Программа по курсу геометрии для 1 курса бакалавриата, 2016-2017 учебный год

1 семестр

1. Евклидова геометрия на плоскости и в трехмерном пространстве. Многомерное евклидово пространство E^n. Векторы в E^n (школьное определение), их скалярное произведение. Движения пространств E^n. Примеры движений пространств $E^1,\ E^2,\ E^3$: параллельные переносы, зеркальные симметрии, повороты, винтовые движения, скользящие и поворотные симметрии. Ориентация пространств $E^n,\ n \leq 3$. Движения первого и второго рода. Полная классификация движений евклидовых пространств $E^1,\ E^2,\ E^3$.

2. Векторные пространства. Определение, примеры: пространство классов направленных отрезков как векторное пространство над $\mathbb{R}$, арифметическое векторное пространство, поле как векторное пространство над своим подполем. Линейная зависимость и независимость систем векторов, линейная оболочка. Базис и размерность векторного пространства, теорема о независимости числа векторов базиса от выбора базиса в пространстве. Размерность векторного пространства. Примеры векторных пространств, в которых нет базиса (пространство вещественнозначных функций на отрезке и другие). Координаты векторов в данном базисе. Подпространства векторного пространства. Продолжение базиса подпространства до базиса объемлющего пространства в конечномерном случае. Неравенство, связывающее размерность пересечения подпространств в конечномерном векторном пространстве с их размерностями.

3. Линейные отображения векторных пространств. Ядро и образ линейного отображения. Изоморфизм векторных пространств. Линейные операторы в векторных пространствах. Матрица линейного отображения конечномерных векторных пространств в заданных базисах. Матрица композиции линейных отображений. Преобразование матрицы линейного отображения при переходе к новым базисам. Изоморфизм кольца линейных операторов в конечномерном векторном пространстве с кольцом квадратных матриц над полем. Ранг линейного отображения, его связь с размерностью ядра и размерностью отображаемого пространства (в конечномерном случае), его совпадение с рангом матрицы этого отображения.

4. Двойственное векторное пространство к данному пространству. Построение для данного базиса в конечномерном пространстве двойственного к нему базиса двойственного пространства. Канонический гомоморфизм векторного пространства в дважды двойственное к нему пространство. Теорема: в конечномерном случае канонический гомоморфизм переводит базис в дважды двойственный базис и поэтому является изоморфизмом векторных пространств (принцип двойственности).

5. Евклидовы векторные пространства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Примеры: стандартное скалярное произведение в конечномерном арифметическом вещественном пространстве; L_2-скалярное произведение в пространстве непрерывных вещественнозначных функций на отрезке. Ортонормированные базисы. Векторное и смешанное произведения в ориентированном 3-мерном вещественном пространстве. Запись смешанного произведения векторов в виде определителя 3 порядка от координат векторов в ортонормированном базисе, его геометрическая интерпретация как ориентированного объема.

6. Процессе ортогонализации Грамаң-Шмидта для конечных наборов векторов в евклидовом векторном пространстве. Ортогональная прямая сумма подпространств евклидова пространства. Ортогональное дополнение к подпространству. Доказательство его существования для конечномерного подпространства, разложение в этом случае евклидова пространства в ортогональную прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Взаимность подпространства и его ортогонального дополнения в конечномерном случае. Ортогональные линейные операторы в евклидовом пространстве. Ортогональные матрицы. Приведение матрицы ортогонального оператора в конечномерном случае к стандартному виду. Собственные подпространства ортогонального оператора, их ортогональность для собственных чисел 1 и -1 ортогонального оператора.

7. Определителями произвольного порядка. Симметрическая группа. Разложение перестановки в композицию инверсий как следствие ее разложения в композицию непересекающихся циклов. Зависимость четности числа инверсий в разложении перестановки в композицию инверсий только от самой пестановки, а не от конкретного разложения (доказательство дано через совпадение этой четности с четностью числа инверсных пар в перестановке). Знак перестановки. Полилинейная кососимметрическая форма n-ңго порядка на n-мерном векторном пространстве (форма объема). Определитель матрицы n-ңго порядка, столбцы которой составлены из координат арифметических векторов, как пример формы объема на n-мерном арифметическом векторном пространстве. Свойства определителя как формы: ңлинейность по столбцам и обнуление при наличии двух равных столбцов; как следствие, его кососимметричность относительно перестановки столбцов или строк. Введение понятия ориентации для конечномерных вещественных векторных пространств через определители. Определители и обращение матриц линейных отображений. Полная линейная группа $GL(n)$ как группа невырожденных квадратных матриц n-го порядка и как группа обратимых линейных операторов.

