<u>Вычислительная физика</u> (1, 2 и 4 семестры)

Аннотация

Курс “Вычислительная физика” обеспечивает введение в различные понятия, связанные с машинной архитектурой, основными языками программирования, вычислительными методами их физическими приложениями. Независимо от начального уровня, каждый студент, прошедший этот курс, будет способен написать программу на языках Python и C/C++ и овладеет основами работы в системах Linux, IPython Notebook, включая использование научных библиотек, научится работать с файлами и визуализировать распределения данных. Основы использования этих инструментов даются на практикумах 1 и 2 семестров. Параллельно появлению у студентов базовых представлений о математическом анализе и линейной алгебре, изложение углубляется и смещается в сторону методов вычислительной математики и их физических приложений.

В связке с физическим практикумом будут рассмотрены способы основной методы анализа экспериментальных данных и моделирования. В связке с курсами математического анализа и линейной алгебры будут рассмотрены способы символьных вычислений в Wolfram Mathematica, основы численной линейной алгебры и методов численного дифференцирования, интегрирования, оптимизации и интерполяции. Обсуждаются основы генерации случайных чисел и элементарные аспекты метода Монте-Карло. Наконец, в связке с курсом по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики, обсуждаются способы решения дифференциальных и интегральных уравнений и уравнений в частных производных с приложениями к физическим задачам.

Важной целью курса является изучение методов использования численных методов и современных компьютерных технологий для решения в символьной и численной формах математических задач, возникающих в научной деятельности ученого-физика, что является важной компонентой формирования профессионального инструментария выпускника физического факультете НИУ ВШЭ и делает его конкурентоспособным на мировом уровне.

Символьные методы эффективно дополняют традиционные аналитические и численные методы, позволяя сосредоточить внимание на принципиальных вопросах, переложив часть технической работы на компьютер.

Вторая цель - более глубокое изучение основных вопросов математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, уравнений в частных производных за счет использования наглядных образов, графических изображений, анимации. Большое внимание будет также уделено графическим средствам PC, изучению средств подготовки публикаций и компьютерных демонстраций.

Основные отличия от существующих курсов:

Курс вычислительной физики построен в основном на использовании современных программных средств, предназначенных для решения прикладных физико-математических задач. Такие программные средства входят в состав математических пакетов, стандартных математических библиотек на языках высокого уровня и в средства разработки приложений.

В курсе рассматриваются, в том числе, и символьные методы решения уравнений и выполнения математических преобразований. Такие методы имеют самостоятельную ценность, поскольку их использование вместе с численными методами, повышает эффективность численных алгоритмов. В отличие от численных методов, символьные методы сводятся к тождественному преобразованию алгебраических выражений и уравнений и поэтому не подвержены влиянию погрешностей округления.

В настоящее время имеется достаточно большое число задач вычислительной математики и физики, для которых созданы программные реализации на столь высоком уровне, что самостоятельная детальная разработка соответствующих численных алгоритмов и написание программ студентами-физиками нецелесообразно. Это относится к широкому кругу задач линейной алгебры и анализа: матричная алгебра, обращение матриц, решение линейных алгебраических систем, алгебраическая проблема собственных значений, численное дифференцирование, интегрирование, решение задачи Коши для дифференциальных уравнений, решение линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений, интегральных уравнений, вычисление преобразования Фурье и многое другое. Большого внимания заслуживают также встраиваемые графические средства, которые можно использовать из программы пользователя для визуализации и анализа результатов. Все эти детально и тщательно разработанные программные компоненты доступны пользователям в виде составных частей средств разработки приложений. Такие компоненты можно использовать в качестве основы, на базе которой при затрате минимальных усилий можно создавать надежные и эффективные программные комплексы для решения современных физико-математических. Основная проблема, которая стоит перед физиком при использовании сформулированного подхода, состоит в подборе нужных компонентов и организации взаимодействия между ними. Разумеется, такой подход нисколько не снижает значимости тщательного и глубокого изучения численных методов и программирования.

В целом, курс состоит из трех разделов, изучаемых параллельно:

Работа с математическими пакетами, библиотеками стандартных программ и средствами разработки математических приложений.

Программные компоненты, реализующие основные численные методы, организация их взаимодействия. Изучение численных методов, для которых на данный момент нет программной реализации достаточно высокого качества.

