Лабораторная работа № 62.2

ИЗУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ НА МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Теоретическое введение

Во многих случаях при многократных измерениях физической величины, проведенных в одних и тех же условиях, наблюдаются элементы случайности. Например, элементы случайности имеют место при стрельбе в мишень, при определении роста случайно выбранного человека, в характере движения молекулы. Предсказать отдельные случайные явления нельзя, так как на них сказывается влияние очень большого числа неподдающихся контролю факторов.

Однако, даже если бы удалось учесть все влияющие на данное явление факторы, то по одному единичному явлению ничего нельзя сказать о характере всей совокупности многих случайных явлений. Так, например, одно наугад выбранное отверстие в мишени ничего не говорит о меткости стрелка и качестве оружия, в то время как картина большого числа выстрелов дает полное четкое представление о точности стрельбы.

Большая совокупность случайных явлений или величин подчиняется статистическим закономерностям. Поэтому случайные явления достаточно полно описываются при помощи математического аппарата теории вероятностей. Статистические законы дают возможность определить вероятность, с которой осуществляется то или иное событие в серии однотипных случайных событий.

Пусть имеется N одинаковых макроскопических систем. Предположим, что какая-то характерная для системы величина x может принимать дискретные значения $x_1, x_2, \dots, x_k$. Осуществим однократное измерение величины x во всех этих системах.

Макроскопической называется система, образованная огромным числом микрочастиц (молекул, атомов, ионов, электронов). Допустим, N_1 измерений дали результат x_1, N_2 измерений – результат x_2, …, N_i измерений – результат x_i ($\sum N_i = N$). Величина $\frac{N_i}{N}$ называется относительной частотой появления результата x_i, $\lim_{N\to\infty}\frac{N_i}{N} = P_i$ называется вероятностью появления результата x_i. Будем в дальнейшем для упрощения

выражение для вероятности обозначать просто $\frac{N_i}{N}$, имея в виду, что осуществляется предельный переход при $N \to \infty$. Поскольку $\sum N_i = N$,

то $\sum p_i = \frac{\sum N_i}{N} = 1$.

Очевидно, вероятность того факта, что величина x будет обнаружена в малом интервале от x до x+dx, зависит от характера самой величины и от ширины выбранного интервала:

$$\frac{dN}{N} = f(x)dx.$$

Здесь $dN -$ число измерений, в которых величина x имела значения в интервале от x до x+dx.

Функция $f(x) = \frac{dN}{N} \cdot \frac{1}{dx}$ называется функцией распределения величины x или плотностью вероятности.

Если величина x может принимать значения в пределах от 0 до ∞, то очевидно,

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1, \qquad (1)$$

так как $\int_0^\infty f(x)dx$ представляет собой вероятность того, что величина x находится в возможных для нее пределах. Условие (1) называется условием нормировки.

Распределение Максвелла

Распределение Максвелла по абсолютному значению скорости молекул

Пусть N – общее число молекул газа, dN – число молекул, обладающих скоростью в интервале от v до v+dv. Очевидно, dN тем больше, чем больше интервал dv, то есть dN ~ dv. Ясно также, что dN зависит и от самой скорости v – в одинаковых по величине интервалах, но при различных абсолютных значениях скорости, число молекул будет различным. Наконец, величина dN должна быть пропорциональна общему числу частиц, то есть

$$dN = N \cdot f(v)dv. \qquad (2)$$

Таким образом, доля частиц $\frac{dN}{N}$, скорости которых лежат в интервале от v до v+dv, зависит как от ширины интервала, так и от значения абсолютной скорости v, около которой берется интервал dv:

$$\frac{dN}{N} = f(v)dv \tag{3}$$

$\frac{dN}{N} = dW$- это вероятность того, что скорость любой молекулы газа находится в интервале от v до v+dv.

$$F(v) = \frac{dN}{N} \cdot \frac{1}{dv} = \frac{dW}{dv} \tag{4}$$

$F(\mathrm{v}) -$ это плотность вероятности определенного значения скорости, то есть вероятность того, что скорость любой молекулы находится в единичном интервале около данного значения скорости v.

Максвелл теоретически получил явный вид функции распределения молекул по абсолютным значениям скоростей. Эта функция имеет вид:

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right), \tag{5}$$

где m - масса молекулы,

k - постоянная Больцмана; $k = \frac{R}{N_A}$,

T - абсолютная температура,

N_A- число Авогадро.

