



Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Программа дисциплины Алгебра II  
для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра

## Правительство Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

### ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

#### Программа дисциплины Алгебра II

для направления 010100.62 "Математика" подготовки бакалавра

**Автор программы:** проф. М.В.Финкельберг,  
finklberg@gmail.com

Рекомендована секцией УМС по математике «\_\_»\_\_\_\_\_ 2015\_ г.

Председатель С.М. Хорошкин \_\_\_\_\_

Утверждена УС факультета математики «\_\_»\_\_\_\_\_ 2015\_ г.

Ученый секретарь Ю.М. Бурман \_\_\_\_\_

Москва  
2015



## 1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра.

Программа разработана в соответствии с:

Стандартом НИУ для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра;

Рабочим учебным планом университета по направлению 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра, специализации Математика, утвержденным в 2010 г.

## 2. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» являются:

- формирование и развитие у студентов структурно-алгебраического мышления и умения видеть общие алгебраические конструкции в различных областях математики
- освоение фундаментальных понятий и простейших вычислительных методов современной алгебры

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- освоить язык множеств и отображений
- познакомиться с базисными алгебраическими структурами – симметрическими функциями, производящими функциями, расширениями полей, группами Галуа, идеалами колец целых алгебраических чисел, простыми и полупростыми ассоциативными алгебрами, группами Брауэра, представлениями и характеристиками конечных групп.
- Уметь решать базисные классификационные задачи – описывать базисы кольца симметрических функций, классификацию конечных тел, классификацию уравнений, разрешимых в радикалах, классификацию простых ассоциативных алгебр, классификацию представлений конечных групп.
- освоить простейшие алгебраические вычислительные методы – решение алгебраических уравнений в радикалах и в рядах Пуанкаре, выражение симметрических функций через стандартные базисы, построение правильных многоугольников циркулем и линейкой, вычисление символа Лежандра, вычисление характеров конечных групп

Любая математическая компетенция достигается путем решения задач. На лекциях вводятся основные объекты, разбираются поучительные примеры, доказываются ключевые теоремы. Но этого совершенно недостаточно. Единственный путь к мастерству - самостоятельное решение задач.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:



Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты  Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса  Формируется в процессе активных занятий алгеброй (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях  Оценивает строгость любых алгебраических текстов	Изучение базового курса  За счет повышения математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Распознает и воспроизводит имена основных алгебраических объектов, возникающих при изучении данного раздела  Владеет и свободно использует профессиональную алгебраическую лексику	Продумывание и повторение услышанного на лекции. Беседы с носителями алгебраического языка.  Компетенция достигается в процессе накопления опыта, общения с преподавателями.
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки только опорных алгебраических задач  Владеет и использует постановки «многоходовых» задач	Продумывание базовых понятий курса  Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит основные моменты базовых алгебраических доказательств и построений  Обосновывает и оценивает логические ходы в произвольных алгебраических рассуждениях и конструкциях	Продумывание ключевых моментов лекций  Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателями.



#### **4. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Для специализации математика настоящая дисциплина является базовой, относится к профессиональному циклу.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями: владение математическим анализом, алгеброй, геометрией и топологией в объеме первого курса.

Курс алгебры занимает центральное место в блоке математических дисциплин. Он является основным арсеналом технических средств для всех остальных математических курсов, а те, в свою очередь, доставляют ключевые мотивирующие примеры, необходимые для понимания абстрактных алгебраических конструкций. Круг задач, решаемых настоящим курсом, обусловлен таким двояким взаимодействием с остальными математическими предметами



