Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет Математики

Программа дисциплины Введение в топологию

для направления 010100.62 "Математика" подготовки бакалавра

Автор программы:
Ю.М.Бурман, к.ф.-м.н., burman@mccme.ru

Рекомендована секцией УМС по математике «___»____________ 2011 г.
Председатель С.К. Ландо

Утверждена УС факультета математики «___»_____________2011 г.
Ученый секретарь Ю.М. Бурман______________________

Москва, 2011

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра.

Программа разработана в соответствии с:

- Стандартом НИУ для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, специализации Математика, утвержденным в 2011 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Введение в топологию» являются

- получение представления об основных задачах топологии и методах исследования топологических пространств;
- знакомство с описанием (определение и свойства) наиболее важных топологических пространств;
- знакомство с топологическими результатами, находящими применение в других разделах математики (анализе, дифференциальных уравнениях, алгебре, математической физике).

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать определение топологического пространства и основных классов пространств.
- Уметь пользоваться основными операциями над топологическими пространствам.
- Уметь задавать топологические пространства в виде клеточных.
- Уметь вычислять гомотопические и гомологические инварианты пространств по их клеточному разбиению.
- Знать определение и основные свойства наиболее употребительных топологических пространств (сферы, грассманианы, пространства флагов и т.п.)
- Владеть понятиями расслоения и точной последовательности.

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий топологией (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).

умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость любых текстов по топологии в пределах курса	Изучение базового курса За счет повышения математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Распознает и воспроизводит названия основных топологических объектов, возникающих при изучении данного раздела Владеет и свободно использует профессиональную лексику	Продумывание и повторение услышанного на лекции. Сдача устной части домашних заданий. Компетенция достигается в процессе накопления опыта решения задач, общения с преподавателями.
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки только опорных топологических задач Владеет и использует постановки «многоходовых» топологических задач	Продумывание базовых понятий курса Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит основные моменты базовых топологических доказательств и построений Обосновывает и оценивает логические ходы в топологических рассуждениях и конструкциях в рамках курса	Продумывание ключевых моментов лекций Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателями.

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Для специализации математика настоящая дисциплина является базовой, относится к профессиональному циклу.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Математический анализ, функциональный анализ, алгебра, алгебраическая геометрия, математическая физика.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- хорошим знанием математического анализа и линейной алгебры в объеме трех модулей 1го курса.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Гомоморфизм и гомотопическая эквивалентность	6	2	3		1
2	Фундаментальная группа	8	2	5		1
3	Накрытия	10	3	5		2
4	Клеточные пространства	12	4	6		2
5	Высшие гомотопические группы и точные последовательности	8	2	5		1
6	Расслоения	8	2	5		1
7	Сингулярные гомологии	8	2	4		2
8	Клеточные гомологии	12	3	7		2
	Итого	**72**	**20**	**40**		**12**

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				2 год				Параметры **
		1	2	3	4	1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Контрольная работа	*			8					Письменная работа 90 минут
	Коллоквиум				9					Устный опрос по заранее розданным билетам
Промежуточный	Зачет				v					Письменная работа 180 минут
	Экзамен						*			Письменный экзамен 180 минут

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Главная форма контроля - сдача задач из «листочков» (устная часть домашнего задания); (15-20 задач по каждой теме).

Контрольная работа: студент должен продемонстрировать умение пользоваться основными техническими (вычислительными) приемами, которые используются в изученном разделе топологии. Предлагается 4-6 задач (в зависимости от сложности) на 90 минут.

Коллоквиум: устный опрос по заранее розданным билетам (билет, который нужно рассказывать данному студенту, определяется жребием). Требуется продемонстрировать знание определений и доказательств, приведенных в лекциях и, как исключения, в литературе, обязательной к проработке.

Экзамен (зачет): письменная работа, состоящая из 5-8 задач на 3 часа.

