



Правительство Российской Федерации

**Государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования
«Государственный университет - Высшая школа экономики»**

Факультет Математики

Программа дисциплины Введение в дискретную математику.

для направления 010100.62 "Математика" подготовки бакалавра

Авторы программы: Артамкин И.В., д. ф.-м.н., профессор, artamkin@mail.ru;
Ландо С.К., д. ф.-м. н., профессор, lando@hse.ru

Одобрена на заседании кафедры дискретной математики «__»_____ 2010 г.
Зав. Кафедрой: проф. С.К. Ландо

Рекомендована секцией УМС по математике «__»_____ 2010 г.
Председатель С.К. Ландо

Утверждена УС факультета математики «__»_____ 2010 г.
Ученый секретарь Ю.М. Бурман _____

Москва, 2010

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.



1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра.

Программа разработана в соответствии с:

Стандартом НИУ для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра;

Рабочим учебным планом университета по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, специализации Математика, утвержденным в 2010 г.

2. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Введение в дискретную математику» являются:

- представления об основных методах и результатах дискретной математики;
- знания об основных результатах и алгоритмах комбинаторики, теории чисел, теории графов, теории кодирования и других разделов дискретной математики;
- умения решать различные дискретные задачи средствами комбинаторики и теории графов;
- опыта использования, применения изучаемых методов к исследованию и решению конкретных задач.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Овладеть основными средствами дискретной математики – применение комбинаторики, теории чисел, теории графов, теории кодирования и других разделов дискретной математики.
- Уметь решать задачи средствами комбинаторики и теории графов.

Любая математическая компетенция достигается путем решения задач. На лекциях вводятся основные объекты, разбираются поучительные примеры, доказываются ключевые теоремы. Но этого совершенно недостаточно. Единственный путь к мастерству - самостоятельное решение задач.



В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий дискретной математикой (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость любых математических текстов	Изучение базового курса За счет повышения математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Распознает и воспроизводит имена основных объектов дискретной математики, возникающих при изучении данного раздела Владеет и свободно использует профессиональную геометрическую лексику	Продумывание и повторение услышанного на лекции. Беседы с носителями языка дискретной математики. Компетенция достигается в процессе накопления опыта, общения с преподавателями.
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки только опорных задач по дискретной математики Владеет и использует постановки «многоходовых» задач	Продумывание базовых понятий курса Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит основные моменты базовых доказательств и построений Обосновывает и оценивает логические ходы в произвольных рассуждениях по дискретной математике и конструкциях	Продумывание ключевых моментов лекций Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателями.



4. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Для специализации математика настоящая дисциплина является базовой, относится к профессиональному циклу.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- для усвоения материала 1,2 модуля - требуется владение алгеброй и геометрией в объеме школьной программы;
- для материала третьего модуля требуется курс алгебры 1 и 2 модулей.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении базовых курсов 3, 4 года обучения по программе бакалавриата, направления 010100.62 «Математика».

5. Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов по дисциплине	В том числе аудиторных			Самостоятельная работа
			Всего	Лекции	Семинары	
	3 модуль	87	40	22	18	47
1.	Комбинаторика: выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями; сочетания с повторениями; биномиальные коэффициенты, их свойства; биномиальная теорема; полиномиальная теорема; формула включения и исключения.	16	6	3	3	10
2.	Производящие функции. Вычисления с формальными степенными рядами. Рациональные производящие функции и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.	11	5	3	2	6
3.	Свойства делимости целых чисел. Простые числа. Решето Эратосфена. Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Основная теорема арифметики о разложении целых чисел на простые сомножители. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Некоторые частные случаи теоремы Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии.	11	6	3	3	5



