

ТОПОЛОГИЯ, ЛИСТОК 3  
СРОК СДАЧИ 28 ФЕВРАЛЯ 2017

**1.** Докажите, что если связное и нормальное пространство содержит более одной точки, то его мощность не меньше континуума. (*Указание.* Лемма Урысона.)

(Тем не менее существуют счетные связные хаусдорфовы пространства.)

**2.** Существует ли непрерывное и биективное отображение  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ?

Решив следующие две задачи, вы докажете, что в пространстве непрерывных функций с  $\text{sup}$ -метрикой не существует аналога кривой Пеано.

**3.** Пусть  $C[0; 1]$  — пространство вещественных непрерывных функций на отрезке  $[0; 1]$  с метрикой  $\rho(f, g) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x) - g(x)|$  (« $\text{sup}$ -метрика»). Покажите, что в этом пространстве ни один замкнутый шар положительного радиуса не является компактным.

**4.** Покажите, что не существует непрерывной функции  $F: \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  со следующим свойством: для всякой непрерывной функции  $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  найдется такое  $a \in \mathbb{R}$ , что  $\varphi(x) = F(a, x)$  для всех  $x \in [0; 1]$  (по-ученому говоря, не существует «версальной непрерывной функции»).

(*Указание.* Посмотрите на задачу 2.)

**5.** Докажите, что не существует непрерывного отображения  $\sqrt{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющего тождеству  $(\sqrt{z})^2 = z$  для всех  $z \in \mathbb{C}$ .

**6.** Пусть  $p: Y \rightarrow X$  — накрытие. Покажите, что если  $X$  линейно связно, то все множества  $f^{-1}(x)$  для  $x \in X$  имеют одинаковую мощность.

**7.** На каждой прямой  $\ell \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), проходящей через начало координат, выбрана точка  $a(\ell)$  таким образом, что  $a(\ell)$  непрерывно зависит от  $\ell$ . Докажите, что хотя бы на одной прямой выбрано начало координат.