Математические модели, позволяющие более глубоко изучить некоторые разделы общих курсов физики и математики.

В качестве программного обеспечения используются в основном Python, C/C++, Wolfram Mathematica.

Курс рассчитан на студентов 1-2 годов обучения. Изложение материала практически по всем темам организовано таким образом, чтобы сделать его доступным студентам. В частности, наряду с “непрерывными” математическими моделями, основанными на обыкновенных дифференциальных уравнениях и на уравнениях с частными производными, рассматриваются также “дискретные” модели, которые описывают эволюцию аналогичной конечномерной системы и приводят непосредственно к разностным уравнениям (разностным схемам), минуя этап формулировки дифференциальной задачи и разностной аппроксимации частных производных. Многие задачи в дискретной формулировке сохраняют основные закономерности, характерные для дифференциальных задач: условия существования и единственности решения, свойства собственных значений и собственных функции, законы сохранения. К числу таковых относятся краевые задачи и задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, уравнения диффузии и колебаний, Лапласа, Пуассона. Мы также обращаем внимание на различия между задачами в дифференциальной и в разностной формулировках.

По всем разделам курса предлагаются задачи для самостоятельного выполнения, в том числе простые задачи учебного характера и более сложные задачи, которые могли бы служить основой для выполнения курсовых и дипломных работ, а в перспективе быть развиты в научные исследования.

Лекции и практические занятия проводятся активными учёными, область деятельности которых тесно связана с тематикой курса и имеющими опыт преподавания аналогичных дисциплин.

Предполагаемый состав команды, которая будет работать над составлением подробного курса и его реализацией:

1. лектор: Попов Виктор Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор

2. лектор: Тихонов Константин Сергеевич, к.ф.-м.н., Ph.D., научный сотрудник ИТФ РАН

3. семинарист: Парфеньев Владимир Михайлович, аспирант ИТФ РАН.

4. семинарист: Киселев Александр Александрович, аспирант ИКИ РАН

Необходимое обеспечение курса.

Для обеспечения эффективной реализации курса крайне желательно наличие интерактивной доски или мультимедийного проектора в лекционной аудитории. Практические занятия (компьютерный практикум) желательно проводить в компьютерном классе. Наличие облачного сервиса с единым комплексом программных продуктов для пользования студентами и преподавателями со своих устройств значительно повысит эффективность учебного процесса.

Контроль знаний по лекционному курсу (предварительная схема)

. В каждом модуле семестра студентам даются задания (проекты) для самостоятельного или коллективного решения. Результаты по выполненным заданиям (проектам) оформляются в стиле научной публикации (отчета по теме), размещаются на сайте, а по решению лекторов и семинаристов лучшие из них защищаются на семинаре (лекции) За каждое задание проставляются баллы по 10-бальной шкале (далее О31 и О32, «оценка за задание 1/2»).

По окончании каждого модуля проводится контрольная работа. В первом модуле она может проводиться в сессию между модулями, во втором — в одно из последних занятий. Каждая контрольная оценивается по 10-бальной шкале (далее ОКр1 и ОКр2, «Оценка за контрольную работу 1/2»)

По окончании курса проводится экзамен по программе семестра, который. оценивается по 60-бальной шкале (далее ОЭ, «оценка за экзамен»).

Итоговая накопительная оценка (далее ОИ, «оценка итоговая») получается суммированием этих оценок:

ОИ=ОЭ+ОКр1+ОКр2 +ОЗ1+ОЗ2.

Компьютерный практикум

Компьютерный практикум является неотъемлемой частью курса общей физики. В ходе практикума студенты самостоятельно выполняют ряд работ, анализируют и обрабатывают полученные результаты, представляют полученные результаты при сдаче работ. Таким образом у студентов вырабатывается представление об организации компьютерного эксперимента.

Вычислительная физика-I (1 семестр, 16/32 часов)

Аннотация

На настоящий момент, компьютер представляет собой чрезвычайно ценный инструмент физических исследований. Цель первой части блока курсов “Вычислительная физика” – дать студентам базовое представление об основных принципах программирования на примере языка Python с элементарными приложениями к численному анализу и обработке данных, получаемых из физического эксперимента. От студентов не требуется предварительного опыта программирования: “техническая” часть даётся параллельно с “теоретической”, по мере появления у студентов соответствующей физико-математической базы. Рассматриваются приёмы, упрощающие символьные вычисления в программе Wolfram Mathematica с приложениями к физическим задачам.