4.	Арифметические функции; целая и дробная часть числа; разложение числа $n!$ на простые множители; суммы, распространенные на делители числа; мультипликативные функции; функция Эйлера и ее свойства; сумма делителей и число делителей; оценки Чебышева для функции числа простых чисел, не превосходящих x .	11	5	3	2	6
5.	Цепные дроби; конечные цепные дроби; подходящие дроби и их свойства; нахождение наибольшего общего делителя с помощью цепных дробей; бесконечные цепные дроби; разложение действительных чисел в цепные дроби; приближение действительных чисел рациональными числами; подходящие дроби как наилучшие приближения; признак иррациональности числа; иррациональность числа « e »; теорема Лагранжа о разложении квадратичных иррациональностей в цепные дроби.	19	9	5	4	10
6.	Числовые сравнения: сравнения и их основные свойства; вычеты и классы вычетов по модулю m ; кольца классов вычетов; полная система вычетов; приведенная система вычетов; теорема Эйлера и Ферма; сравнения первой степени: сравнения с одним неизвестным; равносильные сравнения; решения сравнения; сравнения первой степени; теорема о существовании решений; простейшие приемы решений; решение сравнений с помощью цепных дробей; системы сравнений, их решения; теоремы о решении систем сравнений первой степени; сравнения n -й степени: сравнения n -й степени по простому модулю; теоремы о равносильности сравнений; теорема о числе решений сравнения; теорема Вильсона; сравнения n -ой степени по составному модулю; сведение сравнения по составному модулю к системе сравнений по простому модулю; сравнения второй степени: сведение сравнений второй степени к двучленному сравнению; двучленные сравнения по простому модулю.	19	9	5	4	10



	4 модуль	129	40	18	22	89
7.	Графы: основные понятия; способы представления графов. Изоморфизм, гомеоморфизм и гомотопия графов; основные инварианты графов. Деревья и их свойства. Остовное поддерево. Простейшие алгоритмы теории графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Перечислительные задачи теории графов. Теорема Кэли. Формула Эйлера для плоских графов.	27	8	4	4	19
8.	Циклы и разрезы. Граничный и кограничный оператор. Гомологии и когомологии графа. Двойственность. Циклы и разрезы по модулю два. Базисы циклов и разрезов, связанные с остовным поддеревом. Матрицы циклов и разрезов. Теорема Коши-Бине. Теорема Кирхгофа о числе остовных поддеревьев. Остовные поддерева полного графа и теорема Кэли. Элементы теории матроидов. Понятие матроида. Двойственность. Графические и кографические матроиды. Линейные матроиды. Представимость. Матроид Фано.	28	9	3	6	19
9.	Планарные графы. Теорема Эйлера. Раскраски планарных графов. Проблема четырех красок. Критерии планарности. Теорема Понтрягина-Куратовского. Укладки графов и род графа.	13	6	3	3	7
10.	Потоки в сетях: теорема Форда – Фалкерсона; алгоритм Форда – Фалкерсона. Связность и маршруты на графах. Числа связности графа. Разделяющие множества. Реберная и вершинная теоремы Менгера. Двудольные графы; паросочетания. Совершенное паросочетание. Теорема Холла. Венгерский алгоритм построения совершенного паросочетания. Задача об оптимальном назначении.	26	8	3	5	18
11.	Вложение графа в поверхность. Ленточные графы. Вычисление рода поверхности. Двойственный граф. Примеры. Дискретный оператор Лапласа. Представление классов гомологий гармоническими циклами.	19	5	3	2	14



12.	Производящие функции в комбинаторике и теории графов. Числа Каталана. Явное вычисление производящих функций для различных типов графов.	16	4	2	2	12
	Итого:	216	80	40	40	136



6. Формы контроля

Текущий контроль – решение задач на семинарских занятиях.
Промежуточный контроль: **2** контрольные работы, **1** коллоквиум.
Итоговый контроль: экзамен (4-й модуль), зачет (3-й модуль).

Формула для вычисления итоговой оценки

30% оценки за домашние задания + 30% оценки за контрольную работу + 40% оценки за экзамен.

Темы контрольных работ:

1. Комбинаторика и производящие функции.
2. Теория графов.

7. Базовые учебники

1. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. Перев. с англ.–М.: Мир, 2005.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие для вузов –М.: Физматлит, 2006.
3. Виноградов И.М. Основы теории чисел.– Изд. 11–е, стер.–Спб.:Лань, 2006.
4. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. – Изд. 3–е.– М.: МЦНМО, 2007.
5. Харари Ф. Теория графов.–М.: УРСС, 2003.
6. Вильямс Дж. Дискретная математика и комбинаторика. – Вильямс, 2006.
7. Дональд Кнут, Роналд Грэхем, Орен Паташник. Конкретная математика. Основания информатики.–М.:Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2006.

