# Введение в топологию 2016/17
## Задачи для семинара, список 2

**12.** (а) Пусть $X$ — произвольное топологическое пространство, $K$ — компактное пространство и $\pi\colon X \times K \to X$ — проекция на первый множитель (т. е. $\pi\colon (x, y) \mapsto x$). Докажите, что отображение $\pi$ переводит замкнутые множества в замкнутые множества (т. е. если $Z \subset X \times K$ замкнуто, то $\pi(Z) \subset X$ замкнуто).

(б) Покажите на примере, что утверждение из пункта (а) неверно, если не предполагать $K$ компактным. Пространства в вашем примере должны быть хаусдорфовыми.

Отображение топологических просрранств, переводящие замкнутые множества в замкнутые, называется *замкнутым*.

**13.** Пусть $K$ — компактное пространство, $X$ — хаусдорфово пространство. Покажите, что всякое непрерывное отображение из $K$ в $X$ замкнуто.

**14.** Приведите пример замкнутого, но не непрерывного отображения хаусдорфовых пространств.

Отображение топологических пространств, переводящее открытые множества в открытые, называется *открытым*.

**15.** Приведите пример открытого, но не непрерывного отображения, а также непрерывного, но не открытого отображения. Все пространства в ваших примерах должны быть хаусдорфовыми.

**16.** Пусть $X$ — топологическое пространство. Подмножество $Y \subset X$ называется *локально замкнутым*, если для всякой точки $y \in Y$ существует такая окрестность $U \ni y$, $U \subset X$, что $U \cap Y$ замкнуто в $U$ (в индуцированной топологии). Покажите, что следующие условия равносильны.

(1) $Y \subset X$ локально замкнуто.

(2) $Y$ — разность двух замкнутых множеств.

(3) $Y$ — разность двух открытых множеств.

(4) $Y$ — открытое подмножество своего замыкания $\overline{Y}$ (в индуцированной топологии).

**17.** Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ хаусдорфовых топологических пространств называется *собственным*, если для всякого компактного подмножества $R \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(K) \subset X$ также компактен.

(а) Покажите, что все слои собственного отображения компактны.

(б) Приведите пример такого непрерывного отображения хаусорфовых пространств, что все его слои компактны, но собственным оно не является.