Примерная программа курса по темам (8 лекций, 16 семинаров):

Лекция 1. Введение в Linux. Сеанс работы в Linux. Терминал и командная строка. Структура файловой системы. Работа с файловой системой. Доступ процессов к файлам и каталогам. Работа с текстовыми данными. Возможности командной оболочки. Текстовые редакторы.

Лекция 2. Понятие о машинной архитектуре и вычислениях с конечной точностью. Архитектура вычислительных машин. Правила приближенных вычислений. Значащие цифры. Действия над приближенными числами. Вычислительные алгоритмы. Погрешности вычислений на компьютерах.

Лекция 3. Скриптовые языки и введение в язык Python. Программа на Python. Основные алгоритмические конструкции. Встроенные типы данных. Выражения. Имена. Операции с векторами и матрицы, покомпонентные операции. Введение в стандартную библиотеку numpy.

Лекция 4. Численное интегрирование и дифференцирование. Постановка задачи численного дифференцирования. Численное дифференцирование на основе интерполяционных формул Ньютона. Оценка погрешности дифференцирования с помощью многочлена Ньютона. Численное дифференцирование на основе интерполяционной формулы Лагранжа. Оценка погрешности численного дифференцирования с помощью многочлена Лагранжа. Постановка задачи численного интегрирования. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона. Квадратурные формулы Гаусса. Численные методы вычисления кратных, несобственных и криволинейных интегралов.

Лекция 5. Численные методы поиска корней линейных и нелинейных уравнений и систем. Метод деления пополам. Метод Ньютона: теоретические основы. Визуализация метода Ньютона. Метод секущих, метод парабол и простых итераций. Нахождение всех корней уравнения. Прямые методы решения СЛАУ: метод Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса. Итерационные методы решения СЛАУ: метод простой итерации или метод Якоби, Метод Гаусса – Зейделя. Численные методы поиска экстремумов: метод покоординатного спуска, метод деформированного многогранника, градиентный метод, метод наискорейшего спуска, метод сопряженных направлений. Методы поиска экстремума с ограничениями.

Лекция 6. Основы обработки экспериментальных данных. Методы статистической обработки результатов. Корреляционный анализ. Дисперсионный анализ. Регрессионный анализ. Метод наименьших квадратов (МНК). Применение IPython Notebook для анализа и визуализации экспериментальных данных. Введение в библиотеку scipy.

Лекция 7. Работа в системе Mathematica. Численные данные, выражения. Работа со списками, векторами и матрицами. Случайные числа. Символьные вычисления. Построение графиков.

Лекция 8. Компьютерное моделирование задач механики. Моделирование движение точки на кривой и поверхности. Моделирование движения точки под действием заданной силы. Колебания и резонансы. Задача Кеплера.

Литература:

1. Landau R. H. et al. Computational Physics: Problem Solving with Python. – John Wiley & Sons, 2015.
2. Gautschi W. Numerical analysis. – Springer Science & Business Media, 2011.

3. Shifrin L. Mathematica Programming: An Advanced Introduction.
4. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику //М.: изд-во МФТИ. – 1994. – Т. 4.
5. Н. Н. Калиткин, Е.А.Альшина. Численные методы : в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования/ М. : Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с. - (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).
6. Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин. Численные методы : в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования/ М. : Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с. - (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).

Вычислительная физика- II (2 семестр, 20/40 часов)

Аннотация

Во второй части курса “Вычислительная физика” дается введение в программирование на языке C/C++. Рассматриваются способы решения задач интерполяции и экстраполяции: многочленами рациональными дробями и сплайнами. Обсуждаются основы генерации случайных чисел и метода Монте-Карло. Дается введение в методы численной линейной алгебры и обсуждается использование библиотек BLAS/LAPACK. Рассматриваются прямые и итеративные способы решения систем линейных уравнений и методы вычисления собственных векторов и собственных значений. Рассматриваются более сложные способы работы с аналитическими выражениями в системе Mathematica с элементами функционального программирования. В последней части обсуждаются способы распараллеливания кода на Python и C/C++.