### 5. Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов по дисциплине	В том числе аудиторных			Самостоятель ная работа
			Всего	Лекции	Семинары	
	<b>1 модуль</b>	<b>83</b>	<b>33</b>	<b>20</b>	<b>13</b>	<b>50</b>
1.	Исчисление формальных степенных рядов	17	7	4	3	10
2.	Числа и многочлены Бернулли	17	7	4	3	10
3.	Ряды Пуизо	16	6	4	2	10
4.	Симметрические функции	16	6	4	2	10
5.	Расширения полей: примеры	17	7	4	3	10
	<b>2 модуль</b>	<b>71</b>	<b>30</b>	<b>17</b>	<b>13</b>	<b>41</b>
6.	Сепарабельные расширения полей	18	8	5	3	10
7.	Теория Галуа	21	9	5	4	12
8.	Решение уравнений в радикалах	21	9	5	4	12
9.	Целые алгебраические числа	11	4	2	2	7
	<b>3 модуль</b>	<b>71</b>	<b>31</b>	<b>16</b>	<b>15</b>	<b>40</b>
10.	Группа классов идеалов	13	7	3	3	6
11.	Основная теорема арифметики	13	5	3	2	6
12.	Квадратичный закон взаимности	12	4	2	2	6
13.	Тензорное произведение	13	5	2	3	6
14.	Тензорная алгебра	14	6	3	3	8
15.	Группа Брауэра	13	5	3	2	8
	<b>4 модуль</b>	<b>81</b>	<b>26</b>	<b>19</b>	<b>7</b>	<b>55</b>
16.	Групповая алгебра конечной группы	10	4	2	2	10
17.	Характеры представлений конечных групп	32	11	8	3	22
18.	Примеры представлений конечных групп	31	11	9	2	23
	<b>Итого:</b>	<b>306</b>	<b>120</b>	<b>72</b>	<b>48</b>	<b>186</b>



## 6. Базовые учебники

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. Изд. 3-е, перераб. и доп.–М.: Факториал Пресс, 2002.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.–Изд. 7-е.–М.: Университет, 2007.
3. Городенцев А.Л. Лекции по линейной алгебре. Второй курс.–М.: НМУ МК, 1995
4. Городенцев А.Л. Лекции по алгебре. Второй курс.–М.: НМУ МК, 1993
5. Сборник задач по алгебре/Под ред. А.И.Кострикина. – М.: Физматлит. 2001.
6. Ленг С. Алгебра – М.:Мир, 1968.
7. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре –11-е изд., стер.–Спб.: Лань, 2008.
9. Рудаков А.Н. Лекции по алгебре. Второй курс.–М.: НМУ МК, 1993.

## Дополнительная литература

10. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра – Пер. с нем.–Спб.: Лань, 2004.
11. Борович З. И., Шафаревич И.Р. Теория чисел.–3-е изд.–М.:Наука, 1985.
12. Вейль Г. Алгебраическая теория чисел.–М.:УРСС, 2003
13. Кострикин А.И. Введение в алгебру.–В 3-х частях.–Изд. 2-е, испр.–М.: Физматлит, 2001.
14. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия.–3-е изд., стер.–Спб.: Лань, 2005.
15. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры – М.: Наука, 1996.
16. Прасолов В.В. задачи и теоремы линейной алгебры. – М.: МЦНМО, 2015.



## 7. Формы контроля

Текущий контроль - решение задач на семинарских занятиях.

Промежуточный контроль - 3 коллоквиума, 4 контрольные работы по темам:

- 1) Вычисления с формальными степенными рядами и рядами Пуансо.
- 2) Вычисления с симметрическими многочленами.
- 3) Построения циркулем и линейкой.
- 4) Решение алгебраических уравнений в радикалах.
- 5) Вычисление символа Лежандра.
- 6) Разложение идеалов в произведение простых.
- 7) Тензорные произведения конечнопорожденных модулей.
- 8) Вычисления с характеристиками симметрических групп.
- 9) Вычисления с характеристиками конечных групп Гейзенберга.

Итоговый контроль - 1 письменный зачёт (3-й модуль) и 2 письменных экзамена (1-й и 4-й модули).

### Формула для вычисления итоговой оценки:

Если выполнено  $D\%$  домашних заданий,  $K\%$  заданий предлагавшихся на контрольных работах и  $E\%$  заданий, предлагавшихся на зачётах и экзаменах (в процентах от общего количества всех предлагавшихся задач), то итоговая оценка (по десятибалльной шкале) равна

$$10 \min(225, D+K+E) / 225$$

Таким образом для получения отметки 10 достаточно набрать сумму  $D+K+E=225$  (что примерно соответствует выполнению  $\frac{3}{4}$  заданий каждого из видов).



