



**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

Факультет Компьютерных наук  
Департамент больших данных и информационного поиска

**Рабочая программа дисциплины  
Дискретная математика**

для образовательной программы «Прикладная математика и информатика»  
направления 01.03.02  
уровень бакалавр

Разработчик программы:

Подольский В.В., кандидат физ.-мат. наук, доцент ([podolskii@mi.ras.ru](mailto:podolskii@mi.ras.ru))

Шварц Д.А., кандидат физ.-мат. наук, доцент ([dshvarts@mail.ru](mailto:dshvarts@mail.ru))

Одобрена на заседании департамента больших данных и информационного поиска  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2016г.

Руководитель департамента

В.В.Подольский \_\_\_\_\_ [подпись]

Утверждена Академическим советом образовательной программы

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 г., № протокола \_\_\_\_\_

Академический руководитель образовательной программы

А.С.Конущин \_\_\_\_\_ [подпись]

Москва, 2016

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.*



## 1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Дискретная математика».

Программа разработана в соответствии с:

- образовательным стандартом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»;
- образовательной программой подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»;
- рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра, утвержденным в 2016г.

## 2. Цели освоения дисциплины

### 3. Основная цель освоения дисциплины «Дискретная математика» – обучить студентов основным понятиям и методам дискретной математики, необходимым как в дальнейшем обучении, так и в работе по специальности.

### 4. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные понятия и методы дискретной математики, необходимые для дальнейшего изучения последующих дисциплин, предусмотренных базовым и рабочим учебными планами, а также для применения в профессиональной деятельности;
- Уметь пользоваться основными методами дискретной математики для решения задач как в области дискретной математики, так и за ее пределами;
- Иметь навыки формализации и решения практических задач методами дискретной математики.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
-------------	-------------------	---	---



Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной	УК-1	Умение учиться и приобретать новые знания и умения в области дискретной математики	Лекции, практические занятия, домашние задания
Способен провести теоретическую и экспериментальную оценку математического метода, алгоритма, модели данных	ПК-3	Умение проводить анализ и оценку методов и подходов дискретной математики	Лекции, практические занятия, домашние задания
Способен анализировать тексты и документы по математике и компьютерным наукам на русском(государственном) и английском языках	ПК-11	Умение анализировать условия задач и тексты конспектов лекций по дискретной математике	Практические занятия, домашние задания
Способен описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математических и компьютерных наук	ПК-15	Умение излагать формулировки и доказательства теорем, решения задач по дискретной математике.	Практические занятия, домашние задания

## 5 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественнонаучных дисциплин, является базовой для подготовки бакалавра по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть знаниями и навыками в объеме программы средней школы по математике.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Математический анализ 2;
- Математический анализ 3;
- Дискретная математика 2;
- Основы и методология программирования;
- Алгоритмы и структуры данных;
- Машинное обучение;
- Алгоритмы для больших данных;
- Теория вычислений;
- Математическая логика и её приложения;
- Алгоритмы и сложность;
- Логические методы в информатике;
- Комбинаторные методы в информатике;



Модели вычислений;  
 Дополнительные главы дискретной математики;  
 Теория информации;  
 Вероятностные алгоритмы и протоколы;  
 Исследование операций;  
 Теория игр;  
 Коллективные решения и кооперативные игры;  
 Вероятностные модели;  
 Теоретическая информатика;  
 Комбинаторика, графы и многозначные логики;  
 Теория информации, кодирования и поиска;  
 Теория графов и приложения;  
 Комбинаторная оптимизация;

## 6 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Перечислительная комбинаторика		6	6		14
2	Графы		6	6		14
3	Основы теории чисел		4	4		10
4	Множества и функции		8	8		18
5	Начала теории вероятностей		8	8		20
6	Отношения и их графы		4	4		10
7	Мощность множеств		4	4		10
8	Схемы и формулы из функциональных элементов		4	4		10
9	Основы теории алгоритмов: вопросы вычислимости		8	8		18
Итого:		228	52	52		124

### 6.1. Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Параметры **
		1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Коллоквиум		1	1		Устная беседа по пройденному материалу, проводится в середине 2-го модуля и конце 3-го модуля. Оценки - $O_{кол1}$ и $O_{кол2}$ .
	Домашнее задание	1	1	1		Разбиты на порции задач для еженедельной письменной сдачи. Оценка за каждую из порций ставится по результатам устной «защиты» домашнего задания. Оценка за домашнее задание – среднее арифметическое оценок порций, выданных в текущем модуле (Соответственно $O_{дз1}$ , $O_{дз2}$ , $O_{дз3}$ ).
Промежуточный	Экзамен		1			Письменный экзамен на зачетной неделе второго модуля, 3 часа, Оценка - $O_{пр.экз}$
Итоговый	Экзамен			1		Письменный экзамен на зачетной неделе третьего модуля, 3 часа, Оценка - $O_{экз}$



