Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Факультет Компьютерных наук
Департамент больших данных и информационного поиска

Рабочая программа дисциплины
Математический анализ-3

для образовательной программы «Прикладная математика и информатика»
направления 01.03.02
уровень бакалавр

Разработчик программы:
к.ф.-м.н, доцент В.В. Галатенко, vgalatenko@hse.ru

Одобрена на заседании департамента больших данных и информационного поиска
«___»____________ 2016г.

Руководитель департамента
В.В.Подольский ________ [подпись]

Утверждена Академическим советом образовательной программы
«___»____________ 2016 г., № протокола_________________

Академический руководитель образовательной программы
А.С.Конушин _________________ [подпись]

Москва, 2016

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих дисциплину «Математический анализ».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом Государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет – Высшая школа экономики», в отношении которого установлена категория «Национальный исследовательский университет»;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2016 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математический анализ, часть 3» являются:

- ознакомление студентов с теоретическими основами таких разделов математического анализа как теория рядов, кратное интегрирование, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы векторного анализа, ряды и преобразование Фурье и др.;
- формирование практических навыков работы с кратными, криволинейными и поверхностными интегралами, а также с числовыми и функциональными рядами (включая ряды Тейлора и Фурье) и интегральными преобразованиями.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

ЗНАТЬ И УМЕТЬ ИСПОЛЬЗОВАТЬ основные понятия:

- теории числовых и функциональных рядов, интегральных преобразований;
- кратного, криволинейного и поверхностного интегрирования.

ИМЕТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ:

- о различных типах сходимости числовых и функциональных рядов;
- об интегральных преобразованиях;
- об элементах векторного анализа;
- о применениях рядов Фурье и интегральных преобразований для решения прикладных задач.

ИМЕТЬ НАВЫК:

- исследования на сходимость числовых и функциональных рядов;
- суммирования некоторых типов числовых и функциональных рядов;

- нахождения разложений функций в ряды Фурье и вычисления интегральных преобразований;
- вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов;
- вычисления дифференциальных операторов первого порядка от скалярного и векторного поля.

ДОЛЖЕН ВЛАДЕТЬ:

- методами теории числовых и функциональных рядов;
- методами Фурье-анализа;
- методами кратного интегрирования;
- методами теории поля.

Выпускник по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» с квалификацией (степенью) бакалавр должен обладать следующими компетенциями (утверждены 25.05.2015 Академическим советом ОП, протокол №4):

Код компетенции по порядку	**Код компетенции по ЕК**	**Уровни формирования, зачетные единицы**	**Формулировка компетенции**
УК-6	СК-Б7	РБ, 0.5	Способен вести исследовательскую деятельность, включая анализ проблем, постановку целей и задач, выделение объекта и предмета исследования, выбор способа и методов исследования, а также оценку его качества
ПК-3	ИК-Б1.1 НИД/ПД (ПМИ)	РБ, 0.25	Способен провести теоретическую и экспериментальную оценку математического метода, алгоритма, модели данных
ПК-11	ИК-Б2.1/3_3.1_2.4.1 (ПМИ)	РБ МЦ, 0.25	Способен анализировать тексты и документы по математике и компьютерным наукам на русском (государственном) и английском языках
ПК-15	ИК-Б5.2	РБ СД, 6	Способен описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математических и компьютерных наук

Виды и задачи профессиональной деятельности

Научно-исследовательская деятельность	
Исследование и разработка математических моделей, алгоритмов, методов, программного обеспечения, инструментальных средств по тематике проводимых научно-исследовательских проектов;	НИД-3
Проектная и производственно-технологическая деятельность	
Разработка математических методов для анализа и построения моделей по тематике выполняемых научно-исследовательских прикладных задач или опытно-конструкторских работ	ПД-1

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к математическому и естественнонаучному циклу дисциплин, к блоку дисциплин базовой части, обеспечивающих подготовку.

