

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ 2016/17  
ЗАДАЧИ ДЛЯ СЕМИНАРА, СПИСОК 5

- 34.** Гомеоморфны ли  $C$  и  $C \times C$ , где  $C \subset [0; 1]$  — стандартное канторово множество?
- 35.** Постройте в явном виде непрерывное и сюръективное отображение  $f: C \rightarrow [0; 1]$  ( $C$  — по-прежнему канторово множество).
- 36.** Опишите все непрерывные гомоморфизмы из аддитивной группы  $\mathbb{Z}_p$  (целых  $p$ -адических чисел) в аддитивную группу  $\mathbb{R}$ .
- 37.** Опишите все непрерывные гомоморфизмы из аддитивной группы  $\mathbb{Z}_p$  в группу  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  (операция — умножение комплексных чисел).
- 38.** Пусть  $X$  — произвольное множество и  $B(X)$  — множество ограниченных функций (со значениями в  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  — как вам больше нравится) на  $X$ . Введем на  $B(X)$  метрику  $\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ . Докажите, что  $B(X)$  полно относительно этой метрики.
- 39.** Пусть  $X$  — топологическое пространство и  $C_b(X) \subset B(X)$  — подмножество, состоящее из непрерывных функций. Покажите, что  $C_b(X)$  — также полное метрическое пространство.
- 40.** Пусть  $C[0; 1]$  — пространство всех непрерывных функций на отрезке  $[0; 1]$ . Введем на нем метрику

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Полно ли пространство  $C[0; 1]$  в этой метрике?

**41.** Пусть  $X$  — хаусдорфово топологическое пространство. Положим  $X' = X \cup \{\infty\}$  (где  $\infty$  — новая точка, не принадлежащая  $X$ ) и введем на  $X'$  топологию следующим образом: если  $U \subset X'$  не содержит  $\infty$ , то  $U$  открыто тогда и только тогда, когда оно открыто в  $X$ , а если  $U \ni \infty$ , то  $U$  открыто тогда и только тогда, когда  $X \setminus U$  компактно.

(а) Проверьте, что при таком определении на  $X'$  действительно получается топология.

(б) Покажите, что  $X'$  компактно.

(в) В каких случаях  $X'$  хаусдорфово?

(г) В каких случаях  $X$  плотно в  $X'$ ?

**42.** Какому известному пространству гомеоморфно  $X'$ , если  $X$  — это:

(а) интервал  $(0; 1)$ ;

(б) полуинтервал  $[0; 1)$ ;

(в) отрезок  $[0; 1]$ ?