



Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Программа дисциплины "Алгебра" для направления 01.03.02 образовательной программы «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет Компьютерных наук
Департамент больших данных и информационного поиска

**Рабочая программа дисциплины
АЛГЕБРА**

для образовательной программы «Прикладная математика и информатика»
направления 01.03.02
уровень бакалавр

Разработчик программы:

Аржанцев И.В., доктор физ.-мат. наук, профессор (arjantsev@hse.ru)

Одобрена на заседании департамента больших данных и информационного поиска
«__» _____ 2016г.

Руководитель департамента
В.В.Подольский _____ [подпись]

Утверждена Академическим советом образовательной программы
«__» _____ 2016 г., № протокола _____

Академический руководитель образовательной программы
А.С.Конусин _____ [подпись]



Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Программа дисциплины "Алгебра" для направления 01.03.02 образовательной программы «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и результатам обучения студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину «Алгебра», учебных ассистентов и студентов направления 01.03.01, обучающихся по образовательной программе «Прикладная математика информатика»

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом Государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет – Высшая школа экономики», в отношении которого установлена категория «Национальный исследовательский университет»;
- Образовательной программой 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
- Объединенным учебным планом университета по образовательной программе «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2016г.

2 Цели освоения дисциплины

3 Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Алгебра» — познакомить слушателей с основными структурами современной алгебры. Первые пять лекций посвящены теории групп, последние пять — кольцам и полям. Мы докажем базовые факты об этих структурах и продемонстрируем их возможные приложения. Сдавшие этот курс смогут, среди прочего, перечислить с точностью до изоморфизма все коммутативные группы из 100 элементов, найти сумму кубов корней данного многочлена, доказать, что многочлен от многих переменных однозначно раскладывается на простые множители и объяснить, почему не существует поля из 6 элементов.

4 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные факты о таких алгебраических структурах, как группы, кольца и поля; освоить алгоритмические аспекты современной алгебры.
- Уметь производить базовые вычисления с алгебраическими структурами, применять изученные факты и методы в прикладных задачах.
- Иметь навыки работы с конечными группами и конечными полями, овладеть основными техническими приемами алгебры многочленов и теории абелевых групп.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Общенаучная	ОНК-1	Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-2	Способность перейти от про-	Стандартные (лекцион-



Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
		блемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям	но-семинарские)
Общенаучная	ОНК-3	Способность использовать методы критического анализа, развития научных теорий, опровержения и фальсификации, оценить качество исследований в некоторой предметной области	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-4	Готовность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при работе в какой-либо предметной области	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-5	Готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий аппарат дисциплины	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-6	Способность приобретать новые знания с использованием научной методологии и современных образовательных и информационных технологий	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-7	Способность порождать новые идеи (креативность)	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-1	Способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-2	способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-3	способность в составе научно-исследовательского и производственного коллектива решать задачи профессиональной деятельности в соответствии с профилем подготовки, общаться с экспер-	Стандартные (лекционно-семинарские)



Компетенция	Код по ФГОС/НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
		тами в других предметных областях	
Профессиональные	ПК-4	способность критически оценивать собственную квалификацию и её востребованность, переосмысливать накопленный практический опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-8	способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая разработку математических моделей, алгоритмических и программных решений	Стандартные (лекционно-семинарские)

5 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть знаниями и навыками в объеме программы средней школы по математике и освоить учебные курсы:

- Дискретная математика,
- Математический анализ-1,
- первые три модуля курса «Линейная алгебра и геометрия».

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Математический анализ - 3,
- Дифференциальные уравнения,
- Математические модели в экономике,
- Безопасность и криптография,
- Базы данных,
- Оптимизация,
- Теория вычислений,
- Алгоритмы и сложность,
- выполнение курсовых работ, предусмотренных РУП по направлению 01.03.02.

6 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	



1	Теория групп	57	10	10		37
2	Кольца и поля	57	10	10		37
	Итого:	114	20	20		74

7 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год	Параметры **
		4	
Текущий (неделя)	Контрольная работа	12-ая неделя	Работа состоит из 6 задач, рассчитана на одну пару
	Домашнее задание	4-ая и 8-ая недели	Работа состоит из 10 задач
Итоговый	Экзамен	*	Устный экзамен

7.1 Критерии оценки знаний, навыков

В рамках курса студенты должны выполнить две домашние письменные работы, написать контрольную работу и сдать экзамен. Каждое задание и экзамен оцениваются по 10-балльной шкале. Работы промежуточного и итогового контроля заключаются в решении задач на одну или несколько тем. Проверяется ответ и ход решения. Аудиторная и самостоятельная внеаудиторная работы оцениваться не будут.

7.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Накопленная оценка за текущий контроль формируется из оценок за домашние задания и контрольную работу следующим образом:

$$O_{\text{накопленная}} = 0.3 * O_{\text{д/з 1}} + 0.3 * O_{\text{д/з 2}} + 0.4 * O_{\text{к/р}}$$

Итоговая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$O_{\text{итог}} = 0.5 * O_{\text{накопленная}} + 0.5 * O_{\text{экс}}$$

Все оценки выставляются по 10-балльной системе, способ округления всегда арифметический. При подсчете итоговой оценки накопленная берется без округления.

