Введение в топологию 2016/17
Задачи для семинара, список 6

43. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Покажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке $x \in X$, т. е. когда для всякой $x \in X$ выполнено следующее условие:

> *для всякого открытого $V \ni f(x)$ существует такое открытое $U \ni x$, что $f(U) \subset V$.*

44. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Покажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда для всякого $A \subset X$ выполнено соотношение $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Черта обозначает замыкание.

45. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — отображение со следующим свойством: существует такое $\lambda \in (0;1)$, что $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x,y)$ для всех $x, y \in X$. Докажите, что существует и единственна такая точка $x \in X$, что $f(x) = x$. (*Указание.* $a, f(a), f(f(a)), \ldots$)

46. Пусть (X, ρ) — компактное метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — отображение со следующим свойством: $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y)$ для всех $x, y \in X$, $x \neq y$. Докажите, что существует и единственна такая точка $x \in X$, что $f(x) = x$.

47. Останется ли верным утверждение задачи 46, если заменить в условии «компактное» на «полное»?

48. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ положим $\mathbb{R}_x = \mathbb{R}$; тогда множество $X = \prod_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_x$ можно отождествить с множеством всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$: элементу $f \in X$ ставится в соответствие функция, которая переводит x в компоненту элемента f в $\mathbb{R}_x$. Пусть $C(\mathbb{R}) \subset X$ — множество всех **непрерывных** функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

(а) Найдите замыкание $C(\mathbb{R})$ в X, если считать, что на X задана топология произведения.

(б) Покажите, что замыкание $C(\mathbb{R})$ в X не совпадает с множеством пределов $\lim f_n$ для всех последовательностей $\{f_n\}$, $f_n \in C(\mathbb{R})$.

49. Зададимся последовательностью положительных чисел $\{\delta_n\}$, для которой ряд $\sum_n \delta_n$ сходится, и обозначим через X множество числовых последовательностей $a = \{a_n\}$, удовлетворяющих условию «$a_j \in [0; \delta_j]$ для всех j». Если $a, b \in X$, положим $\rho(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$.

Покажите, что X с метрикой ρ гомеоморфно произведению $\prod_{n=1}^{\infty}[0;\delta_n]$.