Выражение для $F(v)$ может быть также представлено в виде

$$F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v^2}{a^3} exp\left(-\frac{v^2}{a^2}\right), \tag{6}$$

где параметр $a = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Из (5) видно, что вид функции распределения не зависит от количества частиц и для данного сорта молекул с массой m определяется только температурой T.

График функции распределения Максвелла по абсолютным значениям скоростей для различных температур показан на рис. 1.

Условие нормировки $\int_0^\infty F(v)dv = 1$ дает площадь под кривой, равную 1.

Это приводит к тому, что с увеличением температуры кривая становится более пологой, а максимум сдвигается в сторону высоких скоростей.

Если выбрать по оси абсцисс интервал dv, то заштрихованная площадка показывает отношение $\frac{dN}{N}$, то есть относительное количество частиц, которые обладают скоростью от v до v+dv, или вероятность того, что одна частица обладает скоростью в пределах от v до v+dv.

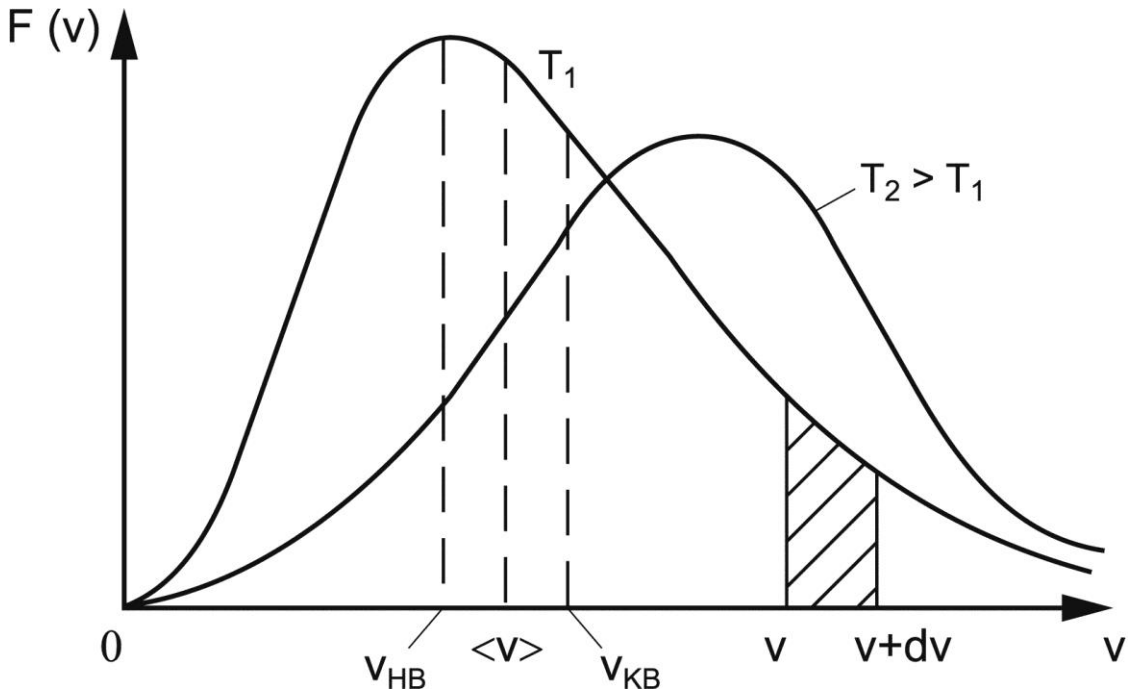

Рис. 1.

Если мысленно перемещать точку по кривой Максвелла, то ордината точки будет давать плотность вероятности обнаружения частицы с данной скоростью v (абсцисса точки). При v = 0 эта вероятность равна 0, с ростом v она растет и становится максимальной в точке графика с абсциссой, равной $v_{\text{вер}}$, то есть вероятнее всего найти в газе при его равновесии молекулу со скоростью $v_{\text{вер}}$. Поэтому $v_{\text{вер}}$ называется наиболее вероятной скоростью. При дальнейшем увеличении скорости ($v \to \infty$) вероятность обнаружения частицы с данной скоростью асимптотически стремится к нулю.