(компетенции – умения и владения)

7 Содержание дисциплины

7.1 Раздел 1. Гомеоморфизм и гомотопическая эквивалентность

Содержание темы	**Лекции**	**Семинары**	**Самостоятельная работа**		**Литература**	
			Подготовка к семинарам	Письменное домашнее задание	Базовая	Дополнительная
Топологические пространства, гомеоморфизм	2	1	1		[1],1.1	
Гомотопии, гомотопическая эквивалентность		2			[1],1.2	

7.2 Раздел 2. Фундаментальная группа

Определения и групповая структура	2	2	1		[1], 1.2.1	
Поведение при отображениях и гомотопическая инвариантность		3				

7.3 Раздел 3. Накрытия

Определение и простейшие свойства	3	2		2	[1], 1.3	
Классификация накрытий подгруппами фундаментальной группы		3			[1], 1.4.2	

7.4 Раздел 4. Клеточные пространства

Аксиомы C и W	3	2	2		[1], 1.4.1	
Теорема о накрывающей гомотопии		2			[1], 1.4.1	
Фундаментальная группа клеточного пространства	1	2			[2], 6.3	

7.5 Раздел 5. Высшие гомотопические группы и точные последовательности

Высшие гомотопические группы	2	2	1		[1], 1.2.2	
Точная последовательность пары		3			[1], 1.5	

7.6 Раздел 6. Расслоения

Определение и теорема о накрывающей гомотопии	2	2	1		[1], 1.2.2	
Точная последовательность расслоения		3			[1], 1.5	

7.7 Раздел 7. Сингулярные гомологии

Определение и гомотопическая инвариантность	2	2	2		[1], 2.9	
Точные гомологические последовательности		4			[1], 2.9, 2.10	

7.8 Раздел 8. Клеточные гомологии

Клеточный комплекс	2	3	3		[1], 2.11	
Совпадение клеточных и сингулярных гомологий	1	4				

Литература по разделу:
[1] В.А.Васильев, Введение в топологию, М., Фазис, 1997 г.
[2] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, Курс гомотопической топологии, М., Наука, 1989.

8 Образовательные технологии

На лекции даются необходимые определения и доказываются ключевые теоремы курса, разбираются поучительные примеры. После этого студентам выдается домашнее задание, устная часть которого («листок») содержит как упражнения для усвоения стандартных фактов и приемов, так и нестандартные задачи, позволяющие проверить уровень понимания теории.

Студент рассказывает решения задач из «листков» преподавателям во время семинарских занятий. Кроме того, на семинарских занятиях происходит обсуждение решения наиболее трудных задач.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

Образец устной части домашнего задания («листка»)

ВШЭ, 2011/12 УЧ.Г., 1 МОДУЛЬ — ТОПОЛОГИЯ

1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

Задача 1 (примеры топологических пространств). Докажите, что система открытых множеств в пространстве X действительно является топологией: а) (стандартная топология действительной прямой) $X = \mathbb{R}$, множество $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если $\forall a \in U \exists \varepsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$; б) (топология Зарисского) $X = \mathbb{R}$, $U \subset X$ открыто, если $X \setminus U$ конечно (в т.ч. пусто); в) (связное двоеточие) $X = \{a, b\}$, открытыми множествами являются $\varnothing$, $\{a\}$ и X; г) (окружность) $X = S^1$; множество $U \subset S^1$ открыто, если $\forall a \in U$ существует открытая дуга с центром в a, целиком лежащая в U.

Задача 2*. Придумайте обобщения примеров 1а–1г.