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть знаниями и компетенциями следующих дисциплин:

- математический анализ, части 1 и 2;
- линейная алгебра и геометрия;
- алгебра;

  дискретная математика.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Дифференциальные уравнения;
- Теория вероятностей и математическая статистика;
- Математические модели в экономике;
- Оптимизация;
- Машинное обучение;
- Вычислительные методы;
- Обработка сигналов.

5.Тематический план учебной дисциплины

	1. **Название темы**	2. **сего часов**	2. Аудиторные часы		3. **С амостоя-тельная работа**
			3. лекции	4. сем. заня-тия	
	4. 2 курс, 1 модуль	**5. 4**	**5. 16**	**6. 16**	**7. 32**
1	Числовые ряды и бесконечные произведения	32	8	8	16
2	Функциональные последовательности и ряды. Степенные ряды	32	8	8	16
	2 курс, 2 модуль	**70**	**16**	**16**	**38**
3	Ряды Фурье	30	8	6	16
4	Собственные интегралы, зависящие от параметра	30	6	8	16
5	РЕЗЕРВ / проведение контрольных мероприятий	10	2	2	6
	2 курс, 3 модуль	**64**	**16**	**16**	**32**
6	Несобственные интегралы, зависящие от параметра.	32	8	8	16
7	Кратные интегралы	32	8	8	16
	2 курс, 4 модуль	**68**	**16**	**16**	**36**
8	Криволинейные и поверхностные	32	8	8	16

	интегралы				
9	Элементы векторного анализа	26	6	6	14
10	РЕЗЕРВ / проведение контрольных мероприятий	10	2	2	6
Итого		**266**	**64**	**64**	**138**

6.Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	2 курс				Параметры
		1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Контрольная работа (КР1)	8				Письменная работа на 80 минут.
	Домашнее задание (ДЗ1)	8				Письменное задание, состоящее из двух частей. Время выполнения каждой из частей 3 недели.
	Контрольная работа (КР2)		7			Письменная работа на 80 минут.
	Домашнее задание (ДЗ2)		7			Письменное задание, состоящее из двух частей. Время выполнения каждой из частей от 2 до 3 недель.
	Контрольная работа (КР3)			8		Письменная работа на 80 минут.
	Домашнее задание (ДЗ3)			8		Письменное задание, состоящее из двух частей. Время выполнения каждой из частей 3 недели.
	Контрольная работа (КР4)				7	Письменная работа на 80 минут.
	Домашнее задание (ДЗ4)				7	Письменное задание, состоящее из двух частей. Время выполнения каждой из частей от 2 до 3 недель.
Промежуточный (кол-во)	Экзамен (ЭКЗ1)		1			Работа теоретически-практического характера на 120 мин. Требует написания решений (и ответов) практических задач с последующей устной защитой, а также устных ответов на вопросы теоретического характера (формулировки и доказательства).
Итоговый (кол-во)	Экзамен (ЭКЗ2)				1	Работа теоретически-практического характера на 120 мин. Требует написания решений (и ответов) практических задач с последующей устной защитой, а также устных ответов на вопросы теоретического характера (формулировки и доказательства).

В столбцах с заголовками **1**, **2**, **3**, **4** для каждой формы текущего контроля указана примерная неделя (с начала модуля), на которой планируется проведение (для контрольных работ) /оценивание (для домашних заданий) соответствующего контроля.

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Оценивание для всех форм контроля знаний осуществляется по десятибалльной шкале. Часть теоретического материала (в большей степени технического характера) может быть вынесена на самостоятельное изучение с включением соответствующих вопросов и задач в контрольно-измерительные мероприятия.

В случае пропуска контрольной работы по уважительной причине студенту предоставляется однократная возможность написать работу в присутственные часы преподавателя. Уважительность отсутствия определяется Учебным офисом (Деканатом) на основании справки о болезни или иных документов.

