



Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет Математики

Программа дисциплины

«Вычислимость и логика»

для направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра
для направления 01.04.01 «Математика» подготовки магистра

Автор программы: Шехтман В.Б., д.ф.-м.н., vshehtman@gmail.com

Рекомендована секцией УМС по математике «__»_____ 2015 г.

Председатель С.М. Хорошкин _____

Утверждена УС факультета математики «__»_____ 2015 г.

Ученый секретарь Ю.М. Бурман _____

Москва, 2015

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра, направления 01.03.01 «Математика» подготовки магистра

Программа разработана в соответствии с:

- ОС НИУ ВШЭ;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра 01.04.01 «Математика» подготовки магистра, специализации Математика, утвержденным в 2014 г

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Вычислимость и логика» являются:

- Формирование у слушателей ясного представления о базисных понятиях и основных методах математической логики;
- Знакомство с аксиоматическим методом в математике и элементами теории доказательств
- Изучение основных законов классической логики первого порядка. Приведение формул к предваренной нормальной форме и сколемизация.
- Изучение основных понятий и конструкций теории моделей: элементарная эквивалентность, элементарные вложения, определимость, категоричность, ультрапроизведения.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Получить общее представление о предмете «Вычислимость и логика», изучить базисные понятия и основные методы;
- Освоить применение теоретико-модельных методов для изучения свойств аксиоматических теорий.
- Ознакомиться с применением теории моделей в других разделах математики, в частности, в построении нестандартного анализа;
- Быть готовым использовать основные принципы и методы математической логики в последующей профессиональной деятельности в качестве научных сотрудников, преподавателей вузов.



В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость и корректность научных текстов математической логики	Изучение базового курса За счет повышения обще-физической и математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Владеет профессиональной лексикой в области математической логики Распознает и воспроизводит названия основных математических структур, возникающих при изучении данной дисциплины, умеет корректно формулировать утверждения и их доказательства	Продумывание и повторение услышанного на семинарах и лекциях. Беседы с преподавателями во время консультаций. Компетенция достигается в процессе накопления опыта работы по данной теме и общения с преподавателями.
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки проблем Адекватно оценивает корректность использования тех или иных математических методов, применяемых при формулировке и решении задач	Продумывание базовых понятий курса Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит ключевые идеи, методы и конструкции математической логики Обосновывает и оценивает мотивировки и логические ходы доказательств основных результатов математической логики	Продумывание ключевых моментов лекций Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателем

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественно научных дисциплин и блоку дисциплин, обеспечивающих подготовку бакалавра и магистра направления подготовки «Математика»



Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Логика и алгоритмы (1-2 модули 1 года бакалавриата);
- базовый курс алгебры (1-2 модули 1 года бакалавриата);
- базовый курс математического анализа (1-2 модули 1 года бакалавриата)
- базовый курс дискретной математики (2-3 модули 1 года бакалавриата)

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- свободное использование алгебры высказываний
- свободное владение основными понятиями теории множеств

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Алгебра;
- Топология;
- Математический анализ;
- Геометрия;
- Теория чисел

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Классическое исчисление высказываний		2	4		6
2	Классическое исчисление предикатов		4	5		8
3	Теорема Гёделя о полноте и теорема компактности; полные и категоричные теории		4	8		14
4	Теорема Левенгейма-Сколема и сколемовские функции; нормальные формы		3	4		8
5	Игры Эренфойхта. Элементарная эквивалентность и элементарные расширения		4	8		16
6	Ультрапроизведения		3	5		8
	Итого:	64	20	34		60

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля					Параметры **
		1	2	3	4	



Текущий (неделя)	Решение домашнего задания	1	1	1	1	Письменное задание, выдаваемое студентам на дом. Срок сдачи задания – от 7 до 14 дней (в зависимости от его объема). Срок проверки заданий – в течение недели со дня сдачи.
Промежуточный	Экзамен				1	Письменная работа + беседа с преподавателем (всего 1,5-2 часа)

3 письменных домашних задания
1 контрольная работа

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Основная форма текущего контроля – решение задач из домашних заданий (5-7 задач по каждой теме). Задачи подбираются так, чтобы их решение потребовало от студента свободного владения основными понятиями и умения пользоваться техническими (вычислительными) приемами, которые изучаются в соответствующем разделе курса. Часть задач повышенной сложности носят исследовательский характер и предполагают самостоятельное изучение студентами материала, не излагавшегося на лекциях. Обсуждение подходов к решению этих задач происходит на семинарах и во время консультаций. Решение некоторых (но не обязательно всех) задач повышенной сложности является необходимым условием получения отличной оценки за домашнее задание (8-10 баллов).

Экзамен (зачет) включает в себя письменную подготовку, состоящую из двух достаточно сложных задач, решение которых требует от студента владения как понятийным, так и техническим аппаратом по изучавшимся в течение модуля темам, а также из одного - двух теоретических вопросов. Студент в очной беседе с преподавателем излагает результаты своей письменной работы и, при необходимости, отвечает на 1-2 дополнительных вопроса. Время, отводимое на беседу: $\frac{1}{2}$ - 1 час во время зачета, и $\frac{1}{2}$ - $1\frac{1}{2}$ часа во время экзамена.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Промежуточная оценка за первый модуль $O_{\text{промежуточная 1}}$ и накопленная оценка за 2 модуль $O_{\text{накопленная 2}}$ рассчитываются аналогично:

$$O_{\text{промежуточная 1}} (O_{\text{накопленная 2}}) = 0.5 * O_{\text{текущий}} + 0.5 * O_{\text{сам.работа}},$$

где $O_{\text{текущий}}$ и $O_{\text{сам.работа}}$ --- оценки текущего контроля и самостоятельной работы студентов в соответствующих модулях.