## 6.2. Критерии оценки знаний, навыков

Для прохождения контроля студент должен продемонстрировать понимание основных определений, знание теорем и методов, умение применять изученные методы для решения задач. Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

## 6.3. Порядок формирования оценок по дисциплине

### Промежуточный контроль.

$$O_{\text{промежут}} = 0,6 \cdot O_{\text{накопленная1}} + 0,4 O_{\text{пр.экс}},$$

Где  $O_{\text{накопленная1}} = 0,5 O_{\text{кол1}} + 0,25 O_{\text{дз1}} + 0,25 O_{\text{дз2}}$ .

### Итоговый контроль.

$$O_{\text{итог}} = 0,7 \cdot O_{\text{накопленная2}} + 0,3 O_{\text{экс}},$$

Где  $O_{\text{накопленная2}} = (3/14)O_{\text{кол1}} + (3/14)O_{\text{кол2}} + (3/14) O_{\text{пр.экс}} + (5/42)(O_{\text{дз1}} + O_{\text{дз2}} + O_{\text{дз3}})$  .

Или, более просто, вес коллоквиумов в итоговой оценке – 30%, промежуточного экзамена – 15%, всех домашних заданий – 25%.

В вычислениях текущие оценки и промежуточные величины не округляются. Результат вычисляется точно и округляется только в момент выставления промежуточной и итоговой оценок. При выставлении итоговой и промежуточных оценок используется следующее правило округления: между 1 и 5 округление вниз, между 5 и 6 округление арифметическое, а в остальных случаях округление вверх. Т.е. 3,92 округляется до 3, 5,48 – до 5, 5,54 – до 6, 7,12 – до 8.

За домашнее задание, коллоквиум или экзамен допускается оценка 0 в тех случаях, когда студент решил ни одной задачи в работе или ничего не рассказал на коллоквиуме. Оценка 0 также ставится в случаях доказанного списывания на экзамене.

Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

Оценка по 10-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале
1, 2, 3	неудовлетворительно
4, 5	удовлетворительно
6, 7	Хорошо
8, 9, 10	Отлично

## 7. Содержание дисциплины

### Перечислительная комбинаторика.

Рекуррентные формулы. Правило суммы. Математическая индукция, применения в перечислительной комбинаторике. Правило произведения. Биномиальные коэффициенты, количество подмножеств. Бином Ньютона, треугольник Паскаля.

Графы.

### Графы.

Основные определения. Степени вершин. Подграфы. Двудольные и 2-раскрашиваемые графы. Пути. Связные компоненты. Циклы. Деревья. Число вершин и рёбер в дереве. Ориентированные графы. Критерий существования эйлера цикла.

### Основы теории чисел.



Арифметика остатков и делимость. НОД и НОК. Малая теорема Ферма. Алгоритм Евклида. Диофантовы уравнения. Основная теорема арифметики.

### **Множества и функции.**

Множества и функции. Функции, инъекции, сюръекции, биекции. Образы и прообразы. Китайская теорема об остатках как пример биекции. Булевы функции и теоретико-множественные тождества. Формулы включений--исключений. Перечисление функций разных видов.

### **Начала теории вероятностей.**

Конечное вероятностное пространство, события, формула сложения вероятностей. Комбинаторные формулы и вероятность. Формула включений-исключений для вероятностей. Условные вероятности и независимые события. Теорема Байеса. Случайные величины. Математическое ожидание и его линейность. Простейшие формы закона больших чисел. Вероятностный метод доказательства теорем существования в комбинаторике.

### **Отношения и их графы.**

Бинарные отношения и двудольные графы. Отношения эквивалентности, классы эквивалентности. Отношения частичного порядка. Изоморфизм порядков и графов.

### **Мощность множеств.**

Сравнение множеств. Мощность множества, конечная и бесконечная мощность. Счетные множества, счетность множества целых и рациональных чисел. Несчетные множества. Континуальные множества. Несчетность континуальных множеств. Теорема Кантора-Бернштейна.

### **Схемы и формулы из функциональных элементов.**

Схемы и вычисляемые ими булевы функции, полнота. Размер и глубина схемы. Схемы для сложения и умножения чисел. Большинство функций имеют экспоненциальную сложность.

### **Введение в теорию алгоритмов.**

Алгоритмы и их описания. Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множества. Универсальный алгоритм, универсальные вычислимые функции. Модели вычисления: машины Тьюринга и FRACTRAN Конвея. Алгоритмическая неразрешимость: системы Туэ, замощения плоскости.