Задача 3 (операции над топологическими пространствами). Докажите, что следующие операции над топологическими пространствами действительно порождают топологию. а) (переход к подмножеству) Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$. Тогда топология в Y определяется так: множество $U \subset Y$ открыто, если существует открытое множество $V \subset X$ такое, что $U = V \cap Y$. б) (декартово произведение) Пусть X_1, X_2 — топологические пространства. Топология в множестве $X_1 \times X_2$ определяется так: множество $U \subset X_1 \times X_2$ открыто, если для каждой точки $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$ существуют открытые множества $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$ такие, что $a_1 \in U_1$, $a_2 \in U_2$ и $U_1 \times U_2 \subset U$. в) (склейка или факторизация) Пусть X — топологическое пространство, разбитое на непустые непересекающиеся подмножества: $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ (A — произвольное множество индексов), при этом $X_\alpha \cap X_\beta \neq \varnothing \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Тогда на множестве $Y = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ топология вводится так: *множество* $U = \{X_\alpha \mid \alpha \in B \subset A\} \subset Y$ является открытым, если *объединение* $\bigcup_{\alpha \in B} X_\alpha \subset X$ открыто. Неформально говоря, Y получено из X склеиванием (отождествлением) всех точек x, принадлежащих каждому множеству X_α, а множество $U \subset Y$ открыто, если оно получено склеиванием точек какого-либо открытого множества $V \subset X$, полученного объединением некоторых множеств X_α.

Задача 4 (упражнение к задаче 3б). Введем в $\mathbb{R}^2$ топологию так: множество $U \subset \mathbb{R}^2$ называется открытым, если $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \{y \mid |y - x| < \varepsilon\} \subset U$. а) Докажите, что это топология. б) Докажите, что эта топология совпадает с топологией прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в смысле задачи 3б.

Задача 5 (упражнение к задаче 3в). Пространство X — отрезок $[0,1]$, у которого склеены точки 0 и 1. Докажите, что X гомеоморфно окружности S^1. Топология отрезка определяется, как в задачах 1а и 3а ($[0,1] \subset \mathbb{R}$), топология X — как в задаче 3в ($[0,1]$ разбивается на точки $x \in (0,1)$ и двухточечное множество $\{0,1\}$). Топология окружности определяется как в задаче 3а ($S^1 \subset \mathbb{R}^2$); топология плоскости $\mathbb{R}^2$ — как в задаче 3б.

Задача 6 (проективная прямая). Проективной прямой называется топологическое пространство, полученное из $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ склейками: $(x,y) \sim (tx, ty)$ для всех $(x,y) \neq (0,0)$ и всех $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. а) Зафиксируем какую-нибудь точку $a_0 \in \mathbb{R}P^1$. Постройте гомеоморфизм $f : \mathbb{R}P^1 \setminus \{a_0\} \to \mathbb{R}$. б) Постройте гомеоморфизм $g : \mathbb{R}P^1 \to S^1$.

Задача 7*. Дайте определение комплексной проективной прямой, сформулируйте и докажите аналоги утверждений задачи 6.

Задача 8 (последовательности). Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ целых положительных чисел с дискретной топологией и добавим к нему точку ∞. Множество $U \subset \overline{\mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ называется открытым, если либо $\infty \notin U$, либо $\infty \in U$ и существует N такое, что $\{N, N+1, N+2, \dots\} \cup \{\infty\} \subset U$. а) Докажите, что таким образом в $\overline{\mathbb{N}}$ определена топология. б) Существует ли в $\mathbb{R}$ подмножество, гомеоморфное $\overline{\mathbb{N}}$? в) Что такое непрерывное отображение $\overline{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}$? а непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в $\overline{\mathbb{N}}$?

Задача 9 (предупреждающий пример). Приведите пример топологических пространств X, Y и обратимого непрерывного отображения $f : X \to Y$, не являющегося гомеоморфизмом.

