



Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Программа дисциплины «R-матрица: происхождение и применение в теории групп кос и
квантовых группах» для направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра 01.04.01
«Математика» подготовки магистра

Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет Математики

Программа дисциплины

«R-матрица: происхождение и применение в теории групп кос и квантовых
группах»

для направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра
для направления 01.04.01 «Математика» подготовки магистра

Автор программы: Пятов П.Н., к.ф.-м.н., pyatov@theor.jinr.ru

Рекомендована секцией УМС по математике «__»_____ 2016 г.

Председатель С.М. Хорошкин _____

Утверждена УС факультета математики «__»_____ 2016 г.

Ученый секретарь Ю.М. Бурман _____

Москва, 2016

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями
университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра, направления 01.04.01 «Математика» подготовки магистра

Программа разработана в соответствии с:

- ОС НИУ ВШЭ;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра 01.04.01 «Математика» подготовки магистра, специализации Математика, утвержденным в 2016 г

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «R-матрица: происхождение и применение в теории групп кос и квантовых группах» являются:

- Формирование у слушателей ясного представления о базисных понятиях и основных приложениях R-матричного формализма в теории квантовых групп и вычислениях инвариантов зацеплений;
- Знакомство с теорией неприводимых и R-матричных представлений алгебр Ивахори-Гекке;
- Углублённое изучение R-техники в приложении к квантовым матричным алгебрам, в частности, с понятиями R-следа и R-определителя;
- Изучение основных понятий теории квазитреугольных алгебр Хопфа: коумножения, коединицы, антипода, универсальной R-матрицы, ленточного элемента.
- Знакомство с конкретными примерами квантовых групп и квантовых матричных алгебр: квантованной универсальной обертывающей алгеброй, квантованной алгеброй функций на группе Ли, алгеброй уравнения отражения.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Получить общее представление о предмете «R-матрица: происхождение и применение в теории групп кос и квантовых группах», изучить базисные понятия и основные методы;
- Изучить основные методы, принципы и математические структуры, используемые при исследовании структурной теории и теории представления квантовых матричных алгебр;
- Ознакомиться с применением R-матричного формализма в различных разделах математики и математической физики, в частности, в задачах теории инвариантов связок;



- Быть готовым использовать основные принципы и методы R-матричного метода в последующей профессиональной деятельности в качестве научных сотрудников, преподавателей вузов.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость и корректность научных текстов по R-матричным методам	Изучение базового курса За счет повышения общематематической и математико-физической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Владеет профессиональной лексикой в области R-матричной теории Распознает и воспроизводит названия основных математических структур, возникающих при изучении данной дисциплины, умеет корректно формулировать утверждения и их доказательства	Продумывание и повторение услышанного на семинарах и лекциях. Беседы с преподавателями во время консультаций. Компетенция достигается в процессе накопления опыта работы по данной теме и общения с преподавателями.
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки проблем Адекватно оценивает корректность использования тех или иных математических методов, применяемых при формулировке и решении задач	Продумывание базовых понятий курса Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит ключевые идеи, методы и алгебраические конструкции R-матричной теории Обосновывает и оценивает мотивировки и логические ходы доказательств основных результатов	Продумывание ключевых моментов лекций Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателем



4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественно научных дисциплин и блоку дисциплин, обеспечивающих подготовку бакалавра и магистра направления подготовки «Математика»

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- базовые курсы алгебры и математического анализа (1 и 2 годы бакалавриата);

Желательно, но не необходимо также знакомство с некоторыми основными понятиями и результатами из курсов:

- базовый курс групп и алгебр Ли и их представлений (I-IV модули, 3, 4 год бакалавриата);

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- свободное владение основными понятиями линейной алгебры
- свободное владение основными методами теории представлений
- знакомство с основами теории групп