Примерная программа курса по темам (10 лекций, 20 семинаров):

Лекция 1. Введение в языки программирования C/C++. Переменные и типы данных. Конструкция ветвления. Циклы. Массивы. Функции. Указатели. Динамические массивы. Структуры, классы. Примеры программ.

Лекция 2. Задачи интерполяции, экстраполяции. Задача интерполяции. Локальная и глобальная интерполяция. Кусочно-линейная интерполяция. Кусочно-квадратичная интерполяция. Многочлен Лагранжа. Многочлен Ньютона. Экстраполяция Ричардсона, оценки по Рунге и Эйткену, вычисление интегралов с заданной точностью.

Лекция 3. Случайность и имитация случайности. Случайные числа и генераторы псевдослучайных чисел. Понятие статистического моделирования. Схема проведения вычислений в статистическом моделировании. Метод статистических испытаний (методы Монте-Карло). Примеры применения методов Монте-Карло. Вычисление интегралов методом Монте-Карло и анализ погрешности.

Лекция 4. Основные алгоритмы линейной алгебры и их свойства. Прямые и итеративные алгоритмы. Матричные разложения.

Лекция 5. Методы вычисления собственных векторов и собственных значений. Введение в BLAS/LAPACK. Численные методы решения задач линейной оптимизации.

Лекция 6. Использование системы Mathematica (часть 2): Mathematica как язык программирования. Основные конструкции с приложениями к сложным задачам символьным вычислений и численного моделирования.

Лекция 7. Основы параллельных вычислений. OpenMP и MPI. Характеристика средств программирования многопроцессорных систем. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP.

Лекция 8. Методы компьютерного моделирования фазовых переходов. Классические решеточные модели фазовых переходов. Моделирование методом Монте-Карло канонического ансамбля. Модель Изинга. Моделирование двумерной модели Изинга.

Лекция 9. Моделирование случайных процессов. Моделирование броуновского движения. Задача о случайном блуждании частицы. Моделирование одномерного случайного блуждания. Моделирование случайного блуждания в пространстве двух и трех измерений.

Лекция 10. Классическая молекулярная динамика. Потенциал межмолекулярного взаимодействия. Моделирование динамики замкнутой системы многих частиц. Моделирование динамики системы многих частиц при постоянной температуре или давлении.

Литература:

1. Shifrin L. Mathematica Programming: An Advanced Introduction.
2. Керниган Б. В. Язык программирования C, 2-е издание. – Издательский дом Вильямс, 2012.
3. Биндер К., Хеерман Д. В., Задков В. Н. Моделирование методом Монте-Карло в статистической физике. – М. : Наука, 1995.
4. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику //М.: изд-во МФТИ. – 1994. – Т. 4.

5. Страуструп Б. Язык программирования C++ //М.: Бином. – 2011.
6. Gautschi W. Numerical analysis. – Springer Science & Business Media, 2011.
7. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix computations. – JHU Press, 2012. – Т. 3.
8. Хеерман Д.В. Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике. М.: Наука, 1990.
9. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. М.: Мир, 1990. т.1,2.
10. Метод молекулярной динамики в физической химии. Под ред. Ю.К. Товбина. М.: Наука, 1996.
11. Frenkel D., Smit B. Understanding Molecular Simulation. From Algorithms to Applications. San Diego, Academic Press, 2002.
12. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids, Oxford, Oxford University Press, 1990.
13. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений, М,: Наука, 1984.

<u>Вычислительная физика-III</u> (4 семестр, 40/40 часов)

<u>Аннотация</u>

В третьей части курса “Вычислительная физика” рассматриваются методы решения дифференциальных уравнений, линейных интегральных уравнений и уравнений в частных производных. Обсуждается анализ сходимости обсуждаемых методов и их поведение в “патологических” случаях. Дается представление о методах, связанных с преобразованием Фурье (включая БПФ) и разложением по другим наборам ортогональных функций. Рассматривается метод Нёстрома решения линейных интегральных уравнений. Подробно обсуждается конечно-разностный подход и даётся обзор стандартных решателей уравнений в частных производных. Также рассмотрены приложения численных методов к задачам оптики, электродинамики и квантовой механики.

Примерная программа курса по темам (20 лекций, 20 семинаров):

Лекция 1. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Анализ сходимости улучшенного метода Эйлера. Методы Рунге-Кутта.