Задача 10 (примеры гомеоморфизмов). Постройте гомеоморфизм а) окружности и окружности, у которой попарно отождествлены противоположные точки; б) пространства прямых на плоскости, проходящих через начало координат (уточните топологию в этом пространстве!) и окружности; в) пространства пар точек на прямой, в котором пары (x,y) и (y,x) для всех $x, y \in \mathbb{R}$ отождествляются (возможно $x = y$!), и полуплоскости с границей; г) двумерной сферы и плоскости, к которой добавлена новая точка ∞, база окрестностей которой состоит из всех множеств $\Omega_R \stackrel{\text{def}}{=} \{\infty\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > R\}$, $R > 0$; д) проективной плоскости — пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, в котором отождествлены точки $(x,y,z) \sim (tx, ty, tz)$ при всех $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ и всех

1

Образец контрольной работы

ВШЭ ТОПОЛОГИЯ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Все утверждения в ваших работах должны быть доказаны. Исключение: теоремы из курса и общеизвестные факты (теорема о накрывающей гомотопии, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ и т.п.) передоказывать не нужно при условии, что вы на них вовремя ссылаетесь ("согласно теореме Брауэра, ..."). Время работы 4 часа, выходить из аудитории можно, общаться — нельзя. Критерии оценок станут известны только после экзамена, но для получения максимального балла (10) заведомо не обязательно решать все задачи.

Задача 1. Пусть X_n — пространство упорядоченных наборов из n попарно различных точек на букете двух окружностей. При каких n пространство X_n связно?

Задача 2. а) Пусть $p : E \to B$ — накрытие, причем база B и тотальное пространство E линейно связны. Докажите, что накрытие имеет сечение (т.е. такое отображение $s : B \to E$, что $p \circ s = \mathrm{id}_B$) тогда и только тогда, когда оно тривиально (т.е. p является гомеоморфизмом). б) Пусть K — кольцо $\{z \in \mathbb{C} \mid 1/2 < |z| < 2\}$. Существует ли непрерывная функция $f : K \to \mathbb{C}$ такая, что $e^{f(z)} = z$?

Задача 3. Пусть K — полноторие, а $\mathbb{T}^2 = \partial K$ — его граница (гомеоморфная двумерному тору). Вычислите точную гомотопическую последовательность пары $(K, \mathbb{T}^2)$ (т.е. найдите все входящие в нее группы и гомоморфизмы). Для всех групп в последовательности, изоморфных $\mathbb{Z}$, укажите явно образующие.

Задача 4. Топологическое пространство X — четырехмерная сфера, к которой приклеен граф, гомеоморфный букве Y (три конца приклеены к трем различным точкам сферы). а) Опишите универсальное накрытие над X. б) Докажите, что $\pi_1(X)$ бесконечна. в) Коммутативна ли она?

Задача 5. а) Существует ли непрерывное отображение $f : \mathbb{T}^2 \to S^2$ степени 4? б) Существует ли непрерывное отображение $f : S^2 \to \mathbb{T}^2$ степени 4?

Задача 6. а) Пусть $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ — двулистное накрытие, а $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ — какое-то непрерывное отображение. Докажите, что существует непрерывное отображение $F : S^2 \to S^2$ такое, что $f \circ p = p \circ F$. Сколько таких отображений F существует? б) Докажите, что у любого непрерывного отображения двумерной сферы в себя имеется либо неподвижная точка, либо точка, переходящая в диаметрально противоположную. в) Докажите аналог теоремы Брауэра для $\mathbb{R}P^2$: любое непрерывное отображение $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ имеет неподвижную точку (т.е. точку $x \in \mathbb{R}P^2$ такую, что $f(x) = x$). г) Может ли точка x быть единственной?

Образец программы коллоквиума

ВШЭ, 2010 г., 3 модуль ТОПОЛОГИЯ

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

Программа содержит список основных утверждений, которые нужно уметь доказывать. Требуется, разумеется, знать и весь относящийся к делу вспомогательный материал — определения, основные свойства, вспомогательные утверждения и проч.

Для сдачи коллоквиума необходимо ответить на один теоретический вопрос (т.е. вопрос, входящий в программу) и на один дополнительный вопрос (не входящий напрямую в программу, но близкий к ней). За коллоквиум ставится оценка по 10-балльной шкале; чем больше отношение числа вопросов, на которые дан ответ, к числу вопросов, на которые ответ не дан, тем выше оценка.

