Топология, листок 2
Срок сдачи 16 февраля 2017

1. Покажите, что если открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ связно, то оно линейно связно.

2. Пусть C — канторово множество. Покажите, что произведение счетного семейства пространств, гомеоморфных C, также гомеоморфно C.

3. Пусть $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность компактных хаусдорфовых пространств, и пусть для каждого $n > 1$ задано непрерывное отображение $f_n\colon X_n \to X_{n-1}$. Докажите, что существует такая последовательность $\{x_i\}$, $x_i \in X_i$, что $f_n(x_n) = x_{n-1}$ для всех $n > 1$. (*Указание.* Посмотрите на произведение $\prod X_n$.)

4. Приведите пример полного метрического пространства X и последовательности вложенных замкнутых шаров $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \ldots$, для которой $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$.

5. Приведите пример линейно связного компактного подмножества $X \subset \mathbb{R}^2$, для которого не существует непрерывной сюръекции $[0;1] \to X$.

6. Пусть $p > 2$ — простое число, и пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ не делится на p. Покажите, что a является полным квадратом в $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда существует такое целое x, что $a \equiv x^2 \pmod{p}$.

7. Пусть $(X, \preceq)$ — вполне упорядоченное множество со следующим свойством: само X несчетно, но для всякого $a \in X$ множество $\{x \in X : x \prec a\}$ является счетным. Введем на X топологию, для которой предбазой является совокупность множеств вида $\{x \in X : x \prec a\}$ и $\{x \in X : a \prec x\}$ при всевозможных $a \in X$.

Покажите, что X в этой топологии хаусдорфово и секвенциально компактно, но некомпактно.