

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Московский институт электроники и математики
Департамент прикладной математики

**Рабочая программа дисциплины
«Асимптотические методы в дискретных задачах»**

для образовательной программы «Математические методы моделирования и компьютерные технологии» направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» магистр

Разработчик программы
Выборный Евгений Викторович, ассистент, evybornyi@hse.ru

Одобрена на заседании департамента прикладной математики
«__» _____ 2016 г.

Руководитель департамента А. В. Белов _____ [подпись]

Рекомендована Академическим советом образовательной программы
«26» января 2016 г., № протокола 1

Утверждена «26» января 2016 г.

Академический руководитель образовательной программы

М.В. Карасев _____ [подпись]

Москва, 2016

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления подготовки **01.04.02 «Прикладная математика и информатики»**, обучающихся по магистерской программе «**Математические методы моделирования и компьютерные технологии**», изучающих дисциплину «Асимптотические методы в дискретных задачах».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»;
- Образовательной программой «Математические методы естествознания и компьютерные технологии» для направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки магистра;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки магистра по программе «Математические методы моделирования и компьютерные технологии», утвержденным в 2016 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Асимптотические методы в дискретных задачах»:

- Освоение основных методов построения асимптотик в задачах дискретной математики;
- Получение навыков по применению методов дисциплины в различных задачах комбинаторики;
- Знакомство с новейшими результатами и актуальными задачами данной дисциплины.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные методы построения асимптотик в задачах дискретной математики;
- Уметь проводить детальное исследование и строить асимптотические оценки для последовательностей, рекуррентностей, сумм, произведений и других объектов дискретной математики;
- Иметь навыки (приобрести опыт) применения методов дисциплины при исследовании конкретных задач комбинаторики.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способен рефлексировать (оценивать и перерабатывать) освоенные научные методы и способы деятельности.	СК-М1	Демонстрирует владение основными методами дисциплины. Оценивает корректность применения квазиклассического приближения.	Лекции, практические занятия и самостоятельная работа
Способен анализировать,	СК-М6	Применяет методы дисциплины	Выполнение домашних ра-



Компетенция	Код по ФГОС/НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
верифицировать, оценивать полноту информации в ходе профессиональной деятельности, при необходимости восполнять и синтезировать недостающую информацию		для решения конкретных задач	бот
Способен анализировать и воспроизводить смысл междисциплинарных текстов с использованием языка и аппарата прикладной математики	ИК-М2.1пм и	Интерпретирует и оценивает описание квантовомеханических систем с точки зрения применимости к ним методов квазиклассического приближения	Лекции, практические занятия и самостоятельная работа
Способен строить и решать математические модели в соответствии с направлением подготовки и специализацией	ИК-М7.2пм и	Применяет методы дисциплины при исследовании конкретных квантовомеханических систем	Лекции, практические занятия и самостоятельная работа
Способен понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат	ИК-М7.3пм и	Демонстрирует владение основными методами и моделями дисциплины	Лекции, практические занятия и самостоятельная работа

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к адаптационным дисциплинам.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Математический анализ;
- Дискретная математика;
- Теория функций комплексной переменной.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- Знание основ дискретной математики;
- Навыками решения типовых задач курса «Математический анализ».

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Модели молекулярных машин, сети и фракталы

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	



1	Введение в асимптотические методы		2	4	8
2	Элементарные асимптотики в комбинаторных задачах		4	6	16
3	Методы построения асимптотических оценок для сумм		6	9	24
4	Методы оценок рекуррентных последовательностей		6	8	20
5	Производящие функции		6	9	24
	Всего	152	24	36	92

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год		Параметры
		1	2	
Итоговый	Экзамен		x	Устный экзамен с решением задач (180 минут)

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Для прохождения контроля студент должен, как минимум, продемонстрировать знания основных определений и формулировок теорем; умение решать типовые задачи, разобранные на семинарских занятиях.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

7 Содержание дисциплины

I. Введение в асимптотические методы

Асимптотические оценки. Асимптотическое разложение по Пуанкаре. Различные асимптотические шкалы. Элементарные действия над асимптотиками. Простейшие примеры построения асимптотических формул, для явно заданных функций. Итерационный метод получения асимптотических оценок. Асимптотика корней трансцендентных уравнений.

II. Элементарные асимптотики в комбинаторных задачах

Построение оценок для факториала и биномиальных коэффициентов, формула Стирлинга. Асимптотики решений комбинаторных задач о сочетаниях и размещениях. Асимптотические методы в задачах на графах.

III. Методы построения асимптотических оценок для сумм

Оценки знакопостоянных сумм, случаи равномерного и доминирующего вклада. Сведение суммирования к интегрированию, формулы суммирования Эйлера-Маклорена, Абеля, Пуассона. Аналоги методов Лапласа, стационарной фазы и метода перевала для оценки сумм. Оценки знакопеременных сумм. Формула включения исключения. Теорема обращения Мебиуса. Асимптотика числа циклических слов. Оценки чисел Белла различных разбиений множества.

IV. Методы оценок рекуррентных последовательностей



Суммирование разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Различные методы сведения разностных уравнений к дифференциальным уравнениям. Квазилинейные и нелинейные рекуррентности. Аналоги методов пограничного слоя и ВКБ для разностных уравнений. Асимптотика спектра трехдиагональных матриц, уравнение Матье.