## 8. Содержание программы

### Тема 1. Исчисление формальных степенных рядов.

Экспонента и логарифм являются взаимно обратными изоморфизмами между аддитивной группой рядов без свободного члена и мультипликативной группой рядов с единичным свободным членом. Бином с произвольным показателем. Представление элементарных функций формальными рядами.

### Тема 2. Числа и многочлены Бернулли.

Обращение разностного оператора на пространстве многочленов, ряд Тода, числа и многочлены Бернулли. Формула Эйлера-Маклорена.

### Тема 3. Ряды Пуизо.

Многоугольник Ньютона. Разложение корня многочлена в ряд Пуизо, алгебраическая замкнутость поля формальных дробно степенных рядов.

### Тема 4. Симметрические функции.

Стандартные базисы пространства симметрических многочленов, их производящие функции и переходы между ними. Многочлены Шура. Результант и дискриминант для многочленов от одной переменной. Теорема Безу. Доказательство Плюккера теоремы Паскаля о вписанном шестиугольнике.

### Тема 5. Расширения полей: примеры.

Присоединение корня многочлена. Классификация конечных полей. Автоморфизм Фробениуса. Лемма Гаусса. Критерий неприводимости Эйзенштейна. Круговые поля и многочлены. Автоморфизмы круговых полей. Невозможность построения правильных многогранников циркулем и линейкой.

### Тема 6. Сепарабельные расширения полей.

Сепарабельность. Теорема о примитивном элементе. Норма и след. Нормальные расширения. Поля разложения.

### Тема 7. Теория Галуа.

Основная теорема теории Галуа. Группы Галуа конечных полей. Группы Галуа круговых полей. Группы Галуа куммеровых расширений. Группы Галуа артиновых расширений. Построение правильного семнадцатиугольника циркулем и линейкой.

### Тема 8. Решение уравнений в радикалах.





Разрешимые и неразрешимые группы. Неразрешимость симметрических групп. Резольвента Лагранжа. Лемма Гильберта 90. Классификация циклических расширений. Решение в радикалах уравнений второй, третьей и четвертой степени. Неразрешимые в радикалах уравнения пятой степени.

#### **Тема 9. Целые алгебраические числа.**

Целые элементы и конечные расширения. Целозамкнутость. Дискриминант кольца целых алгебраических чисел. Дискриминант идеала. Свободность идеалов в расширении кольца целых алгебраических чисел.

#### **Тема 10. Группа классов идеалов.**

Максимальность простых идеалов в кольцах целых алгебраических чисел. Произведение идеалов. Главные идеалы. Примеры неглавных идеалов. Дробные идеалы. Группа классов идеалов. Теорема Гурвица. Конечность числа классов.

#### **Тема 11. Основная теорема арифметики.**

Разложение идеалов на простые множители. Китайская теорема об остатках. Ветвление и степень идеала. Сопряженные идеалы в расширениях Галуа.

#### **Тема 12. Квадратичный закон взаимности.**

Поведение идеалов в квадратичных полях. Поведение идеалов в круговых полях. Доказательство квадратичного закона взаимности Гаусса.

#### **Тема 13. Тензорное произведение.**

Билинейные формы. Двойственные пространства. Полилинейные формы. Представимые функторы и универсальные объекты. Эндоморфизмы векторного пространства как тензорное произведение пространства на двойственное. Разложимые тензоры.

#### **Тема 14. Тензорная алгебра.**

Тензорная алгебра векторного пространства. Внешняя и симметрическая алгебры. Функторы Юнга. Комплексы Кошуля и Де Рама. Тензорное произведение алгебр. Расширение и сужение скаляров.

#### **Тема 15. Группа Брауэра.**

Полупростые и простые алгебры. Тела и матричные алгебры. Обобщенные кватернионы. Тензорное произведение центральных простых алгебр. Теорема плотности Джекобсона. Теорема Бернсайда. Теорема Веддерберна. Классификация простых алгебр. Классификация конечных тел. Группа Брауэра. Вычисление группы Брауэра поля вещественных чисел.