Лекция 2. Обзор методов решений ОДУ, используемых в стандарных пакетах программ: Python, Mathematica, Matlab. Патологическое поведение стандартных решателей ОДУ: стабильность, жесткость и неявные методы.

Лекция 3. Моделирование нелинейной динамики. Катастрофы, хаос, странные аттракторы.

Лекция 4. Системы связанных линейных и нелинейных осцилляторов. Моделирование движения конечномерной системы с нелинейными связями. Равнораспределение средней энергии по степеням свободы. Движение тяжелой гибкой нити в поле силы тяготения. Цепи и хлысты.

Лекция 5.Численные методы решения краевых задач. Метод стрельбы. Разностные методы. Метод прогонки.

Лекция 6. Нелинейные и сингулярно возмущенные краевые задачи. Примеры возникновения и особенности их численного решения. Некоторые методы и примеры решения.

Лекция 7. Разложение Фурье, быстрое преобразование Фурье и разложение по ортогональным функциям. Линейные фильтры. Суммирование условно сходящихся рядов Фурье.

Лекция 8. Ортогональные многочлены. Квадратура Гаусса-Лежандра. Метод Нёстрома.

Лекция 9. Вычисления с использованием специальных функций математической физики. Методы вычисления специальных функций математической физики. Решение начально-краевых задач при помощи разложения в ряд по специальным функциям.

Лекция 10. Обзор методов решений дифференциальных уравнений в частных производных, используемых в стандартных пакетах программ: Python, Mathematica, Matlab.

Лекция 11. Численные методы решения начально-краевых задач для параболических уравнений. Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Консервативные разностные схемы. Разностные схемы для численного решения нелинейного уравнения теплопроводности. Разностные схемы для численного решения многомерного уравнения теплопроводности.

Лекция 12. Численные методы решения начально-краевых задач для гиперболических уравнений. Прямые методы характеристик. Сеточно-характеристические методы. Методы сквозного счета. Консервативные методы. Искусственная вязкость. Монотонные методы. Адаптивные схемы.

Лекция 13. Численные методы решения краевых задач для эллиптических уравнений. Принцип максимума. Метод установления решения эллиптических задач. Обоснование метода. Численная реализация.

Лекция 14. Методы оптимизации счетного шага. Метод конечных элементов. Метод конечных суперэлементов Р.И.Федоренко. Метод разностных граничных потенциалов В.С.Рябенького.

Лекция 15. Методы решения интегральных уравнений. Метод квадратур. Метод вырожденных ядер. Метод простой итерации. Метод наименьших квадратов. Метод Галеркина — Петрова. Метод Бубнова — Галеркина. Метод моментов. Метод коллокации. Метод Ритца. Метод следов. Метод Келлога.

Лекция 16. Решение краевых задач методом интегральных уравнений. Решение задач на собственные значения методом интегральных уравнений.

Лекция 17. Методы решения некорректных и обратных задач. Методы построения регуляризирующих алгоритмов. Вариационные методы. Итерационные методы.

Лекция 18. Моделирование распространения сигнала в оптическом волокне с нерегулярной границей: геометрооптический подход. Преломление на границе раздела двух сред сложной формы. Оптические системы. Распространение пучка в среде со случайно расположенными рассеивателями.

Лекция 19. Методы решения уравнений Максвелла. Проекционный метод Бубнова — Галёркина. Метод конечных элементов (FEM). Метод конечных разностей во временной области (FDTD).

Лекция 20. Методы решения задач квантовой механики. Решение временного уравнения Шредингера. Метод Кранка-Николсона. Гармонический осциллятор во внешнем поле. Проблема нефизического отражения. Атомоподобная система во внешнем поле. Метод расщепления. Расчет стационарных состояний.

Литература:

1. Gautschi W. Numerical analysis. – Springer Science & Business Media, 2011.
2. Boyd J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods. – Courier Corporation, 2001.
3. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику //М.: изд-во МФТИ. – 1994. – Т. 4.

