.
3. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1991, 448 с.
4. Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1972, 416 с.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981, 304 с.
6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1979, 320 с.
7. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1976, 336 с.

10.1.3 Дополнительная литература

8. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986, 216 с.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987, 688 с.

10.1.4 Справочники, словари, энциклопедии

10. Лаврик В.И., Савенков В.Н. Справочник по конформным отображениям. – Киев: Наукова думка, 1970.

10.1.5 Программные средства

Для успешного освоения дисциплины студенту необходимо выполнить вычислительную часть домашнего задания с использованием высокоуровневых пакетов программ для математических расчетов, таких как MathCad, MATLAB, Mathematica и пр.

10.2 Учебно-методическое и информационное обеспечение части «Элементы функционального анализа»

10.2.1 Базовый учебник

11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. ФИЗМАТЛИТ. - Любое издание, начиная с 2004.

10.2.2 Основная литература

11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. ФИЗМАТЛИТ. - Любое издание, начиная с 2004.

12. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учебное пособие. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2002.

10.2.3 Дополнительная литература

13. Власов В.В., Коновалов С.П., Курочкин С.В. Задачи по функциональному анализу. – М.: МФТИ, 2000.

14. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу: учебное пособие. – К.: Выща шк., 1990.

15. Константинов Р.В. Лекции по функциональному анализу. – М.: МФТИ, 2009.

16. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982.

17. Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

18. Эдвардс Р. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.

19. Федоров В.М. Курс функционального анализа: Учебник. – СПб.: изд. «Лань», 2005.

10.2.4 Программные средства

Для успешного освоения дисциплины студенту необходимо выполнить вычислительную часть домашнего задания с использованием высокоуровневых пакетов программ для математических расчетов, таких как MathCad, MATLAB, Mathematica и пр.