8. Аффинные пространства. Определение аффинного пространства $\mathbb{A}$ над данным векторным пространством V над полем $\mathbf{k}$. Примеры аффинных пространств: арифметическое (или координатное) аффинное пространство $\mathbf{k}^n$; евклидово точечное пространство E^n как аффинное пространство над евклидовым n-мерным векторным пространством; векторное пространство как аффинное пространство над самим собой. Определение аффинного подпространства $\Pi(U)$ с направляющим подпространством U в аффинном пространстве $\mathbb{A}$, где U - подпространство в V. Частные случаи: 1) $\dim U = 1$, $\Pi(U)$ - аффинная прямая в $\mathbb{A}$, и 2) $\dim U = 2$, $\Pi(U)$ - аффинная плоскость в $\mathbb{A}$.

9. Понятие аффинного репера в конечномерном аффинном пространстве. Аффинные и барицентрические координаты точек в конечномерном аффинном пространстве относительно данного репера. Деление отрезка в данном отношении, формула для центроида полиэдра в аффинном пространстве в барицентрических координатах. Аффинные отображения конечномерных аффинных пространств как отображения, для которых ассоциированные отображения подлежащих векторных пространств линейны. Матрица аффинного отображения в фиксированных реперах, ее связь с матрицей подлежащего линейного отображения векторных пространств. Теорема: аффинное отображение однозначно определяется образом аффинного репера. Движения и подобия евклидовых аффинных пространств как аффинные отображения, их матрицы. Задание аффинного подпространства в конечномерном аффинном пространстве $\mathbb{A}$ системой неоднородных линейных уравнений в произвольной аффинной системе координат в $\mathbb{A}$.

10. Проективные пространства. Проективное пространство как проективизация $P(V)$ векторного пространства V. Примеры: вещественные и комплексные проективные пространства $\mathbb{RP}^1$, $\mathbb{RP}^2$, $\mathbb{CP}^1$. Покрытие проективного пространства аффинными картами. Проективное подпространство в $P(V)$ как проективизация подпространства в V. Проективная оболочка точек $A_i = \mathbf{k}v_i, i = 1, ..., m$, в $P(V)$ как проективизация линейной оболочки $< v_1, ..., v_m >$ векторов в V; корректность этого определения, т.е. его независимость от выбора конкретных векторов v_i таких, что $A_i = \mathbf{k}v_i$. Проективно независимые наборы точек в проективном пространстве. Проективный репер в n-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}^n$. Проективная система координат в проективном пространстве как класс пропорциональности базисов в подлежащем векторном пространстве. Задание проективных координат с помощью проективного репера. Двойное отношение 4 различных точек на проективной прямой. Определение двойного отношения в проективно инвариантной (бескоординатной) форме.

10. Проективное отображение конечномерных проективных пространств как проективизация линейного отображения подлежащих векторных пространств. Следствие этого определения: из проективности отображения n-мерного проективного пространства в m-мерное следует, что m не меньше чем n, и что это отображение инъективно. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только отображениях проективных пространств одинаковой размерности. Доказательство "основной" теоремы проективной геометрии: всякое проективное отображение конечномерных проективных пространств однозначно определяется образами точек проективного репера.

11. Пример проективного отображения одной проективной прямой на другую в проективной плоскости, получаемого проекцией из центра, не лежащего на этих прямых (перспективного отображения). Неравенство на размерность пересечении проективных подпространств в (конечномерном) проективном пространстве: коразмерность пересечения не превосходит суммы коразмерностей пересекаемых пространств. Следствие: непустота пересечения подпространств дополнительной размерности в проективном пространстве. Доказательство теоремы Дезарга и теоремы Паппа над произвольным полем. Формула двойного отношения 4 точек на проективной прямой через определители из проективных координат точек на прямой.