7. Н. Н. Калиткин, Е.А.Альшина. Численные методы : в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования/ М. : Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с. - (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).
8. Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин. Численные методы : в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования/ М. : Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с. - (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).
9. Заславский Г. Сагдеев Р.З, Введение в нелинейную физику, М,: Наука, 1988,
10. Рихтмайер Р., Мортон Л. Разностные методы решения краевых задач, М,: Мир, 1972
11. Самарский А.А. Введение в численные методы, М,: Наука, 1982.
12. Самарский А.А., Теория разностных схем, М,: Наука, 1977,
13. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В,Л, Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, М,: Высшая Школа, 1987.
14. Самарский А.А., Николаев Е.С, Методы решения сеточных уравнений, М,: Наука, 1978.
15. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина, М.:Мир, 1988

Дополнительная литература

1. Ахромеева Т.С, Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Парадоксы мира нестационарных структур, В кн. Компьютеры и нелинейные явления. М,: Наука, 1988, с.44-122.

2. Беллман Р, Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных, М,: Мир, 1974.

3. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Лекции по математической физики, М,: Изд-во МГУ, 1993.

4. Бронштейн И.Н, Семендяев К.А. Справочникпо высшей математике, М,: Физматгиз, 1959.

5. Демирчан К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей, М,: Высшая школа, 1986.

6. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений, М,: Наука, 1984.

7. Камне де Ферье Ж, Кемпбел Р, Петьо Г, Фогель Т. Функции математической физики, М,: Наука, 1963

8. Кунин С, Вычислительная физика, М,: Мир, 1992.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц И.М, Механика, М,: Наука, 1977

10. Николис Дж, Динамика иерархических систем, М,: Мир, 1989

11. Николис Дж,, Пригожин И, Самоорганизация в неравновесных системах, М,: Мир, 1979

12. Рихтмайер Р., Мортон Л. Разностные методы решения краевых задач, М,: Мир, 1972

13. Самарский А.А. Введение в численные методы, М,: Наука, 1982.

14. Самарский А,А, Теория разностных схем, М,: Наука, 1977,

15. Самарский А,А,, Лазаров Р.Д., Макаров В,Л, Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, М,: Высшая Школа, 1987.

16. Самарский А,А,, Николаев Е.С, Методы решения сеточных уравнений, М,: Наука, 1978.

17. Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета нерегулярных волноводов, 1963. ЖВМ, Vol.3, N1, PP. 170-179.

18. Тода М. Теория нелинейных решеток, М,: Мир, 1984.

19. Хемминг Р.В, Численные методы, М,: Наука, 1968.

20. Хакен Г. Синергетика, М,: Мир, 1980.

21. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах, М,: Мир, 1979.

22. Эльсгольц Э.Г. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, М,: Наука, .

23. Ферми Э,, Паста Дж., Улам С. Исследование нелинейных задач, В кн. Ферми Э. Научные труды. В 2-х томах. Т.2. - М,: Наука, 1972, с.645-656.

24. Лейзер Д. Создавая картину вселенной, М,: Мир, 1988.

25. Васильева А.В., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, М,:Выешая школа, 1990.

26. Васильева А.Б. Об устойчивости контрастных структур, 1991. Матем. моделиро¬вание, Vol.3, N4, PP.114-123.

27. Никольский В,В, Электродинамика и распространение радиоволн, М,:Наука, 1978,

28. Тихонов А.Н., Самарский А,А, Уравнения математической физики, М,:Наука, 1976.

29. Тихонов А.Н, Васильева А.Б, Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения, М,: Наука, 1980.

30. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах, М,:Мир, 1987,

31. Гавурин М.К, Численные методы, М,:Наука, 1971,

32. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина, М.:Мир, 1988.

33. Берке Н. Пространство-время, геометрия, космология, М,: Мир, 1985.

34. Allen E.C., Wing G.M. An invariant embedding algorithm for the solution of inhomogeneous two-point boundary-value problems, 1974. J. Computational Phys,, Vol.14, N1, PP.40-58.

35. Кругдинеки Д. Дж, Основы Visual C++, 650с., Microsoft Press, 1997.

36. Мюррей П.. Паррае К. Visual C++, Мастер, 1997.

37. Шилд Л. Теория и практика С++, Мастер, 1997.

38. Шилд Л. MFC, Киев, bhv, 1997.

39. Янг М.Дж. Visual С++ для профессионалов, 700с, Энтроп, 1997.

40. Шаммас Н. Основы С++ и обьектно-ориентированного программирования, Киев, Диалектика, 1996.

41. Мешков А, Тихомиров Ю. Visual C++ и MFC, Т. 1 и 2, Мастер, 1997.