Дополнительная литература

1. Lando S.K., Zvonkin A.K. Graphs on Surfaces and Their Applications.– Berlin:Springer, 2004.



8. Содержание программы

Тема 1. Комбинаторика.

Выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями; сочетания с повторениями; биномиальные коэффициенты, их свойства; биномиальная теорема; полиномиальная теорема; формула включения и исключения.

Тема 2. Производящие функции.

Вычисления с формальными степенными рядами. Рациональные производящие функции и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.

Тема 3. Свойства делимости целых чисел.

Простые числа. Решето Эратосфена. Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Основная теорема арифметики о разложении целых чисел на простые сомножители. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Некоторые частные случаи теоремы Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии.

Тема 4. Арифметические функции.

Целая и дробная часть числа; разложение числа $n!$ на простые множители; суммы, распространенные на делители числа; мультипликативные функции; функция Эйлера и ее свойства; сумма делителей и число делителей; оценки Чебышева для функции числа простых чисел, не превосходящих x .

Тема 5. Цепные дроби; конечные цепные дроби; подходящие дроби и их свойства; нахождение наибольшего общего делителя с помощью цепных дробей; бесконечные цепные дроби; разложение действительных чисел в цепные дроби; приближение действительных чисел рациональными числами; подходящие дроби как наилучшие приближения; признак иррациональности числа; иррациональность числа « e »; теорема Лагранжа о разложении квадратичных иррациональностей в цепные дроби.

Тема 6. Числовые сравнения.

Сравнения и их основные свойства; вычеты и классы вычетов по модулю m ; кольца классов вычетов; полная система вычетов; приведенная система вычетов; теорема Эйлера и Ферма; сравнения первой степени: сравнения с одним неизвестным; равносильные сравнения; решения сравнения; сравнения первой степени; теорема о существовании решений; простейшие приемы решений; решение сравнений с помощью цепных дробей; системы сравнений, их решения; теоремы о решении систем сравнений первой степени; сравнения n -й степени: сравнения n -й степени по простому модулю; теоремы о равносильности сравнений; теорема о числе решений сравнения; теорема Вильсона; сравнения n -ой степени по составному модулю; сведение сравнения по составному модулю k к системе сравнений по простому модулю; сравнения второй степени: сведение сравнений второй степени к двучленному сравнению; двучленные сравнения по простому модулю.

Тема 7. Графы.

Основные понятия; способы представления графов. Изоморфизм, гомеоморфизм и гомотопия графов; основные инварианты графов. Деревья и их свойства. Остовное поддерево. Простейшие алгоритмы теории графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Перечислительные задачи теории графов. Теорема Кэли. Формула Эйлера для плоских графов.

Тема 8. Циклы и разрезы.

Граничный и кограничный оператор. Гомологии и когомологии графа. Двойственность. Циклы и разрезы по модулю два. Базисы циклов и разрезов, связанные с остовным поддеревом. Матрицы



циклов и разрезов. Теорема Коши-Бине. Теорема Кирхгофа о числе остовных поддеревьев. Остовные поддеревья полного графа и теорема Кэли. Элементы теории матроидов. Понятие матроида. Двойственность. Графические и кографические матроиды. Линейные матроиды. Представимость. Матроид Фано.

Тема 9. Планарные графы.

Теорема Эйлера. Раскраски планарных графов. Проблема четырех красок. Критерии планарности. Теорема Понтрягина-Куратовского. Укладки графов и род графа.

Тема 10. Потoki в сетях.

Теорема Форда – Фалкерсона; алгоритм Форда – Фалкерсона. Связность и маршруты на графах. Числа связности графа. Разделяющие множества. Реберная и вершинная теоремы Менгера. Двудольные графы; паросочетания. Совершенное паросочетание. Теорема Холла. Венгерский алгоритм построения совершенного паросочетания. Задача об оптимальном назначении.

Тема 11. Вложение графа в поверхность.

Ленточные графы. Вычисление рода поверхности. Двойственный граф. Примеры. Дискретный оператор Лапласа. Представление классов гомологий гармоническими циклами.

Тема 12. Производящие функции в комбинаторике и теории графов.

