Введение в топологию 2016/17
Задачи для семинара, список 7

50. Пусть X — хаусдорфово пространство и $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ — убывающая последовательность компактных подмножеств. Докажите, что $\bigcap_n K_n \neq \varnothing$.

51. Пространство называется *локально компактным*, если у всякой его точки есть окрестность с компактным замыканием. Покажите, что для хаусдорфовых локально компактных пространств также верна теорема Бэра: всякое непустое открытое подмножество не является тощим.

52. Докажите, что любое подпространство (т. е. подмножество с индуцированной топологией) регулярного пространства также регулярно.

53. Докажите, что замкнутое подпространство нормального пространства нормально. (Для произвольных подпространств это неверно.)

54. Докажите, что произведение двух регулярных пространств регулярно. (Для нормальных пространств это неверно.)

55. (а) Пусть A и B — замкнутые подмножества в топологическом пространстве X, и пусть $W \subset A \cup B$ таково, что $W \cap A$ и $W \cap B$ открыты в топологиях, индуцированных с X на A и B соответственно. Докажите, что $W \subset A \cup B$ также открыто в топологии, индуцированной с X.

(б) Останется ли это утверждение верным, если A и B не обязательно замкнуты?

56. Пусть X и Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$ — отображение, и пусть $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$. Предположим, что все ограничения $f|_{X_\alpha}$ непрерывны. Докажите, что f также непрерывно, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

(а) все X_α открыты;

(б) все X_α замкнуты, и при этом у каждой точки $x \in X$ существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств X_α (в таких случаях говорят: «покрытие $\{X_\alpha\}$ локально конечно»).

57. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ — счетное подмножество. Докажите, что существует такая плоскость $\pi \subset \mathbb{R}^3$, что $S_\pi(X) \cap X = \varnothing$. (Через S_π обозначена симметрия относительно плоскости π.)

58. Можно ли представить $\mathbb{R}$ в виде счетного объединения подмножеств, гомеоморфных канторову множеству?