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Дополнительные главы математической физики;
- Теория интегрируемых систем квантовой механики и статистической физики.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции и	Семинары	Практические занятия	
1	Группа кос. Конечномерные факторы ее групповой алгебры: алгебра Ивахори-Гекке и симметрическая группа. Два замечательных набора элементов: операторы Юциса-Мерфи и бакстеризованные элементы. Конструкция примитивных идемпотентов и неприводимых представлений алгебр Ивахори-Гекке. Связь с диаграммами и таблицами Юнга.	16		6		10
2	R-матричные представления группы кос. Примеры R-матриц, семейства R-матриц $GL(m n)$ типа. R-след (часто именуемый квантовым) и инварианты зацеплений.	16		6		10
3	Понятие об алгебрах Хопфа: коумножение, коединица и антипод с точки зрения теории представлений. Двойственные алгебры Хопфа. Квазитреугольные алгебры Хопфа и универсальная R-матрица.	20		8		12



4	Квантованная алгебра функций на группе как алгебра Хопфа --- так называемая, RTT-алгебра. "Квантовый" определитель и антипод.	15		5		10
5	Квантованная универсальная обертывающая алгебра --- двойственная алгебра Хопфа к RTT-алгебре. Треугольное разложение. Конструкция центра с использованием R-следа. Алгебра уравнения отражений.	16		6		10
6	Квантовые матричные алгебры. Структура их характеристических подалгебр. Собственные значения квантовых матриц и алгебра их симметрических функций. Квантовые версии соотношений Ньютона и теоремы Гамильтона-Кэли.	16		6		10
7	Теория конечномерных разложимых представлений алгебры уравнения отражений.	15		5		10
	Итого:	114		42		72

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля					Параметры **
		1	2	3	4	
Текущий	Решение домашнего задания	1	1	1	1	Письменное задание, выдаваемое студентам на дом. Срок сдачи задания – до конца текущего модуля (в зависимости от его объема). Срок проверки заданий – в течение недели со дня сдачи.
Итоговый	Экзамен				1	Письменная работа + беседа с преподавателем (всего 1,5-2 часа)

4 письменных домашних задания
 1 контрольная работа

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Основная форма текущего контроля – решение задач из домашних заданий (5-7 задач по каждой теме). Задачи подбираются так, чтобы их решение потребовало от студента свободного владения основными понятиями и умения пользоваться техническими (вычислительными) приемами, которые изучаются в соответствующем разделе курса. Часть задач повышенной сложности носят исследовательский характер и предполагают самостоятельное изучение студентами материала, не излагавшегося на лекциях. Обсуждение подходов к решению этих задач происходит на семинарах и во время консультаций. Решение некоторых (но не обязательно всех) задач повышенной сложности является необходимым условием получения отличной оценки за домашнее задание (8-10 баллов).

Экзамен (зачет) включает в себя письменную подготовку, состоящую из задач, решение которых требует от студента владения как понятийным, так и техническим аппаратом по изучавшимся в течение модуля темам, а также из одного - двух теоретических вопросов. Студент в



очной беседе с преподавателем излагает результаты своей письменной работы и, при необходимости, отвечает на 1-2 дополнительных вопроса. Время, отводимое на беседу: $\frac{1}{2}$ - 1 час во время зачета, и $\frac{1}{2}$ - $1\frac{1}{2}$ часа во время экзамена.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Промежуточная оценка за первый модуль $O_{\text{промежуточная 1}}$ и накопленная оценка за 2 модуль $O_{\text{накопленная 2}}$ рассчитываются аналогично:

$$O_{\text{промежуточная 1}} (O_{\text{накопленная 2}}) = 0.5 * O_{\text{текущий}} + 0.5 * O_{\text{сам. работа}},$$

где $O_{\text{текущий}}$ и $O_{\text{сам. работа}}$ --- оценки текущего контроля и самостоятельной работы студентов в соответствующих модулях.

Здесь оценка текущего контроля $O_{\text{текущий}}$ рассчитывается как взвешенная сумма трех форм текущего контроля, предусмотренных в РУП

$$O_{\text{текущий}} = 0.3 * O_{\text{д/з}} + 0.2 * O_{\text{к/р}} + 0.5 * O_{\text{кол/зачет}},$$

Оценки за домашнее задание $O_{\text{д/з}}$, контрольную работу $O_{\text{к/р}}$, и коллоквиум/зачет $O_{\text{кол/зачет}}$ выставляются по 10-балльной шкале. Способ округления накопленной оценки текущего контроля: в пользу студента.

Студент, получивший низкие оценки текущего контроля, имеет возможность их однократной передачи.