Дифференцируя функцию распределения по скорости и приравнивая производную нулю, найдем наиболее вероятную скорость:

$$v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}\,. \qquad (7)$$

Распределение Максвелла по компонентам скоростей

Пусть dN_{v_x,v_y,v_z} – число молекул, компоненты скоростей которых лежат в пределах от v_x до $v_x + dv_x$, от v_y до $v_y + dv_y$, от v_z до $v_z + dv_z$.

Тогда, очевидно, $dN_{v_x,v_y,v_z} \sim N dv_x dv_y dv_z$ или $dN_{v_x,v_y,v_z} = N f(v) dv_x dv_y dv_z$,

где $f(v) = \frac{dN_{v_x,v_y,v_z}}{N} \cdot \frac{1}{dv_x dv_y dv_z}$ – плотность вероятности определенного значения компонент скорости, то есть вероятность того, компоненты скорости любой молекулы лежат в единичном интервале около соответствующих значений v_x, v_y, v_z. Пространство, в котором по осям откладываются v_x, v_y, v_z, называется пространством скоростей. В этом пространстве тоска показывает положение конца вектора скорости. Следовательно, скорости наших молекул мы можем обозначить точками в пространстве скоростей (рис. 2).

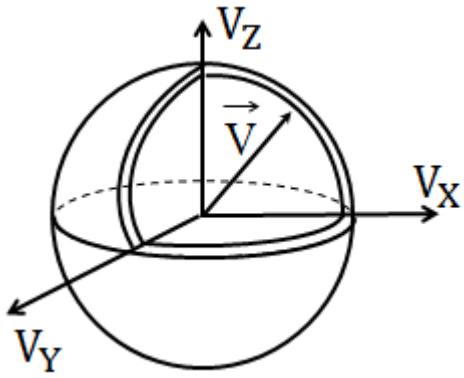

Рис. 2.

Для N молекул будет N точек пространства. Максвеллом было получено выражение для функции $f(v)$:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left[-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}\right], \quad (8)$$

Функция $f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right]$ (9)

представляет собой плотность вероятности определенного значения компоненты скорости v_x. Функция распределения вида (9) носит название закона нормального распределения Гаусса.

Аналогично можно записать выражения для $f(v_y)$, $f(v_z)$.

Функция распределения Максвелла по компоненте скорости имеет вид, изображенный на рис. 3. Более пологая кривая соответствует более высокой температуре.

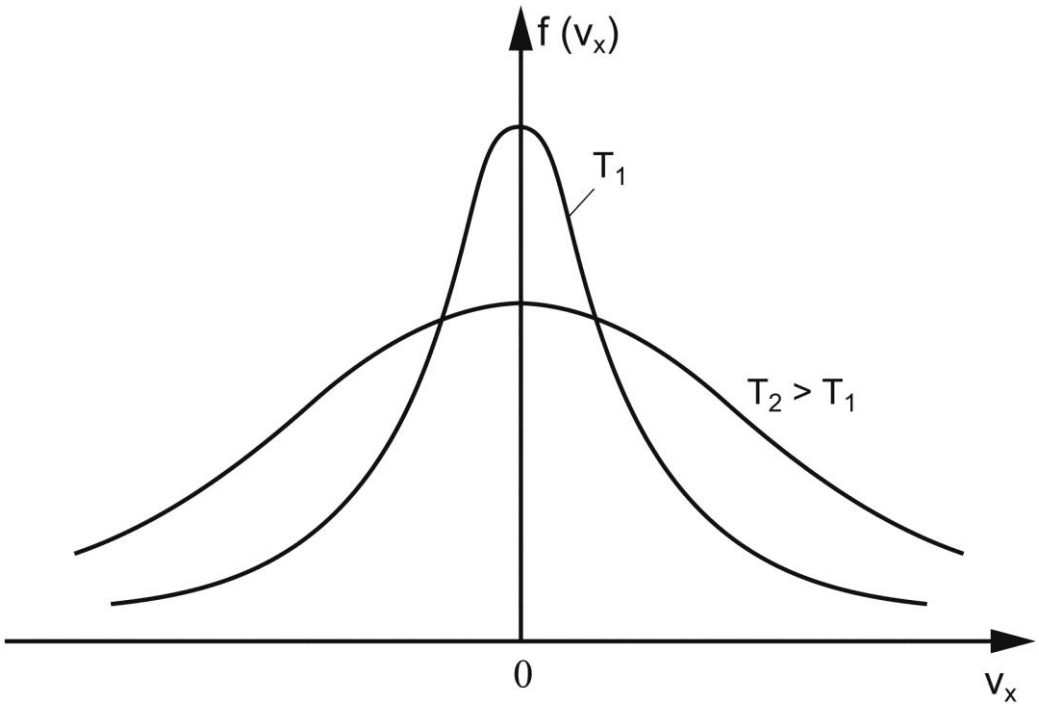

Рис. 3.