V. Производящие функции

Различные виды производящих функций. Аналитическое исследование производящих функций. Тауберовы и Абелевы теоремы. Полюсы, существенные особые точки и точки ветвления производящих функций. Метод перевала для производящих функций.

8 Образовательные технологии

Специальные образовательные технологии не предусмотрены.

8.1 Методические указания студентам по освоению дисциплины

Для успешного освоения дисциплины студенту необходимо посещать лекции и практические занятия, а также самостоятельно выполнять домашние задания. В качестве дополнительного источника информации студенту рекомендуется ознакомиться с книгами, представленными в списке основной и дополнительной литературы по данному курсу.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

9.1 Тематика заданий текущего контроля

Примеры задач из домашних заданий

- 1) Найдите асимптотику корня x_n уравнения

$$x = tg(x),$$

при $\pi(n-1/2) < x_n < \pi(n+1/2)$, $n \rightarrow +\infty$.

- 2) Найти главный член асимптотики для $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 3) Найти главный член асимптотики для $R_n = R_{n-1} + \frac{n}{n+1}R_{n-2}$, $R_0 = R_1 = 1$.

9.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примерный перечень вопросов к экзамену по всему курсу для самопроверки студентов.

1. Дайте определение символа эквивалентности \square , символов o и O . Расскажите об алгебраических действиях с ними. Докажите, что соотношения $f(x) \square g(x)$ и $f(x) \square g(x) + o(g(x))$, $x \rightarrow a$, означают одно и то же. Какое слагаемое в сумме называется главным (или старшим)?
2. Приведите пример асимптотической шкалы. Что такое асимптотическая последовательность? Что такое асимптотический ряд по Пуанкаре? Расскажите об алгебраических операциях с асимптотическими рядами.
3. Что такое равномерные асимптотические формулы и главный член асимптотического разложения. Постройте равномерную асимптотическую формулу для $\sin(x + \varepsilon)$ и $\cos(x + \varepsilon)$, при $x \in [-\pi/4, \pi/4]$, $\varepsilon \rightarrow 0$.
4. Расскажите о суперпозиции асимптотических формул (о замене переменной в асимптотических формулах). Получите асимптотическую формулу для x^x при $x \rightarrow 0$, сохраняя два ненулевых члена асимптотики, не считая остатка.



5. Расскажите о применении асимптотик функций к построению асимптотик последовательностей. Выпишите три ненулевых члена (не считая остатка) для $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \ln(n + \sqrt{n})$.
6. Как при помощи формулы Тейлора получить асимптотику функции заданной неявно? При $x \rightarrow 0$ найдите два слагаемых и укажите остаток для $y = y(x)$, если $xy + y^6 - 1 = 0$, $y(0) = 1$.
7. На примере уравнения $\sin x - x/(x+1) = 0$ продемонстрируйте, как ищутся асимптотики корней уравнения $f(x) = 0$, в случае, когда они образуют последовательность, занумерованную в порядке возрастания (или убывания).
8. Элементарное доказательство формулы Стирлинга.
9. Докажите асимптотические оценки для биномиальных коэффициентов. Рассмотрите C_n^k для маленьких $k = o(\sqrt{n})$ и для $k = [an]$ при $0 < a < 1$.
10. Найдите асимптотику количества унциклических связанных графов.
11. Докажите теорему об оценке сумм с помощью интегралов в случае монотонных членов. При помощи теоремы об оценке сумм с помощью интегралов в случае монотонных членов найдите главный член и остаток асимптотики для $\sum_{k=1}^n k^2 \ln k$.
12. Докажите теорему об оценке сумм с помощью интегралов посредством метода центральных прямоугольников. При помощи метода центральных прямоугольников найдите два слагаемых и остаток для $\sum_{k=1}^n k \ln k$.
13. Формула суммирования Эйлера-Маклорена. Доказательство формулы Стирлинга.
14. Формула суммирования Пуассона. Приведите пример.
15. Расскажите о методе Лапласа. Получите главный член асимптотики в случае внутренней критической точки.
16. Пользуясь методом Лапласа получите главный член асимптотики для $n!$ (формулу Стирлинга).
17. Изложите метод стационарной фазы и метод перевала.
18. Формула включения исключения. Теорема обращения Мебиуса. Асимптотика числа циклических слов.
19. Суммирование разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
20. Квазилинейные и нелинейные рекуррентности. Аналоги методов пограничного слоя и ВКБ для разностных уравнений.
21. Две теоремы об асимптотике спектра трехдиагональных матриц. Рассмотрите пример уравнения Матье.

10 Порядок формирования оценок по дисциплине

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских и практических занятиях: правильность решения задач на семинаре у доски и устные ответы. Преподаватель также оценивает самостоятельную работу студентов: правильность выполнения домашних работ, задания для которых выдаются на семинарских занятиях. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале определяется перед итоговым контролем - $O_{накопл}$.



Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$O_{результ} = 0.5 * O_{накопл} + 0.5 * O_{экз}$$

Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине: арифметический.

11 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

11.1 Основная литература

22. Кнут Д., Грэхем Ф., Поташник О. Конкретная математика. Основание информатики, М.:Мир, 1998.
23. Брэйи Н. Г. Асимптотические методы в анализе, М., ИЛ. – 1961.

11.2 Дополнительная литература

1. Odlyzko A. M. Asymptotic enumeration methods, Handbook of combinatorics (vol. 2), MIT Press, 1996.
2. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic combinatorics, Cambridge University press, 2009.
3. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, М.: Наука, 1977.

12 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Не используется.