Домашнее задание в каждом модуле состоит из двух частей, каждая их которых выдается, сдается и оценивается отдельно. Совокупная оценка за домашнее задание представляет собой среднее арифметическое оценок за каждую из частей. Домашнее задание может предполагать ту или иную форму защиты сдаваемых решений. Информация о необходимости защиты и о ее форме доводится преподавателем до сведения студентов во время выдачи каждой из частей домашнего задания. Одной из возможных форм защиты является решение в рамках проверочных письменных работ продолжительностью до 20 минут задач, аналогичных сданным задачам домашнего задания.

На лекциях и семинарах студентам, дополнительно к обязательным заданиям, предлагаются так называемые бонусные, связанные обычно с заданиями повышенной сложности или с заданиями, требующими применение навыков из других дисциплин (в первую очередь – программирования). Сдача бонусных заданий учитывается в оценках «$О_{БОНУС1}$» (осенний семестр) и «$О_{БОНУС2}$» (весенний семестр).

Экзамен состоит из письменной части и устной части. В рамках письменной части студенты решают практические задачи, записывают и сдают решения и ответы. Для того, чтобы решение задачи было засчитано, может потребоваться его устная защита. В рамках устной части студент отвечает на вопросы билета (формулирует определения и теоремы, доказывает теоремы), а также отвечает на дополнительные вопросы. Письменная и устная части экзамена оцениваются отдельно по десятибалльной системе. Общая оценка за экзамен в случае успешной сдачи теоретической части является взвешенной суммой оценок за письменную и устную части с весами 0,4 и 0,6 соответственно. В случае неудовлетворительной оценки за теоретическую часть задания за экзамен выставляется неудовлетворительная оценка независимо от успешности решения практической задачи. Неудовлетворительная оценка за теоретическую часть экзамена выставляется, в частности, если студент в рамках ответа хотя бы на один из теоретических вопросов демонстрирует незнание основных определений и/или формулировок основных теорем курса.

Допускается сдача теоретической и практической частей экзамена в разные дни. По желанию студента в качестве оценки за практическую часть экзамена ему может быть засчитана минимальная из оценок за контрольные работы семестра. Также по желанию студента в качестве оценки за устную часть экзамена ему может быть засчитана оценка за тренировочную попытку устной части (коллоквиум). Участие студента в тренировочной попытке устной части является добровольным (необязательным).

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка всех форм контроля знаний осуществляется по 10-ти бальной шкале, при этом допускается выставление нецелых оценок (например, 8,5 или 4,2). По результатам текущего контроля осеннего семестра вычисляется накопленная оценка «$О_{НАКОПЛ1}$» по формуле

$$«О_{НАКОПЛ1}» = 0{,}3\cdot«О_{КР1}» + 0{,}3\cdot«О_{КР2}» + 0{,}2\cdot«О_{ДЗ1}» + 0{,}2\cdot«О_{ДЗ2}» + 0{,}2\cdot«О_{БОНУС1}».$$

Далее вычисляется оценка «$О_{СЕМ1}$» за осенний семестр:

$$«О_{СЕМ1}» = 0{,}5\cdot«О_{НАКОПЛ1}» + 0{,}5\cdot«О_{ЭКЗ1}»$$

(при вычисление используются неокругленные значения оценок «$О_{НАКОПЛ1}$» и ·«$О_{ЭКЗ1}$»).

Аналогично по результатам текущего контроля весеннего семестра вычисляется накопленная оценка «$О_{НАКОПЛ2}$» по формуле

$$«О_{НАКОПЛ2}» = 0{,}3\cdot«О_{КР3}» + 0{,}3\cdot«О_{КР4}» + 0{,}2\cdot«О_{ДЗ3}» + 0{,}2\cdot«О_{ДЗ4}» + 0{,}2\cdot«О_{БОНУС2}»,$$

а затем вычисляется оценка «$О_{СЕМ2}$» за весенний семестр:

$$«О_{СЕМ2}» = 0{,}5\cdot«О_{НАКОПЛ2}» + 0{,}5\cdot«О_{ЭКЗ2}»$$

(при вычисление используются неокругленные значения оценок «$О_{НАКОПЛ2}$» и ·«$О_{ЭКЗ2}$»).

