Введение в топологию 2016/17
Задачи для семинара, список 4

Будем называть пространсвто *секвенциально компактным*, если в нем из всякой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

25. Пусть X — секвенциально компактное пространство, и пусть $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n \subset \ldots$ — возрастающая последовательность открытых подмножеств, для которой $\bigcup U_i = X$. Докажите, что $U_j = X$ для некоторого j.

26. Докажите, что из всякого счетного покрытия секвенциально компактного пространства пространства можно выбрать конечное подпокрытие.

27. Докажите, что секвенциально компактное пространство со счетной базой компактно.

Для каждой из следующих пар пространств выясните, гомеоморфны ли они.

28*. $(a;b) \cap \mathbb{Q}$ и $(c;d) \cap \mathbb{Q}$ ($a < b$, $c < d$, все числа a, b, c и d иррациональны).

29. $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, \}$, $Y = X \cup \{3\} \cup \{3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

30. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$; введем на X евклидову метрику. Докажите, что X с этой метрикой полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в $\mathbb{R}^n$.

Для каждого из следующих метрических пространств выясните, является ли оно полным; если нет, дайте явное описание его пополнения.

31. Множество $\mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(a,b) = |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b|$.

32. Интервал $(-\pi/2; \pi/2)$ с расстоянием $\rho(a,b) = |\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b|$.

33. Ω — множество отрезков на числовой прямой (точки отрезками не считаются); для отрезков $S_1 = [a_1; b_1]$ и $S_2 = [a_2; b_2]$ полагаем $\rho(S_1, S_2) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$.