1) Отрезок — связное множество. Линейно связное пространство связно.
2) Непрерывный образ компакта — компакт. Непрерывное взаимно однозначное отображение компактов — гомеоморфизм.
3) Фундаментальная группа — группа.
4) Гомоморфизм фундаментальных групп, соответствующий непрерывному отображению пространств. Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.
5) Теорема о накрывающей гомотопии (для накрытий).
6) Связь между классами эквивалентности накрытий и подгруппами фундаментальной группы базы.
7) n-ая гомотопическая группа при $n \geq 2$ — коммутативная группа.
8) Отображение сингулярных гомологий, соответствующее непрерывному отображению пространств. Сингулярные гомологии гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.
9) Гомологическая последовательность пары точна.
10) Последовательность Майера–Виеториса точна.
11) Теорема Брауэра. Основная теорема алгебры.

1

Образец варианта экзамена (зачета)

ВШЭ, ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ — ТОПОЛОГИЯ

ЭКЗАМЕН

Задача 1. Найдите степень отображения $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, заданного в однородных координатах формулой $f([x : y]) = [x^2 + y^2 : x^2 - y^2]$.

Задача 2. Найдите гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ джойна $X * Y$, где X — треугольник (без внутренности), а Y — квадрат (тоже без внутренности), в котором проведена диагональ.

Задача 3. а) Пусть A — топологическое пространство, а $B \subset A$ — его ретракт (т.е. существует непрерывное отображение $f : A \to B$ такое, что $f(x) = x$ для любого $x \in B$). Докажите, что для произвольного n естественное отображение $\pi_n(B) \to \pi_n(A)$ — мономорфизм. б) Докажите, что граница полнотория не является его ретрактом.

Задача 4. а) Докажите, что группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ матриц 2×2 с определителем 1 гомотопически эквивалентна окружности. б) Отображение $p : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}P^1$ действует по формуле $p(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = [a : c]$. Докажите, что p — расслоение и выпишите точную гомотопическую последовательность этого расслоения. в) Имеет ли расслоение p сечение?

Задача 5. Существует ли непрерывное отображение $f : \mathbb{R}P^2 \to S^1$, не гомотопное отображению в точку?

10 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка за текущий, промежуточный и итоговый контроль выставляется по 10-балльной системе.

Результирующая оценка за текущий контроль учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$O_{текущий} = n_{1*} O_{к/р} + n_{2*} O_{кол} + n_{3*} O_{сам.\ работа}$

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов**:** правильность выполнения домашних работ, задания для которых выдаются на семинарских занятиях, правильность решения задач на семинаре. Оценки за самостоятельную работу студента преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка - $O_{сам.\ работа}$ определяется перед промежуточным (итоговым) контролем.

Сумма удельных весов должна быть равна единице: $\sum n_i = 1$ Способ округления накопленной оценки текущего контроля в пользу студента.

Результирующая оценка за промежуточный (итоговый) контроль складывается из результатов накопленной результирующей оценки за текущий контроль, удельный вес которой составляет $k_1 = 0{,}5$ и оценки за экзамен/зачет, удельный вес $k_2 = 0{,}5$.

$O_{промежуточный/итоговый} = 0{,}5 * O_{текущий} + 0{,}5 * O_{зачет/экзамен}$

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме зачета/экзамена в пользу студента.

Студент может получить возможность пересдать низкие результаты за текущий контроль.

В диплом ставится оценка за итоговый контроль, которая является результирующей оценкой по учебной дисциплине.

11 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

11.1 Базовый учебник

В.А.Васильев, Введение в топологию, М.,Фазис, 1997.

11.2 Дополнительная литература

А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, Курс гомотопической топологии, М., Наука, 1989.