Итоговая оценка «$О_{ИТОГ}$» вычисляется как среднее арифметическое оценок «$О_{СЕМ1}$» и «$О_{СЕМ2}$» (при этом используются неокругленные значения оценок «$О_{СЕМ1}$» и «$О_{СЕМ2}$»).

Для выставления в ведомость оценки округляется до целых по следующим правилам:

- если дробная часть оценки находится в пределах [0, 0,4], то – в меньшую сторону;
- если дробная часть оценки находится в пределах [0,6, 1), то – в большую сторону;
- если дробная часть итоговой оценки находится в пределах (0,4, 0,6), то – на усмотрение преподавателя в зависимости от посещения занятий, работы на занятиях и пр.

При этом если оценка до округления оказывается в пределах (3, 4), то она округляется до 3-х баллов; если оценка до округления оказывается больше 10, то она округляется до 10.

Оценка по курсу «Математический анализ, часть 3» входит в результирующую оценку по циклу дисциплин «Математический анализ» для выставления в диплом с коэффициентом **0.45**.

7 Содержание дисциплины

7.1 Числовые ряды и бесконечные произведения

([1], гл. VIII; [2], раздел V, §§ 1-3,5,9,10; [3], гл. 11)

Количество часов аудиторной работы – 16 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 16 часа: проработка лекционного материала (ПЛ) – 6 часов, подготовка к семинарским занятиям (ПС) – 4 часа, выполнение домашнего задания (ДЗ) – 6 часов.

Определение ряда, частичных сумм, сходимости. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Абсолютная и условная сходимость рядов.

Ряды с неотрицательными членами. Эквивалентность сходимости и ограниченности последовательности частичных сумм. Признаки сравнения. Радикальный признак Коши. Признак Д'Аламбера. Интегральный признак Коши-Маклорена. Использование интегралов для оценки асимптотики частичных сумм и остатков рядов.

Знакопеременные ряды. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов.

Перестановки рядов: теорема Коши о перестановке абсолютно сходящегося ряда; теорема Римана о перестановке условно сходящегося ряда. Произведения числовых рядов: теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов; теорема Мертенса.

Бесконечные произведения. Формула Стирлинга.

7.2 Функциональные последовательности и ряды. Степенные ряды

([1], гл. IX; [2], раздел V, §§ 4,5,7; [3], гл. 12)

Количество часов аудиторной работы – 16 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 16 часов: : проработка лекционного материала (ПЛ) – 6 часов, подготовка к семинарским занятиям (ПС) – 4 часа, выполнение домашнего задания (ДЗ) – 6 часов.

Понятие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Супремум-критерий, критерий Коши, признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

Предел по базе. Критерий Коши. Критерий Маркова-Гордона перестановки пределов.

Свойства равномерно сходящихся рядов: переход к пределу, непрерывность суммы, почленное интегрирование, почленное дифференцирование.

Степенные ряды. Понятие радиуса сходимости, формула Коши-Адамара. Теоремы Абеля. Метод Абеля суммирования. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов.

Теорема единственности для степенных рядов. Степенные ряды для элементарных функций. Условия представимости функции своим рядом Тейлора.

7.3 Ряды Фурье

([1], гл. XIV; [2], раздел V, §§ 6,7; [3], гл. 19, 20)

Количество часов аудиторной работы – 14 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 16 часов: проработка лекционного материала (ПЛ) – 7 часов, подготовка к семинарским занятиям (ПС) – 4 часа, выполнение домашнего задания (ДЗ) – 5 часов.

Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы. Коэффициенты Фурье и их свойства: экстремальное свойство, тождество Бесселя, тождество Парсеваля. Замкнутые ортогональные системы.