Площадь под кривой, исходя из условия нормировки, принимаем равной единице:

$$\int_0^\infty f(v_x)dv_x = 1.$$

Значение средней компоненты скорости $< v_x >$ и симметричность графика соответствуют утверждению, что количество молекул, имеющих компоненту скорости в пределах от v_x до $v_x + dv_x$, в среднем равно количеству молекул с компонентами скоростей от $-v_x$ до $-v_x - dv_x$ при условии:

$$|-v_x| = |v_x|.$$

Физически это означает, что число молекул, движущихся в одном направлении, равно числу молекул, движущихся в противоположном направлении.

<u>Расчет средних величин</u>

Понятие функции распределения в статистической физике является фундаментальным. Зная функцию распределения, можно определить

поведение коллектива как целого, то есть вычислить средние значения любых микроскопических величин ($< v >$, $< v_x >$, $< E >$, $< p >$ и так далее).

Например, средняя скорость

$$< v > = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

Среднеквадратичная скорость

$$< v^2 > = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{m}, \quad v_{\text{кв}} = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

В общем случае среднее значение любой величины $L(x)$, если известна функция распределения $f(x)$, будет иметь вид:

$$< L > = \int_0^\infty L(x) f(x) dx \qquad (10)$$

Содержание работы

В работе приводится экспериментальное исследование функций распределения на механических моделях, воспроизводящих случайные отклонения частиц сыпучего материала (зерна пшена) от некоторого среднего положения. Случайные отклонения возникают за счет большого числа беспорядочных соударений частиц с сетками, поставленными на пути движения потока частиц. Меняя число сеток на пути потока частиц , можно менять число случайных столкновений частиц и проследить изменение формы функции распределения.

Можно показать, что функция распределения частиц при двумерном рассеянии напоминает по форме функцию распределения молекул газа по абсолютному значению скорости.

При одномерном рассеянии распределение частиц по координате описывается нормальным распределением Гаусса.

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНА НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАУССА

Конструкция прибора показана на рисунке 4. Сыпучий материал (зерна пшена) из воронки 1 просыпается через ряд решеток 2. Решетки

представляют собой рамки, на которых на равном расстоянии параллельно натянуты струны. При столкновении частиц со струнами происходит отклонение частиц вправо и влево с равной вероятности. Рассеянные частицы собираются в приемник 3 с узкими ячейками одинаковой ширины $\Delta x = b$.