8 Содержание дисциплины

Лекция 1. Полугруппы и группы: основные определения и примеры. Группы подстановок и группы матриц. Порядок элемента и циклические подгруппы. Смежные классы и теорема Лагранжа. Индекс подгруппы.

Лекция 2. Нормальные подгруппы, факторгруппы и теорема о гомоморфизме. Центр-группы. Прямое произведение групп. Факторизация по сомножителям. Разложение конечной циклической группы.

Лекция 3. Конечно порожденные и свободные абелевы группы. Подгруппы свободных абелевых групп. Теорема о согласованных базисах. Алгоритм приведения целочисленной матрицы к диагональному виду.



Лекция 4. Конечные абелевы группы. Строение конечно порожденных абелевых групп. Решетки и дискретные подгруппы в евклидовом пространстве.

Лекция 5. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Транзитивные и свободные действия. Три действия группы на себе. Теорема Кэли. Классы сопряженности.

Лекция 6. Кольца, алгебры и поля. Идеалы и факторкольца. Теорема о гомоморфизме. Алгебра матриц над полем является центральной простой алгеброй. Делители нуля, обратимые элементы, нильпотенты и идемпотенты.

Лекция 7. Евклидовы кольца, кольца главных идеалов и факториальные кольца. Факториальность кольца многочленов от многих переменных.

Лекция 8. Элементарные симметрические многочлены. Лексикографический порядок. Основная теорема о симметрических многочленах. Теорема Виета. Дискриминант многочлена. Понятие о базисе Грёбнера идеала.

Лекция 9. Примеры полей. Характеристика поля. Расширения полей, алгебраические и трансцендентные элементы. Минимальный многочлен. Конечное расширение и его степень. Присоединение корня многочлена. Поле разложения многочлена: существование и единственность.

Лекция 10. Конечные поля. Простое подполе и порядок конечного поля. Автоморфизм Фробениуса. Теорема существования и единственности для конечных полей. Поле из четырех элементов. Подполя конечного поля. Неприводимые многочлены над конечным полем.

9 Образовательные технологии

В учебном процессе используются следующие образовательные технологии:

№ п/п	Вид занятия	Форма проведения занятий	Цель
1	Лекция	Изложение теоретического материала.	Получение теоретических знаний по предмету.
2	Семинар	Решение задач.	Получение практических навыков в решении задач.
3	Самостоятельная работа студента	Решение задач.	Усовершенствование практических навыков.

10 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

10.1 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

- 1) Докажите, что в каждой конечной полугруппе найдется идемпотент, т. е. такой элемент a , что $a^2 = a$.
- 2) Докажите, что если в группе G выполнено $g^2 = e$ для каждого элемента g , то группа коммутативна.
- 3) Приведите пример счетной коммутативной нециклической группы.
- 4) Приведите пример группы и двух ее элементов порядка 2, произведение которых имеет бесконечный порядок.
- 5) Докажите, что в группе рациональных чисел по сложению нет нетривиальных подгрупп конечного индекса.
- 6) Классифицируйте с точностью до изоморфизма все действия группы порядка 5 на множестве из 9 элементов.



- 7) Приведите пример нетождественного действия группы подстановок S_4 на множестве из 3 элементов.
- 8) Найдите число элементов и число подгрупп данного порядка в данной прямой сумме циклических групп.
- 9) Докажите, что центр конечной p -группы нетривиален.
- 10) Докажите, что группа порядка p^2 коммутативна и приведите пример некоммутативной группы порядка p^3 для любого простого числа p .
- 11) Найдите все обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты
 - a. в кольце вычетов по модулю p ;
 - b. в кольце многочленов с коэффициентами в кольце вычетов по модулю 4.
- 12) Приведите пример уравнения $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами, которое не имеет рациональных решений и имеет ровно три вещественных решения.
- 13) Дан многочлен с целыми коэффициентами, который имеет кратный комплексный корень. Может ли он быть неприводимым над рациональными числами?
- 14) Докажите, что существует многочлен от коэффициентов двух общих многочленов $f(x)$ и $g(x)$, который равен нулю тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень.
- 15) Докажите, что в конечномерной алгебре без делителей нуля все ненулевые элементы обратимы.
- 16) Докажите, что над полем рациональных чисел есть неприводимый многочлен любой заданной степени.
- 17) Найдите сумму элементов конечного поля.
- 18) Найдите все автоморфизмы поля действительных чисел и конечного поля.

11 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

11.1 Базовый учебник

1. Э.Б.Винберг. Курс алгебры. М.: Факториал-Пресс, 2002.
2. Сборник задач по алгебре под редакцией А.И.Кострикина. И.В.Аржанцев, В.А.Артамонов и другие. М.: МЦНМО, 2009

11.2 Основная литература

1. А.И.Кострикин. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Наука, 1994
2. А.И.Кострикин. Введение в алгебру. Основные структуры алгебры. М.: Наука, 2000.

11.3 Дополнительная литература

1. Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. М.: Лань, 2004
2. А.Г.Курош. Курс высшей алгебры. М.: Лань, 2007