Введение в топологию 2016/17
Задачи для семинара, список 1

1. Перечислите все топологии на множестве из двух элементов.

2. Покажите, что всевозможные множества вида $(a; +\infty)$ и $(-\infty; a)$ образуют предбазу стандартной топологии на $\mathbb{R}$. Что будет, если ограничиться только рациональными a?

3. Покажите, что всевозможные шары с рациональным радиусом и центром в точке, все координаты которой рациональны, образуют базу стандартной топологии на $\mathbb{R}^n$.

4. Приведите пример непрерывной биекции топологических пространств, не являющейся гомеоморфизмом. Чтоб не было скучно, оба пространства должны быть хаусдорфовыми.

5. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Докажите, что если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

6. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Для любых $x, y \in X$ $\rho'(x, y) = \min(\rho(x, y), 1)$. Покажите, что ρ' — метрика и что тождественное отображение является гомеоморфизмом между (X, ρ) и (X, ρ').

7. Подмножество

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X \colon x \in X\}$$

называется диагональю в X. Покажите, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ замкнута в $X \times X$.

8. Пусть $f, g \colon X \to Y$ — непрерывнные отображения. Предположим, что f и g совпадают на подмножестве $A \subset X$.

(а) Покажите, что если Y хаусдорфово, то f и g совпадают на $\overline{A}$.

(б) Верно ли это утверждение, если не предполагаьть Y хаусдорфовым?

9. Покажите, что каждое дискретное пространство метризуемо.

10. Покажите, что открытый шар в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен всему $\mathbb{R}^n$.

11. Замкнутым шаром (с центром a и радиусом r) в метрическом пространстве (X, ρ) называется множество вида $\{x \colon \rho(a, x) \leqslant r\}$. Покажите, что замкнутые шары являются замкнутыми множествами.