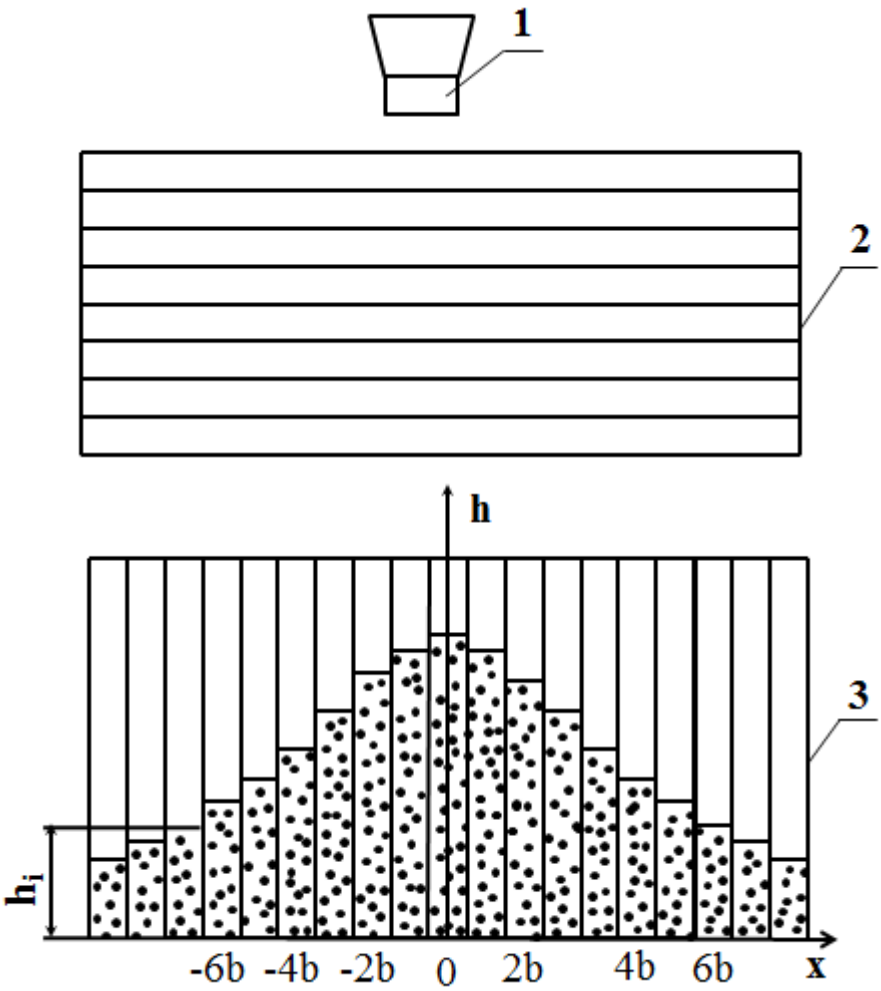

Рис. 4.

По высоте h_i столбиков зерна в ячейках (h_i пропорциональна количеству частиц ΔN_i, попавших в ячейку с номером i) можно судить о характере случайных отклонений от вертикали и найти функцию распределения частиц.

<u>Задание 1</u>. Получение экспериментальной кривой распределения частиц по ячейкам.

В модель закладывается число решеток $\nu = 4$. Воронка тщательно устанавливается так, чтобы середина щели воронки находилась, по возможности, над серединой первой решетки, затем устанавливается приемник частиц.

Зерно с помощью ковша засыпается в воронку, по возможности, равномерным потоком симметрично относительно щели воронки. **Опыт проводят до тех пор, пока центральная ячейка приемника не заполнится почти доверху**.

Измеряют высоты столбиков зерна в ячейках линейкой, результаты заносят в таблицу.

№ ячейки	…	-2	-1	0	1	2	….
Координата, x		-2b	-b	0	b	2b	
h_1							
h_2							
$< h >$							

Сетки поворачиваются вокруг вертикальной оси на 180^0 и повторяют опыт.

Данные двух измерений усредняются и строится график зависимости $h = h(\mathrm{x})$.

<u>Указание</u>. Необходимо тщательно собирать все зерна после каждого опыта из приемника, так как **все измерения, а также все операции в следующем задании должны проводиться при том же количестве частиц**.

<u>Задание 2</u>. Исследование влияния количества сеток ν на форму функции распределения.

Повторить все операции, описанные в задании 1, с количеством сеток $\nu = 12$.

<u>Указание</u>. Для опыта необходимо использовать **то же количество зерна, которое использовалось в первом задании**.

Для сравнения новую кривую распределения целесообразно наносить на тот же график.

Дать объяснение изменению формы функции распределения при увеличении числа сеток. Изменению каких параметров состояния газа соответствует подобные изменения формы кривой распределения молекул по компонентам скорости?

<u>Задание 3</u>. Определение среднего квадратичного отклонения частиц $x_{\text{кв}} = \sqrt{< x^2 >}$ по экспериментальной функции распределения.

Среднее значение квадрата отклонения частиц на основании (10) равно:

$$< x^2 > = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx. \qquad (11)$$

Следовательно,

$$< x^2 > = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 h(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx}.$$

Заменяя интеграл соответствующими суммами и полагая $\Delta r \approx \Delta x = b$, будем иметь

$$< x^2 > = \frac{\sum_i x_i^2 h_i}{\sum_i h_i}, \qquad (12)$$

где суммирование производится по всем ячейкам. Пользуясь экспериментальным графиком или данными таблицы, по формуле (12) находится $< x^2 >$:

Можно показать, что теоретическое значение $< x_{\text{теор}}^2 >$ определяется выражением

$$< x_{\text{теор}}^2 > = \frac{x_e^2}{2}, \qquad (13)$$

где $x_e -$ значение x, при котором $h(x) = \frac{h(0)}{e}$. Полученные экспериментальные значения $< x^2 >$ сравнить с теоретическими, вычисленными по формуле (13) для $\nu = 4$ и $\nu = 12$.

