# Введение в топологию

С. М. Львовский

Темы, обозначенные звездочками, не разбирались на семинарах и не вошли в экзамен.

1. Определения топологического и метрического пространств. Примеры: стандартная топология на $\mathbb{R}^n$, дискретная, антидискретная, топология Зарисского на $\mathbb{C}^n$.

Непрерывное отображение, окрестность, более/менее тонкая топологии, гомеоморфизм, хаусдорфовость.

Предел последовательности в топологическом пространстве.

2. Индуцированная топология. Замыкание. Произведение двух пространств (включая категорное определение). Компактность: определение, образ компактного, замкнутый в компактном компактен, компактный в хаусдорфовом замкнут, произведение двух компактных компактно.

Характеризация компактов в $\mathbb{R}^n$.

Секвенциальная компактность в метрическом пространстве, ее равносильность компактности.

3. Связность, линейная связность. Характеризация связных подмножеств в $\mathbb{R}$. Пример связного, но не линейно связного пространства.

4. Полнота, пополнение, полнота метрических компактов.

5. Классическое канторово множество «middle thirds». Целые $p$-адические числа: структура кольца, $p$-адическая метрика, гомеоморфность канторову множеству и простарнству путей в бьесконечном дереве (с понятными ограничениями). Всякий метрический компакт — образ канторова множества. Кривая Пеано.

6. Бесконечные произведения. Теорема Александера о предбазе и теорема Тихонова.

7. Свойства отделимости T1–T4. Нормальность метризуемых пространств. Лемма Урысона. Теорема Титце.

8. Теорема Бэра.

9. Несвязная сумма. Факторпространства. Фактор нормального пространства по замкнутому отношению нормален. Пример: проективные пространства.

10. Гомотопии путей с закрепленными концами, композиция путей, фундаментальная группа. Односвязность $S^n$ при $n \geqslant 2$.

11. Накрытия. Теоремы о поднятии путей и поднятии гомотопии. Фундаментальная группа окружности и вещественных проективных пространств.

12*. Фундаментальная группа букета двух окружностей. Универсальное накрытие; его существование для (полу)локально односвязного пространства. Классификация накрытий над полулокально односвязным пространством.

13*. Теорема Ван Кампена в простом случае (без доказательства). Примеры ее применения: фундаментальная группа букета двух окружностей (альтернативное вычисление), букета окружности и сферы, бутылки Клейна.