Самостоятельная работа студентов, а именно: изучение по поручению преподавателя дополнительных материалов, подготовка на их основе сообщений и выступление с ними на семинарах, а также разбор у доски задач повышенной сложности на семинарских занятиях --- оценивается по 10-балльной шкале оценкой $O_{\text{сам. работа}}$. Оценки за самостоятельную работу студента преподаватель выставляет в рабочую ведомость. Накопленная оценка - $O_{\text{сам. работа}}$ окончательно определяется перед промежуточным (итоговым) контролем.

Накопленная итоговая оценка за весь период изучения дисциплины определяется как среднее арифметическое оценок за 1 и 2 модули:

$$O_{\text{накопленная итоговая}} = 0.5 * (O_{\text{промежут 1}} + O_{\text{накопленная 2}})$$

Результирующая итоговая оценка за дисциплину учитывает также оценку за экзамен $O_{\text{итог. контроль}}$, выставляемую по 10-балльной шкале, и определяется по формуле

$$O_{\text{результатирующая итог}} = 0,4 * O_{\text{накопленная итоговая}} + 0,6 * O_{\text{итог. контроль}}$$

Способ округления накопленной и результирующей итоговых оценок: в пользу студента.

На экзамене(зачете) студент может получить дополнительный вопрос (дополнительную задачу), ответ на который оценивается в 1 балл.

Оценка за итоговый контроль - **блокирующая**, при неудовлетворительной итоговой оценке она равна результирующей.

В диплом ставится результирующая итоговая оценка по учебной дисциплине.



7 Образовательные технологии

На лекции обсуждаются ключевые понятия и технические выкладки разбираемой темы, даются необходимые определения, разбираются поучительные примеры. Студентам на дом даются задачи для самостоятельного разбора, содержащие как упражнения для усвоения пройденного материала, так и нестандартные задачи, позволяющие проверить уровень общего понимания предмета и требующие изучения дополнительного материала. Некоторые задачи предваряют (продолжают) тематику лекций. Студент сдает задачи как в виде письменных домашних работ, так и в виде устной беседы с преподавателем.

8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

8.1 Тематика заданий текущего контроля

Примерный список задач по теме “R-матричные представления группы кос”.

1. Определить понятие класса косо обратимых R-матриц и вывести формулу для соответствующий R-следа.
2. Дать определение R-матриц геккевского и $GL(n)$ типов, построить серии соответствующих им проекторов: симметризаторов и антисимметризаторов
3. Что такое бакстеризация? Для каких R-матриц эта процедура определена?
4. Докажите соотношение кос и условие Гекке для серии R-матриц Дринфельда-Джимбо.
5. Перечислите свойства R-следа. Докажите их.

8.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примерный перечень вопросов к зачету.

1. Доказать эквивалентность геометрического и алгебраического определений группы кос.
2. Построить явные формулы для действия генераторов элементарных зацеплений в неприводимых представлениях алгебр Ивахори-Гекке, отвечающих простейшим диаграммам Юнга.
3. Описать спектр элементов Юциса-Мэрфи в алгебрах Ивахори-Гекке.
4. Вычислить инвариант Джонса для простейших связок.
5. Доказать теорему Гамильтона-Кэли.

9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

9.1 Базовые учебники

1. Кассель К., Россо М., Тураев В. “Квантовые группы и инварианты узлов”, Москва, Институт компьютерных исследований, 2002.
2. A.Klimyk, K.Schmuedgen “Quantum groups and their representations”, Springer-Verlag, Berlin, 1997
3. O.Ogievetsky, “Uses of quantum spaces” Contemporary Mathematics 294, 161-232, 2002.

9.2 Основная литература



4. O.Ogievetsky, P.Pyatov “Lecture on Hecke algebras” Preprint MPIM 2001-40

9.3 Дополнительная литература

6. J.S.Birman, T.E. Brendle “Braids: a survey” Preprint arXiv:math/0409205

9.4 Программные средства

Специальные программные средства не предусмотрены.

9.5 Дистанционная поддержка дисциплины

Специальные дистанционные ресурсы не предусмотрены. Однако должна быть обеспечена возможность дистанционных консультаций по электронной почте и-или через skype.

10 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения семинаров не используется специальное оборудование, кроме, возможно, компьютерного проектора и системы видеозаписи учебных занятий.