Тригонометрическая система. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Явный вид частичных сумм. Признаки Дини, Липшица сходимости ряда Фурье. Принцип локализации. Достаточное условие равномерной сходимости рядов Фурье. Эффект Гиббса.

Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теорема Вейерштрасса о замкнутости тригонометрической системы.

Интегральное преобразование Фурье как предельный случай разложения в ряд Фурье по тригонометрической системе.

7.4 Собственные интегралы, зависящие от параметра

([1], гл. XV, § 71; [2], раздел VII, § 1; [3], гл. 14, § 1)

Количество часов аудиторной работы – 14 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 16 часов: проработка лекционного материала (ПЛ) – 4 часа, подготовка к семинарским занятиям (ПС) – 5 часов, выполнение домашнего задания (ДЗ) – 5 часов.

Равномерная сходимость по параметру: супремум-критерий, связь с равномерной сходимостью последовательностей, критерий Коши. Теоремы о равномерной сходимости по параметру: перестановка пределов, непрерывность предельной функции, дифференцируемость и интегрируемость предельной функции.

Свойства собственных интегралов, зависящих от параметра: непрерывность, переход к пределу, дифференцируемость (правило Лейбница).

Теорема о перестановке собственных интегралов. Ее приложение: доказательство Гаусса основной теоремы алгебры.

7.5 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

([1], гл. XV, §§ 72-74; [2], раздел VII, §§ 2-5; [3], гл. 14, §§ 2-5)

Количество часов аудиторной работы – 16 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 16 часов: проработка лекционного материала (ПЛ) – 4 часа, подготовка к семинарским занятиям (ПС) – 5 часов, выполнение домашнего задания (ДЗ) – 7 часов.

Несобственные интегралы. Равномерная сходимость несобственного интеграла. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Непрерывность и дифференцируемость несобственных интегралов с параметром. Перестановка интегралов (собственный-несобственный, два несобственных). Интеграл Эйлера-Пуассона, Интеграл Дирихле. Эйлеровы интегралы первого рода (бета-функция Эйлера) и второго рода (гамма-функция Эйлера), их свойства. Формула дополнения для гамма-функции. Связь бета-функции и гамма-функции.

Некоторые виды интегральных преобразований. Свойства интегрального преобразования Фурье.

7.6 Кратные интегралы

([1], гл. X; [2], раздел VIII, §§ 1-10; [3], гл. 16 (§§ 1,2,4,5), 18 (§§ 1,3,5))

Количество часов аудиторной работы – 16 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 16 часов: проработка лекционного материала (ПЛ) – 4 часа, подготовка к семинарским занятиям (ПС) – 6 часов, выполнение домашнего задания (ДЗ) – 6 часов.

Мера Жордана ограниченных множеств в $\boldsymbol{R}^n$. Критерии измеримости.

Понятие кратного интеграла Римана. Связь интегрируемости и ограниченности. Критерий Дарбу интегрируемости. Свойства кратного интеграла. Связь меры и интеграла: интегрирование характеристических функций, мера множества под графиком.

Сведение кратного интеграла к повторному (теорема Фубини).

Замена переменных в кратном интеграле. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

Несобственный кратный интеграл.

7.7 Криволинейные и поверхностные интегралы

([1], гл. XI; [2], раздел VIII, §§ 11-14; [3], гл. 15 (§§ 1-3), 16 (§ 3), 17)

Количество часов аудиторной работы – 16 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 16 часов: проработка лекционного материала (ПЛ) – 5 часов, подготовка к семинарским занятиям (ПС) – 5 часов, выполнение домашнего задания (ДЗ) – 6 часов.

Понятия кривой, длины кривой. Криволинейные интегралы I и II рода, их свойства.

Понятия поверхности, площади поверхности. Сапог Шварца. Поверхностные интегралы I рода, их свойства.

Ориентация поверхности. Поверхностные интегралы II рода по гладким и кусочно-гладким поверхностям, их свойства.

7.8 Элементы векторного анализа

([1], гл. XII; [2], раздел VIII, §§ 15-17; [3], гл. 18, §§ 2,4)

Количество часов аудиторной работы – 12 часов.