Числа Каталана. Явное вычисление производящих функций для различных типов графов.

9. Образцы заданий по различным формам контроля

Цикл 1. Комбинаторика.

Выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями; сочетания с повторениями; биномиальные коэффициенты, их свойства; биномиальная теорема; полиномиальная теорема; формула включения и исключения.

Цикл 2. Производящие функции.

Вычисления с формальными степенными рядами. Рациональные производящие функции и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.

Цикл 3. Свойства делимости целых чисел.

Простые числа. Решето Эратосфена. Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Основная теорема арифметики о разложении целых чисел на простые сомножители. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Некоторые частные случаи теоремы Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии.

Цикл 4. Арифметические функции.

Целая и дробная часть числа; разложение числа $n!$ на простые множители; суммы, распространенные на делители числа; мультипликативные функции; функция Эйлера и ее свойства; сумма делителей и число делителей; оценки Чебышева для функции числа простых чисел, не превосходящих x .

Цикл 5. Цепные дроби; конечные цепные дроби; подходящие дроби и их свойства; нахождение наибольшего общего делителя с помощью цепных дробей; бесконечные цепные дроби; разложение действительных чисел в цепные дроби; приближение действительных чисел



рациональными числами; подходящие дроби как наилучшие приближения; признак иррациональности числа; иррациональность числа « e »; теорема Лагранжа о разложении квадратичных иррациональностей в цепные дроби.

Цикл 6. Числовые сравнения.

Сравнения и их основные свойства; вычеты и классы вычетов по модулю m ; кольца классов вычетов; полная система вычетов; приведенная система вычетов; теорема Эйлера и Ферма; сравнения первой степени: сравнения с одним неизвестным; равносильные сравнения; решения сравнения; сравнения первой степени; теорема о существовании решений; простейшие приемы решений; решение сравнений с помощью цепных дробей; системы сравнений, их решения; теоремы о решении систем сравнений первой степени; сравнения n -й степени: сравнения n -й степени по простому модулю; теоремы о равносильности сравнений; теорема о числе решений сравнения; теорема Вильсона; сравнения n -ой степени по составному модулю; сведение сравнения по составному модулю к системе сравнений по простому модулю; сравнения второй степени: сведение сравнений второй степени к двучленному сравнению; двучленные сравнения по простому модулю.

Цикл 7. Графы.

Основные понятия; способы представления графов. Изоморфизм, гомеоморфизм и гомотопия графов; основные инварианты графов. Деревья и их свойства. Остовное поддерево. Простейшие алгоритмы теории графов. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Перечислительные задачи теории графов. Теорема Кэли. Формула Эйлера для плоских графов.

Цикл 8. Циклы и разрезы.

Граничный и кограничный оператор. Гомологии и когомологии графа. Двойственность. Циклы и разрезы по модулю два. Базисы циклов и разрезов, связанные с остовным поддеревом. Матрицы циклов и разрезов. Теорема Коши-Бине. Теорема Кирхгофа о числе остовных поддеревьев. Остовные поддерева полного графа и теорема Кэли. Элементы теории матроидов. Понятие матроида. Двойственность. Графические и кографические матроиды. Линейные матроиды. Представимость. Матроид Фано.

Цикл 9. Планарные графы.

Теорема Эйлера. Раскраски планарных графов. Проблема четырех красок. Критерии планарности. Теорема Понтрягина-Куратовского. Укладки графов и род графа.

Цикл 10. Потоки в сетях.

Теорема Форда – Фалкерсона; алгоритм Форда – Фалкерсона. Связность и маршруты на графах. Числа связности графа. Разделяющие множества. Реберная и вершинная теоремы Менгера. Двудольные графы; паросочетания. Совершенное паросочетание. Теорема Холла. Венгерский алгоритм построения совершенного паросочетания. Задача об оптимальном назначении.

Цикл 11. Вложение графа в поверхность.

Ленточные графы. Вычисление рода поверхности. Двойственный граф. Примеры. Дискретный оператор Лапласа. Представление классов гомологий гармоническими циклами.

Цикл 12. Производящие функции в комбинаторике и теории графов.

Числа Каталана. Явное вычисление производящих функций для различных типов графов.