Введение в топологию, 2016/17 учебный год
Листок 1
Срок сдачи — до начала сессионной недели 2016 года

1. Пусть X — хаусдорфово пространство. Всегда ли верно, что $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ для любых $A, B \subset X$ (черта означает замыкание)?

2. Докажите, что произведение двух метризуемых пространств также метризуемо.

3. Пусть $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; введем топологию на X следующим образом: подмножество $U \subset X$ назовем открытым, если оно либо не содержит ∞, либо содержит подмножество вида $\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant N\} \cup \{\infty\}$. Пусть теперь Y — другое топологическое пространство и $f \colon \mathbb{N} \to Y$ — отображение. Докажите, что последовательность $\{f(n)\}$ имеет предел в Y тогда и только тогда, когда f продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} \colon X \to Y$.

4. Пусть X — хаусдорфово пространство, и пусть $K_1, K_2 \subset X$ — его компактные подмножества. Докажите, что если $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $U_1 \supset K_1$, $U_2 \supset K_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

5. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, и пусть $Y \subset X$. Покажите, что функция

$$f_Y \colon x \mapsto \inf_{y \in Y} \rho(x, y)$$

непрерывна на X.

6. Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства, $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Покажите, что мощность подмножества $\overline{f(X)} \subset Y$ не превосходит мощности множества $2^{2^{\mathcal{U}}}$, где $\mathcal{U} \subset 2^X$ — семейство всех отвкрытых подмножеств в X.