12. Полный 4-вершинник и связанное с ним построение гармонической четверки точек на проективной прямой. Проективная группа $PGL(n+1)$ как группа проективных преобразований проективного пространства $\mathbb{P}^n$; изоморфизм групп $PGL(n+1) = GL(n+1)/\mathbf{k}^*$. Аффинная группа $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}^n)$ как подгруппа проективной группы $PGL(n+1)$, ее реализация как стабилизатора гиперплоскости в группе $PGL(n+1)$, тавтологически действующей на $\mathbb{P}^n$. Эрлангенская программа Ф.Клейна как метод изучения различных геометрий (аффинной, евклидовой, неевклидовых) через описание инвариантов соответствующих подгрупп проективной группы.

13. Коники на проективной плоскости над произвольным полем $\mathbf{k}$ характеристики не равной 2. Невырожденная (гладкая) коника - та, для которой матрица A задающей ее квадратичной формы имеет ранг 3. Биективная стереографическая проекция невырожденной коники C, имеющей точку P с координатами в $\mathbf{k}$, из центра P на проективную прямую, использование этой проекции для нахождения параметрических уравнений коники посредством многочленов степени не выше 2 от рационального параметра. Следствие - вариант теоремы Безу для пересечения невырожденной и произвольной коник: число точек их пересечения не превосходит 4. Пучок коник с 4 различными базисными точками, порожденный кониками, одна из которых невырождена. Применение теоремы Безу к доказательству принадлежности пучку любой коники, проходящей через базисные точки пучка. Следствие: доказательство теоремы Паскаля для гладких коник.

14. Проективные инволюции на проективной прямой, их свойство: гармоничность любой пары инволютивных точек и пары неподвижных точек инволюции. Примеры вычислений в проективных пространствах над конечными полями: число точек в пространстве $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbb{F}_p$, порядок группы $PGL(n+1, \mathbb{F}_p)$. Двойственное проективное пространство. Принцип проективной двойственности как отражение принципа двойственности для подлежащих векторных пространств. Сохранение инцидентности подпространств при переходе от проективного пространства к двойственному пространству. Следствие: теорема Брианшона как двойственная к теореме Паскаля; обратная теорема Дезарга как двойственная к ней.

2 семестр

1. Вещественные и комплексные векторные пространства. Комплексификация и овеществление.

2. Пространства с формами. Квадратичные и билинейные формы. Симплектические формы. Строение пространств с формой (ядро, анизотропное и максимально изотропное подпространство). Теорема Витта. Комплексные, вещественные и эрмитовы формы. Ортогональные, симплектические и унитарные пространства над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Ортогональная, симплектическая и унитарная группы.

3. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм над $\mathbb{R}$. Ортогональное преобразование квадратичной формы к каноническому виду. Канонический вид симплектической формы.

4. Квадрики. Евклидова, аффинная и проективная геометрия квадрик над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Классификация квадрик в вещественных и комплексных пространствах размерности ≤ 3. Поляритет, задаваемый невырожденной квадрикой. Поляры, их свойства.

5. Внешняя алгебра. Плюккеровы координаты подпространства. Соотношения Плюккера и грассманианы. Геометрия прямых трехмерного проективного пространства. Квадрика Плюккера-Клейна.

6. Гиперболические пространства. Плоскость Лобачевского, ее проективная модель Кэли-Клейна в круге и конформно-евклидовы модели Пуанкаре в круге и верхней полуплоскости. Изоморфизм моделей (отображение Дарбу). Дробно-линейные преобразования полуплоскости. Гиперболические пространства старших размерностей.

7. Геометрия Мебиуса. Инверсия. Решение геометрических задач с помощью инверсии. Геометрическая интерпретация комплексных чисел, простого и двойного отношения. Дробно-линейные преобразования комплексной плоскости. Круговая плоскость, круговые преобразования. Стереографическая проекция, сфера Римана. Проективная модель геометрии Мебиуса.

9. Сферическая геометрия. Сферические прямые, углы и треугольники. Сумма углов треугольника. Скалярное и векторное произведения. Сферическая тригонометрия.

10. Элементы выпуклой геометрии в аффинном пространстве. Теорема Каратеодори о выпуклой оболочке.