#### **Тема 16. Групповая алгебра конечной группы.**



Полупростота групповой алгебры. Неприводимые представления. Тензорное произведение представлений. Кольцо Гротендика.

### **Тема 17. Характеры представлений конечных групп.**

Лемма Шура. Соотношения ортогональности для характеров и для матричных элементов. Разложение регулярного представления. Число неприводимых представлений и их размерности. Разложение представлений на изотипические компоненты. Индуцированные представления и их характеры. Теорема Брауэра. Теорема Артина.

### **Тема 18. Примеры представлений конечных групп.**

Представления симметрической группы. Представления группы Гейзенберга. Представления группы верхнетреугольных матриц два на два над конечным полем. Представления группы симметрий правильного многоугольника.



## 9. Образцы заданий по различным формам контроля

**Листок 1. Формальные ряды.** Это сводка простейших формальных рядов, возникающих при разложении важнейших функций, а также как производящие функции важнейших (рекуррентных) последовательностей, таких как числа Фибоначчи и числа разбиений. Сюда же относятся производящие функции для чисел и многочленов Бернулли и техника суммирования степеней натуральных чисел.

**Листок 2. Метод Ньютона.** Техника отыскания корня алгебраического уравнения на формальные дробно-степенные ряды. Модификация метода в случае основного поля конечной характеристики.

**Листок 3. Элементарные симметрические функции.** Техника вычисления различных симметрических функций от корней многочлена. Вычисление результатов и дискриминантов.

**Листок 4. Функции Шура.** Техника вычислений с мономиальными, полными, степенными симметрическими функциями и функциями Шура. Детерминантные тождества и тождества Коши.

**Листок 5. Неприводимые многочлены.** Техника проверки неприводимости многочленов над различными полями.

**Листок 6. Минимальные многочлены.** Техника вычислений минимальных многочленов алгебраических чисел. Вычисление билинейных форм следа и дискриминантов. Проверка линейной независимости алгебраических чисел.

**Листок 7. Группы Галуа.** Техника вычислений групп Галуа расширений полей. Расширения небольшой степени, расширения полей рациональных функций и полей формальных рядов, артиновы и куммеровы расширения.

**Листок 8. Формулы Кардано и Феррари.** Техника решения в радикалах уравнений третьей и четвертой степени.

**Листок 9. Кольца целых квадратичных полей.** Техника отыскания целозамкнутых колец алгебраических чисел и проверки однозначности разложения на простые множители. Примеры евклидовых и неевклидовых колец.

**Листок 10. Идеалы.** Техника вычислений дискриминантов идеалов. Элементарные свойства идеалов колец целых полей алгебраических чисел.

**Листок 11. Геометрия чисел.** Техника вычисления группы классов идеалов. Норма идеала. Обобщения теоремы Эйлера, Вильсона и малой теоремы Ферма.

**Листок 12. Кольца целых круговых полей.** Техника вычисления группы единиц полей деления круга. Вычисление степеней и индексов ветвления простых идеалов.

**Листок 13. Алгебры Клиффорда.** Техника работы с полупростыми ассоциативными алгебрами. Периодичность вещественных алгебр Клиффорда.



**Листок 14.** *Обобщенные кватернионы.* Техника построения центральных простых алгебр. Классификация тел кватернионов над  $p$ -адическими полями и полем рациональных чисел.

**Листок 15.** *Проекторы Юнга.* Техника работы с полиномиальными функторами. Классификация полиномиальных функторов. Классификация идемпотентов групповой алгебры симметрической группы.

**Листок 16.** *Характеры симметрических групп и функции Шура.* Отработка техники вычисления характеров неприводимых представлений симметрических групп. Установление их связи с функциями Шура, освоенными в первом модуле.

**Листок 17.** *Характеры групп  $GL(2)$  над конечными полями.* Отработка техники вычисления характеров неприводимых представлений конечных групп Ли типа  $GL(2)$ . Основная и дискретная серии.

**Листок 18.** *Конечные подгруппы  $SL(2)$ .* Классификация конечных подгрупп комплексной группы  $SL(2)$ . Классификация их представлений. Вычисление тензорных произведений представлений.