## **8. Образовательные технологии**

Чтение лекций и проведение семинаров. На семинаре разбираются прошлые домашние задачи, решаются задачи, выдается новое домашнее задание.

## **9. Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента**

### **9.1. Тематика заданий текущего контроля**

Примерные вопросы/ задания для домашней работы:

1. В зачете участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачет, каждый участник зачета вошел лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачета в



комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

2. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?

3. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

4. В дереве на 8 вершинах три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

5. Известно, что в графе существует замкнутый маршрут, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть эйлеров цикл?

6. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

7. Существует ли решение уравнения  $37x + 71y = 12345$  в неотрицательных целых числах?

8. В магазине продаются вазы как разного цвета, так и разной формы. Докажите, что в этом магазине можно найти две вазы, различающиеся и цветом, и формой.

9. В группе студентов есть один, который знает C++, java, python, haskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два - 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Сколько студентов в группе?

10. Существует ли трехзначное целое положительное число, которое дает остаток 1 при делении на 2, остаток 2 при делении на 3, остаток 3 при делении на 4, остаток 4 при делении на 5, остаток 5 при делении на 6 и остаток 6 при делении на 7?

11. Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?

12. Напишите формулу для вероятности объединения событий A и B при условии события C, если известны вероятности каждого из событий A, B при условии C и вероятность их пересечения AB при условии C.

13. Какова вероятность, что при бросании 4 костей сумма очков окажется меньше 10?

14. На плоскости нарисовано некоторое количество равносторонних треугольников. Они не пересекаются, но могут иметь общие участки сторон. Мы хотим покрасить каждый треугольник в какой-нибудь цвет так, чтобы те из них, которые соприкасаются, были покрашены в разные цвета (треугольники, имеющие одну общую точку, могут быть покрашены в один цвет). Хватит ли для такой раскраски двух цветов?

15. Сколько есть порядков на  $n$ -элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

16. Докажите, что любое множество непересекающихся триодов на плоскости конечно или счетно. (Триод - это объединение трех отрезков, имеющих общий конец.)

17. Верно ли, что множество бесконечных двоичных последовательностей, в которых нет трёх 1 подряд, имеет мощность континуум?

18. Является ли полной система связок, состоящая из дизъюнкции и импликации?

19. Опишите схему сравнения чисел линейного размера и логарифмической глубины.

20. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы множества без повторений.

21. Докажите, что во всяком бесконечном разрешимом множестве натуральных чисел есть перечислимое неразрешимое подмножество.

## 9.2. Тематика коллоквиума (2й модуль):

1. Принцип математической индукции.

2. Формулы суммы и произведения. Задачи о подсчете путей.



3. Конечные слова в алфавите. Соответствие между двоичными словами, подмножествами множества и характеристическими функциями.
4. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
5. Числа Фибоначчи: определение, примеры перечислительных задач, в которых ответ выражается через числа Фибоначчи.
6. Графы. Основные определения.
7. Подграфы. Циклы. Клики и независимые множества.
8. Отношение достижимости и компоненты связности графа.
9. Деревья. Примеры и свойства.
10. Эйлеров цикл, критерий его существования для ориентированных и неориентированных графов.
11. Отношение делимости и его свойства.
12. Арифметика остатков. Вычеты. Свойства операций с вычетами.
13. Малая теорема Ферма.
14. НОД и НОК.
15. Алгоритм Евклида.
16. Решение линейных диофантовых уравнений.
17. Китайская теорема об остатках.
18. Основная теорема арифметики.
19. Множества, теоретико-множественные операции, их свойства.
20. Функции. Образы и прообразы множеств.
21. Логические значения и логические связки, булевы функции. Задание булевых функций таблицами истинности.
22. Формула включений--исключений. Примеры использования.
23. Обратная функция.
24. Виды функций: инъекции, сюръекции и биекции.
25. Композиция функций, ее свойства.

### **9.3. Тематика коллоквиума (3й модуль):**

1. Конечное вероятностное пространство, событие, вероятность события.
2. Формула сложения вероятностей.
3. Формула включений—исключений для вероятностей.
4. Условные вероятности и независимые события. Теорема Байеса.
5. Случайные величины. Математическое ожидание и его линейность.
6. Бинарные отношения и двудольные графы.
7. Отношения эквивалентности, классы эквивалентности. Примеры.
8. Отношения частичного порядка.
9. Изоморфизм порядков и графов.
10. Мощность множества, конечная и бесконечная мощность.
11. Счетные множества, счетность множества целых и рациональных чисел.
12. Континуальные множества.
13. Несчетность континуальных множеств.
14. Теорема Кантора--Бернштейна.
15. Схемы и вычисляемые ими булевы функции.
16. Формулы и вычисляемые ими булевы функции.
17. Базисы, полные базисы. Примеры.
18. Размер и глубина схемы.
19. Схемы для сложения и умножения чисел.
20. Существование функций экспоненциальной схемной сложности.
21. Алгоритмы и их описания. Примеры моделей вычисления.
22. Вычисляемые функции. Разрешимые и перечислимые множества.