Количество часов самостоятельной работы – 14 часов: проработка лекционного материала (ПЛ) – 4 часа, подготовка к семинарским занятиям (ПС) – 4 часа, выполнение домашнего задания (ДЗ) – 6 часов.

Понятие скалярного и векторного полей. Дифференциальные операторы 1-го порядка (градиент, ротор, дивергенция).

Формула Грина. Понятие потенциального векторного поля. Необходимые и достаточные условия потенциальности.

Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса. Определения ротора и дивергенции, не использующие координат.

Формулы Грина, Гаусса-Остроградского и Стокса как частные случаи общей формулы Стокса.

8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

8.1 Образцы задач для контрольных работ

1 Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

2 Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C^n n!}{n^n}$ $(C > 0)$.

3 Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n}) \sin^{-a} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ $(a > 0)$.

4 Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

5 Найдите такие C и a, что $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{0,75}} \sim CN^{a} \quad (N \to \infty)$.

6 Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt[5]{n}}$.

7 Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n \ \sin n}{\sqrt{n}}$.

8 Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$.

9 Вычислите $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$.

10 Исследуйте на равномерную сходимость на $\boldsymbol{R}$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^7 x^2}$.

11 Исследуйте на равномерную сходимость на $\boldsymbol{R}$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^7 x^9}$.

12 Исследуйте на равномерную сходимость на интервалах (0; 1) и (0,1; 1) функциональный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$.

13 Исследуйте на равномерную сходимость на интервале (0; 1) функциональный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^3 \cos nx}{n \ln n}$.

14 Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

15 Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{3^n}$.

16 Разложите в ряд по степеням x функцию arcctg x. Найдите множество x, на котором сумма ряда равна arcctg x.

17 Функцию x разложите в ряд Фурье на промежутке (-π; π). Постройте график суммы полученного разложений, а также первой частичной суммы полученного разложения (на $\boldsymbol{R}$). Выпишите равенство Парсеваля для полученного разложения.

18 Функцию x разложите в ряд Фурье на промежутке (0; π) по косинусам кратных дуг. Постройте график суммы полученного разложений, а также первой частичной суммы полученного разложения (на $\boldsymbol{R}$).

19 Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (x \in \mathbb{R})$.

20 Вычислите $\int\limits_{0}^{\pi} \ln(\sin^2 x + 2\cos^2 x)\,dx$.

21 Найдите область определения функции $F(x, y) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^p + t^q}\,dt$.

22 Исследуйте на равномерную сходимость на отрезке [0;1] несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$.

23 Вычислите $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2} dx \quad (a, b > 0)$.

24 Найдите $\lim \int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x^{2n}} dx \quad (n \to \infty)$.

25 Вычислите $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt[11]{tgx}\, dx$.

26 Представьте интегралом Фурье характеристическую функцию отрезка [0; 1].

27 Представьте интегралом Фурье функцию e^{-x^2}.

28 Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = xy,\ \ x^2 + y^2 = 1$.

29 Найдите площадь поверхности, вырезаемой из шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ цилиндром $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

30 Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, xy = 1, xy = 2, x = 2y, y = 2x \quad (x, y > 0)$.

31 Найдите координаты центра масс однородной половины шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ \ z \ge 0$.

32 Исследуйте на сходимость $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \ge 1} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha}}{\ln^{\beta}(x^2 + y^2 + z^2)} dxdydz$.

33 Вычислите $\oint\limits_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где Г – треугольник с вершинами (2; 0), (-2;3) и (-4;-5), пробегаемый против часовой стрелки.

34 Вычислите $\iint\limits_{S} (x^2 + y^2) dS$, где S – полная поверхность тела $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$.

35 Вычислите $\oint\limits_{\Gamma} ydx + xdy + ydz$, где Г – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ x + 2y + 3z = 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Oz.