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Каков физический смысл функции распределения?
2. Какова связь вероятности и функции распределения?
3. В чем физический смысл основных положений молекулярно-кинетической теории?
4. Каков физический смысл функции распределения по компонентам скорости?

5. Каков физический смысл функции распределения по абсолютным скоростям?
6. Какова зависимость функции распределения по абсолютным скоростям от температуры?
7. Какова зависимость функции распределения по компонентам скорости от температуры?
8. Как производится вычисление средних величин?
9. В чем смысл механико-молекулярной аналогии?
10. Сравнить функцию распределения Максвелла по компонентам скорости с функцией распределения случайных величин Гаусса.

Расчетное задание

1. Как, пользуясь функцией распределения Максвелла, найти выражение для наивероятнейшей, средней и среднеквадратичной скоростей молекул газа?
2. Найти долю молекул газа, скорости которых отличаются от наиболее вероятной не более, чем на 1%.
3. Найти долю молекул азота, имеющих при нормальных условиях скорости: а) от 400м/с до 410 м/с;
   б) от 400 м/с до 800 м/с.
4. Каких молекул больше, со скоростями $v > v_{\text{вер}}$, или со скоростями $v < v_{\text{вер}}$? Найти отношение числа этих молекул и показать, что оно не зависит от температуры.

Указание. Для выполнения расчетного задания необходимо воспользоваться приложением к данной работе.

Приложение

Значение интеграла $\Phi(u) = \int_u^\infty F(u)du$

u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)
0,000	1,000	0,600	0,869	1,200	0,411	1,800	0,091	2,400	0,009
0,050	1,000	0,650	0,839	1,250	0,373	1,850	0.077	2,450	0,007
0,100	0,999	0,700	0,806	1,300	0,337	1,900	0,065	2,500	0,006
0,150	0,997	0,750	0,771	1,350	0,303	1,950	0,055	2,550	0,005
0,200	0,994	0,800	0,734	1,400	0,270	2,000	0,046	2,600	0,004
0,250	0,989	0,850	0,695	1,450	0,240	2,050	0,038	2,650	0,003
0,300	0,981	0,900	0,655	1,500	0,212	2,100	0,032	2,700	0,002
0,350	0,970	0,950	0,614	1,550	0,187	2,150	0,026	2,750	0,002
0,400	0,956	1,000	0,573	1,600	0,163	2,200	0,022	2,800	0,001
0,450	0,939	1,050	0,531	1,650	0,142	2,250	0,018	2,850	0,001
0,500	0,919	1,100	0,490	1,700	0,123	2,300	0,014	2,900	0,001
0,550	0,895	1,150	0,450	1,750	0,106	2,350	0,012	2,950	0,001

Значение функции распределения Максвелла F(u)

по относительным скоростям u

u	F(u)	u	F (u)	u	F (u)	u	F (u)	u	F (u)
0,000	0,000	0,600	0,567	1,200	0,770	1,800	0,286	2,400	0,041
0,050	0,006	0,650	0,625	1,250	0,739	1,850	0,252	2,450	0,033
0,100	0,022	0,700	0,677	1,300	0,704	1,900	0,220	2,500	0,027
0,150	0,050	0,750	0,723	1,350	0,665	1,950	0,191	2,550	0,022
0,200	0,087	0,800	0,762	1,400	0,623	2,000	0,165	2,600	0,018
0,250	0,133	0,850	0,792	1,450	0,580	2,050	0,142	2,650	0,014
0,300	0,186	0,900	0,813	1,500	0,535	2,100	0,121	2,700	0,011
0,350	0,245	0,950	0,826	1,550	0,491	2,150	0,103	2,750	0,009
0,400	0,308	1,000	0,830	1,600	0,447	2,200	0,086	2,800	0,0007
0,450	0,373	1,050	0,826	1,650	0,404	2,250	0,072	2,850	0,0005
0,500	0,439	1,100	0,814	1,700	0,362	2,300	0,060	2,900	0,0004
0,550	O,504	1,150	0,795	1,750	0,323	2,350	0,050	2,950	0,0003