23. Теорема Поста.

24. Примеры алгоритмически неразрешимых задач.

## 10. Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примерный перечень вопросов к экзамену по всему курсу.

1. Формулировка принципа математической индукции. Примеры использования математической индукции в доказательствах.

2. Рекуррентные формулы. Примеры использования в перечислительной комбинаторике.

3. Подсчет числа перестановок, подмножеств  $n$ -битовых слов.

4. Бином Ньютона, треугольник Паскаля.

5. Формула включений и исключений.

6. Ориентированные и неориентированные графы, их основные характеристики.

7. Деревья. Число вершин и ребер в дереве.

8. Эйлеров цикл, критерий его существования для ориентированных и неориентированных графов.

9. Делимость, делимость с остатком. НОД и НОК.

10. Алгоритм Евклида.

11. Обратный ход алгоритма Евклида и диофантовы уравнения.

12. Основная теорема арифметики.

13. Малая теорема Ферма.

14. Китайская теорема об остатках.

15. Операции с множествами, их свойства.

16. Логические связки, таблицы истинности. Дизъюнктивная нормальная форма, полиномы Жегалкина.

17. Функции, инъекции, сюръекции, биекции. Образы и прообразы.

18. Конечное вероятностное пространство, события, формула сложения вероятностей.

19. Комбинаторные формулы и вероятность.

20. Математическое ожидание и его линейность.

21. Условные вероятности, теорема Байеса, независимые события.

22. Бинарные отношения и двудольные графы.

23. Отношения эквивалентности, классы.

24. Мощность множества, конечная и бесконечная мощность.

25. Счетные множества.

26. Несчетные множества. Континуальные множества. Несчетность континуальных множеств.

27. Схемы из функциональных элементов. Размер и глубина схемы.

28. Схемы для сложения и умножения чисел.

29. Большинство функций имеют экспоненциальную схемную сложность.

30. Алгоритмы со входом и выходом. Вычислимые функции.

31. Перечислимые и разрешимые множества. Теорема Поста.

32. Универсальная функция, перечислимое неразрешимое множество, неразрешимость проблемы остановки.

## 11. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 11.1. Базовый учебник

L. Lovasz, Kati Vesztegombi: Discrete Mathematics. Lecture Notes, Yale University, 1999.  
<http://www.cs.elte.hu/~lovasz/dmbook.ps>



### 11.2. Основная литература

- А. Шень. Математическая индукция (с1) 3-е изд., М.: МЦНМО, 2007, 32 с. <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-induction.pdf>
- А. Шень. Вероятность: примеры и задачи (с1) 2-е изд., М.: МЦНМО, 2008, 64 с., ISBN 978-5-94057-284-8 <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-probability.pdf>
- А. Шень. Игры и стратегии с точки зрения математики (с1) 2-е изд., М.: МЦНМО, 2008, 40 с., ISBN 978-5-94057-432-3 <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-games.pdf>
- Н. К. Верещагин, А. Шень. Начала теории множеств. 4-е изд., доп., М: МЦНМО, 2012, 112 с. <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part1-2.pdf>
- Н. К. Верещагин, А. Шень. Языки и исчисления. 4-е изд., испр., М.: МЦНМО, 2012, 240 с. <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf>
- Н. К. Верещагин, А. Шень. Вычислимые функции. 4-е изд., испр., М.: МЦНМО, 2012, 160 с. <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part3-2.pdf>
- Ромашенко А. Е., Румянцев А. Ю., Шень А., Заметки по теории кодирования, МЦНМО, 2011, 80 стр. <http://www.mccme.ru/~anromash/courses/coding-theory.ps>
- Н. Buhrman and R. de Wolf. Complexity Measures and Decision Tree Complexity: A Survey. In Theoretical Computer Science, 288(1):21-43, 2002. <http://homepages.cwi.nl/~rdewolf/publ/qc/dectree.pdf>
- Ingo Wegener, The Complexity of Boolean Functions. Wiley Teubner on Applicable Theory in Computer Science, 470 pages, 1987. <http://eccc.hpi-web.de/resources/pdf/cobf.pdf>

### 11.3. Дополнительная литература

- Рейнгард Дистель, Теория графов, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002, 336 с. ISBN 5-86134-101-X.
- Jukna, Stasys. Extremal Combinatorics. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. 2nd ed. 2011, XXIV, 308 p.