36 Вычислите непосредственно и с помощью формулы Гаусса-Остроградского $\iint\limits_{S} xdx + ydz + zdy$, где S – полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ x \ge 0$, ориентированная внешним (по отношению к сфере) полем внешних нормалей.

37 Вычислите $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$, где $\mathbf{F} = \left(\arcsin\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2 + 1} \right), z^{x^3 + y^3}, x + y + z + 1 \right)$.

8.2 Образцы экзаменационных заданий

8.2.1 Вариант письменной части экзамена

1.1) Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряды

(i) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$; (ii) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}+(-1)^n}$.

1.2) Исследуйте на равномерную сходимость функциональные ряды

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ на $\boldsymbol{R}$; (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin nx}{\sqrt[3]{n+x^4}}$ на интервале (-1;1).

1.5) Найдите множество сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$.

1.4) Функцию $|x|$ разложите в ряд Фурье по тригонометрической системе на промежутке (-π; π) и запишите равенство Парсеваля, соответствующее полученному разложению.

2.1) Вычислите $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-3x^2}-e^{-5x^2}}{x}dx$.

2.2) Найдите объем тела, полученного вырезанием из шара $x^2+y^2+z^2\le 4$ цилиндра $x^2+2x+y^2\le 0$.

2.3) Найдите $\oint_{\Gamma}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где Γ – треугольник с вершинами (0;3), (-4; 8) и (-5; -10), пробегаемый по часовой стрелке.

2.4) Вычислите $\iint_{\Sigma} x^3+z^3$, где Σ – сфера $x^2+y^2+z^2=1$, ориентированная полем внутренних нормалей.

8.2.2 Образцы заданий устной части экзамена

1.1) Дайте определение условной сходимости числового ряда. Сформулируйте и докажите признак Дини сходимости ряда Фурье.

1.2) Дайте определения радиуса сходимости степенного ряда. Сформулируйте и докажите признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

1.3) Дайте определение равномерной сходимости функциональной последовательности. Сформулируйте и докажите теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.

1.4) Сформулируйте теорему Вейерштрасса о замкнутости тригонометрической системы. Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

1.5) Сформулируйте интегральный признак Коши-Маклорена сходимости числовых рядов. Сформулируйте и докажите теорему о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда.

2.1) Сформулируйте теорему о сведении кратного интеграла к повторному. Сформулируйте и докажите формулу Грина.

2.2) Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле. Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

2.3) Сформулируйте признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Сформулируйте и докажите формулу Гаусса-Остроградского.

2.4) Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Докажите эквивалентность двух определений дивергенции (использующего координаты и не использующего координаты).

2.5) Дайте определение поверхностного интеграла первого рода. Сформулируйте и докажите критерий измеримости по Жордану, связывающий измеримость множество и измеримость его границы.

Приведенные образцы иллюстрируют структуру заданий устной части экзамена, однако не включают всех возможных вопросов. В реальные задания устной части экзамена могут входить любые вопросы по определениям, формулировкам и доказательствам, не выходящие за пределы настоящей Программы (см. раздел 7 «Содержание дисциплины»).

9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

9.1 Базовые учебники

Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2001.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: «Издательство Астрель», 2002

9.2 Основная литература

1. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2001 (или более позднее издание).
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: «Издательство Астрель», 2002.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II, III − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

9.3 Дополнительная литература

4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1999.
5. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. − М.: Наука, 1984.
6. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ в двух томах. – М.: «Высшая школа», 1981 (имеется также переработанное трехтомное издание М.: Дрофа, 2006).
7. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Продолжение курса. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987 (или любое другое издание).

9.4 Справочники, словари, энциклопедии

Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983.

9.5 Программные средства

Для успешного освоения дисциплины студенту необходимо выполнять часть вычислительных домашних заданий с использованием высокоуровневых пакетов программ для математических расчетов, таких как MathCad, MATLAB, Mathematica и пр. Некоторые домашние задания также требуют написание программ на любом языке программирования высокого уровня, например, C/C++.