

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ 2016/17
ЗАДАЧИ ДЛЯ СЕМИНАРА, СПИСОК 3

18. Введем на \mathbb{R} топологию, в которой замкнутыми множествами являются \emptyset , \mathbb{R} и все конечные множества. Является ли \mathbb{R} в этой топологии хаусдорфовым? Компактным?

19. (а) Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$ — связное подмножество. Покажите, что его замыкание \bar{Y} тоже связно.

(б) Верно ли аналогичное утверждение, если слова «связное» заменить на «линейно связное»? (В этом пункте считайте X хаусдорфовым.)

20. Докажите, что отрезок $[0; 1]$ и интервал $(0; 1)$ не гомеоморфны (топология здесь и далее индуцирована со стандартной топологии на \mathbb{R} или \mathbb{R}^n , если не оговорено обратное).

21. Докажите, что интервал $(0; 1)$ и интервал $[0; 1)$ не гомеоморфны. (*Указание.* Попробуйте выкинуть одну точку.)

22. Пусть X — множество всех иррациональных чисел, Y — множество всех положительных иррациональных чисел. Наделим X и Y топологиями, индуцированными со стандартной топологии на \mathbb{R} . Докажите, что X и Y гомеоморфны.

23. Докажите, что отрезок и окружность не гомеоморфны.

24. Положим

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$$

(n -мерная сфера). Докажите, что окружность S^1 негомеоморфна никакой n -мерной сфере при $n > 1$.