Здесь оценка текущего контроля $O_{\text{текущий}}$ рассчитывается как взвешенная сумма трех форм текущего контроля, предусмотренных в РУП

$$O_{\text{текущий}} = 0.3 * O_{\text{д/з}} + 0.2 * O_{\text{к/р}} + 0.5 * O_{\text{кол/зачет}},$$

Оценки за домашнее задание $O_{\text{д/з}}$, контрольную работу $O_{\text{к/р}}$, и коллоквиум/зачет $O_{\text{кол/зачет}}$ выставляются по 10-балльной шкале. Способ округления накопленной оценки текущего контроля: в пользу студента.

Студент, получивший низкие оценки текущего контроля, имеет возможность их однократной пересдачи.



Самостоятельная работа студентов, а именно: изучение по поручению преподавателя дополнительных материалов, подготовка на их основе сообщений и выступление с ними на семинарах, а также разбор у доски задач повышенной сложности на семинарских занятиях --- оценивается по 10-бальной шкале оценкой $O_{сам. работа}$. Оценки за самостоятельную работу студента преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка - $O_{сам. работа}$ окончательно определяется перед промежуточным (итоговым) контролем.

Накопленная итоговая оценка за весь период изучения дисциплины определяется как среднее арифметическое оценок за 1 и 2 модули:

$$O_{накопленная\ итоговая} = 0.5 \cdot (O_{промежут\ 1} + O_{накопленная\ 2})$$

Результирующая итоговая оценка за дисциплину учитывает также оценку за экзамен $O_{итог. контроль}$, выставляемую по 10-бальной шкале, и определяется по формуле

$$O_{результатирующая\ итог} = 0,4 \cdot O_{накопленная\ итоговая} + 0,6 \cdot O_{итог. контроль}$$

Способ округления накопленной и результирующей итоговых оценок: в пользу студента.

На экзамене(зачете) студент может получить дополнительный вопрос (дополнительную задачу), ответ на который оценивается в 1 балл.

Оценка за итоговый контроль - **блокирующая**, при неудовлетворительной итоговой оценке она равна результирующей.

В диплом ставится результирующая итоговая оценка по учебной дисциплине.

7 Образовательные технологии

На лекции обсуждаются ключевые понятия и технические выкладки разбираемой темы, даются необходимые определения, разбираются поучительные примеры. Студентам на дом даются задачи для самостоятельного разбора, содержащие как упражнения для усвоения пройденного материала, так и нестандартные задачи, позволяющие проверить уровень общего понимания предмета и требующие изучения дополнительного материала. Некоторые задачи предваряют (продолжают) тематику лекций. Студент сдает задачи как в виде письменных домашних работ, так и в виде устной беседы с преподавателем.

8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

8.1 Тематика заданий текущего контроля

Примерный список задач по темам “Компактность, полнота, элементарная эквивалентность”.



Докажите, что теория T полна, если и только если $T = Th(M)$ для некоторой модели M .



Докажите, что аддитивные группы Q и Z не элементарно эквивалентны.



Докажите, что теория полей нулевой характеристики неполна.



Постройте формулу в сигнатуре $\{=\}$, имеющую спектр $\{2,3\} * \{n \mid n > 4\}$.



Существует ли формула, спектр которой есть множество всех четных чисел?



Постройте неполную теорию, имеющую ровно 2 полных расширения.

8.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примерный перечень вопросов к зачету.



1. Докажите счетную категоричность элементарной теории вещественного отрезка $[0,1]$ с обычным порядком.
2. Докажите теорему о равномерной непрерывности числовой функции, непрерывной на отрезке, с помощью нестандартного анализа.
3. Докажите, что теория полей нулевой характеристики в сигнатуре колец не является конечно аксиоматизируемой.
4. Докажите, что не существует теории первого порядка, моделями которой являются в точности все циклические группы.
5. Докажите полноту элементарной теории бесконечного множества в сигнатуре $\{=\}$.

9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

9.1 Базовые учебники

1. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: КомКнига, 2006.
2. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
3. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.
4. Крупский В.Н., Плиско В.Е. Математическая логика и теория алгоритмов. М.: Академия, 2013.

9.2 Основная литература

Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. М: МЦНМО, 2012. <http://www.mccme.ru/free-books/>

9.3 Дополнительная литература

1. Mendelson E. Introduction to mathematical logic. 4th edition. Chapman&Hall, 1997.
2. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
3. Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.
4. Кейслер Дж., Чэн Ч.. Теория моделей. М., Мир, 1977.
5. Rautenberg W. A concise introduction to mathematical logic. Springer, 2006.

9.4 Справочники, словари, энциклопедии

Справочная книга по математической логике под. ред. Дж. Барвайса. Т. 1. Теория моделей. М., Наука, 1982.

9.5 Программные средства

Специальные программные средства не предусмотрены.

9.6 Дистанционная поддержка дисциплины

Специальные дистанционные ресурсы не предусмотрены. Однако должна быть обеспечена возможность дистанционных консультаций по электронной почте и-или через skype.

10 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения семинаров не используется специальное оборудование, кроме, возможно, компьютерного проектора и системы видеозаписи учебных занятий.