

Правительство Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет Математики

Программа дисциплины Математика. Лицензиат

для направления 010100.62 "Математика" подготовки бакалавра

Автор программы: Клименко А.В., кандидат ф.-м. наук, klimenko@mi.ras.ru

Рекомендована секцией УМС по математике «__»_____ 2016 г.
Председатель С.М. Хорошкин

Утверждена УС факультета математики «__»_____ 2012 г.
Ученый секретарь Ю.М. Бурман _____

Москва, 2017

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.



1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра.

Программа разработана в соответствии с:

- Стандартом НИУ для направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра, специализации Математика, утвержденным в 2016 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Математика. Лицензиат» являются систематизация и закрепление у студентов фундаментальных знаний по основным обязательным математическим дисциплинам, изучаемых в рамках данной образовательной программы (математический анализ, алгебра, геометрия, дискретная математика, дифференциальные уравнения, топология, теория функций комплексного переменного, теория вероятностей).

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен углубить и систематизировать имеющиеся знания ключевых понятий и результатов основных обязательных математических курсов (см. перечень в п. 2), и имеющиеся между ними взаимосвязи.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость и корректность научных текстов.	Изучение базового курса За счет повышения общефизической и математической культуры в процессе обучения
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Владеет профессиональной лексикой. Распознает и воспроизводит названия основных математических структур, возникающих при изучении данной дисциплины, умеет корректно формулировать утверждения и их доказательства	Продумывание и повторение услышанного на семинарах и лекциях. Беседы с преподавателями во время консультаций. Компетенция достигается в процессе накопления опыта работы по данной теме и общения с преподавателями.



Компетенция	Код по ФГОС/НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки проблем Адекватно оценивает корректность использования тех или иных математических методов, применяемых при формулировке и решении задач	Продумывание базовых понятий курса Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит ключевые идеи, методы и геометрические конструкции эргодической теории Обосновывает и оценивает мотивировки и логические ходы Доказательств.	Продумывание ключевых моментов лекций Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателем

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Для специализации «Математика» настоящая дисциплина является обязательной для студентов 3 курса.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Математический анализ (обзор понятий и результатов)		8			15
2	Алгебра и геометрия (обзор понятий и результатов)		8			15
3	Дискретная математика (обзор понятий и результатов)		4			8
4	Дифференциальные уравнения (обзор понятий и результатов)		5			9
5	Теория функций комплексного переменного (обзор понятий и результатов)		5			9
6	Топология (обзор понятий и результатов)		5			9
7	Теория вероятностей (обзор понятий и результатов)		5			9
Итого:		114	40			74

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год			
		1	2	3	4
Текущий (неделя)	нет				
Итоговый	Экзамен				V

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Формы текущего контроля по дисциплине не предусмотрены.

Итоговым контролем по дисциплине является устный экзамен. На экзамене проверяется, насколько полно студент владеет выносимым на экзамен материалом обязательных предметов. Формат и задания экзамена описаны ниже в п. 9.

7 Содержание дисциплины

1) Математический анализ (обзор понятий и результатов)

Числовые последовательности, пределы и предельные точки, критерий Коши сходимости последовательности.

Предел функции, непрерывность, теорема о промежуточном значении непрерывной функции, равномерная непрерывность непрерывной функции на отрезке.

Сходимость числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов (сходимость абсолютно сходящегося ряда, перестановка членов). Признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. Условно сходящиеся ряды. Примеры условно сходящихся рядов.

Дифференцируемые функции одного переменного. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа о конечном приращении.

Частные производные функции нескольких переменных. Производная (дифференциал) отображения из \mathbf{R}^m в \mathbf{R}^n . Теорема о производной сложной функции.

Теорема о неявной функции для отображения из \mathbf{R}^m в \mathbf{R}^n . Теорема об обратной функции. Производная неявной и обратной функции.

Интеграл Римана функции на отрезке и его основные свойства. Формула Ньютона—Лейбница и существование первообразной для непрерывной функции.

Формула Тейлора для функции одного переменного. Формы остаточного члена.

Экстремумы и выпуклость функций одного переменного. Исследование функции на экстремумы и выпуклость с помощью производных.

Экстремумы функций нескольких переменных, условные экстремумы, множители Лагранжа.

Интеграл Римана по n -мерному промежутку. Сведение кратного интеграла от непрерывной функции к повторному.

Криволинейные интегралы. Вычисление длин кривых и работы силы по криволинейному пути. Формула Грина.

Конструкция интеграла Лебега на пространстве с конечной σ -аддитивной мерой.

Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость, непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

Несобственные интегралы, признаки сходимости несобственных интегралов.

2) Алгебра и геометрия (обзор понятий и результатов)

Аффинные пространства, аффинные отображения. Задание аффинного отображения n -мерного аффинного пространства образами $n + 1$ точки.

Проективные пространства, проективные отображения. Задание проективного отображения n -мерного проективного пространства образами $n + 2$ точек.

Кривые второго порядка в \mathbf{R}^2 и \mathbf{C}^2 , их аффинная и проективная классификации.

Векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, теорема о ранге матрицы.

Определитель матрицы и его свойства. Разложение по строке и столбцу. Определитель произведения матриц.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Формулы Крамера.

Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора, теорема Гамильтона—Кэли.

Корневые подпространства линейного оператора, жорданова нормальная форма.

Квадратичные и билинейные формы, положительная определенность, закон инерции.

Евклидовы линейные пространства. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогонализация Грама—Шмидта.

Вещественные самосопряженные операторы, их диагонализуемость. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Группы, подгруппы, смежные классы, формула Лагранжа для числа смежных классов.

Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, факторгруппы. Теорема о гомоморфизмах групп.

Классификация конечнопорожденных абелевых групп.

Свободные абелевы группы конечного ранга и их подгруппы.

Коммутативные кольца. Примеры колец. Кольца вычетов. Малая теорема Ферма.

Евклидовы кольца. Примеры. Неприводимые элементы, делимость. Наибольший общий делитель. Факториальность евклидовых колец.

Конечные поля. Примеры. Цикличность мультипликативной группы конечного поля.

3) Дискретная математика (обзор понятий и результатов)

Сочетания, сочетания с повторениями, перестановки, биномиальные коэффициенты. Тождества с биномиальными коэффициентами.

Производящие функции. Линейные рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции. Формула Бине для чисел Фибоначчи.

4) Дифференциальные уравнения (обзор понятий и результатов)

Понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его решения. Задача Коши и теорема о существовании и единственности ее решения. Приближение решения задачи Коши итерациями Пикара.

Методы решения дифференциальных уравнений: решение уравнений с разделяющимися переменными, метод вариации постоянных для линейных неоднородных уравнения первого порядка, однородные уравнения.

Решение обыкновенных дифференциальных линейных однородных и неоднородных уравнений n -го порядка и линейных систем первого порядка с постоянными коэффициентами. Квазимногочлены. Матричная экспонента и ее применение.

5) Теория функций комплексного переменного (обзор понятий и результатов)

Комплексная производная, голоморфные функции, условия Коши—Римана. Примеры голоморфных функций. Голоморфность элементарных функций.

Теорема Коши об интеграле голоморфной функции по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши.

Область сходимости степенного ряда с комплексными коэффициентами. Разложение функции, голоморфной в круге, в ряд Тейлора. Интегральная формула для коэффициентов ряда Тейлора.

Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Единственность лорановского разложения. Классификация изолированных особых точек голоморфных функций.

Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычеты и коэффициенты ряда Лорана.

6) Топология (обзор понятий и результатов)

Открытые и замкнутые подмножества \mathbf{R}^n , внутренность и замыкание. Описание открытых подмножеств \mathbf{R} . Непрерывные отображения из \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^m .

Топологические пространства. Компактность, критерий компактности подмножества \mathbf{R}^n .

Связность и линейная связность топологического пространства. Связность отрезка. Пример связного не линейно связного множества.

Гомотопия отображений. Стягиваемость выпуклых множеств.

Фундаментальная группа топологического пространства. Ее вычисление для окружности S^1 и сферы S^2 .

7) Теория вероятностей (обзор понятий и результатов)

Вероятностное пространство. Условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий. Случайные величины. Функция распределения, плотность. Дискретные и непрерывные случайные величины. Математическое ожидание. Дисперсия.

Случайные векторы (наборы случайных величин). Совместные функция распределения и плотность нескольких случайных величин. Независимость случайных величин, её выражение в терминах совместной функции распределения и совместной плотности. Ковариация и коэффициент корреляции. Некоррелированность независимых величин.

Виды сходимости последовательностей случайных величин: почти наверное, по вероятности, по распределению. Закон больших чисел. Усиленный закон больших чисел.

Характеристические функции. Выражение сходимости по распределению в терминах характеристических функций. Центральная предельная теорема.

8 Образовательные технологии

Занятия проходят в формате лекций с активным использованием обратной связи (контрольные вопросы к слушателям, стимулирование вопросов со стороны слушателей).

8.1 Методические рекомендации преподавателю

Рекомендуется в начале лекции (или раздела курса) провести мини-опрос слушателей для выяснения наиболее проблемных тем в рамках очередного раздела.

8.2 Методические указания студентам

Рекомендуется до чтения лекций по очередному разделу курса самостоятельно проработать соответствующий материал по конспектам лекций соответствующих дисциплин и по литературе из списка, а также прорешать задачи по этому разделу. О возникших затруднениях следует сообщить лектору в начале лекции.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

Текущий контроль по дисциплине не предусмотрен.

Итоговый контроль проводится в форме устного экзамена перед комиссией из нескольких сотрудников факультета. Студент должен изложить у доски ответы на два теоретических вопроса и решение одной задачи из заранее выдаваемого списка. Также студенту задаётся несколько коротких дополнительных вопросов, покрывающих (вместе с уже рассказанными основными вопросами и задачей) все разделы курса.

Перечень вопросов и примеры задач к экзамену ежегодно утверждается академическим советом программы.

Каждый теоретический вопрос примерно соответствует одному абзацу из п. 7. Примеры задач приводятся ниже в п. 9.2.

9.1 Критерии выставления оценки за экзамен

При выставлении оценки следует пользоваться примерными критериями, приведёнными в следующей таблице. Сочетанием из трёх знаков показаны ответы на два теоретических вопроса и задачу билета, при этом знак «+» означает верный ответ, знак «±» — ответ с существенными недочётами (ошибками, пробелами), знак «-» — неверный ответ или его отсутствие

Оценка	
8–10	+++ , ±++ , +±+ , ++±
6–7	-++ , +-+ , ++- , ±±± , ±+± , ±±+ , ±±±
4–5	-+± , +-± , ±+- , +±-
1–3	±-+ , -±+ , ±±- , ±-± , -±± и все сочетания с двумя и более знаками «-»

9.2 Примеры задач к экзамену

- 1) Пусть $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, такая, что её интеграл по отрезку $[0, 1]$ равен нулю. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень на интервале $(0, 1)$.
- 2) Найдите восьмую производную функции $f(x) = \sin(\sin x)$ в точке $x = 0$.
- 3) Найдите кривую, касающуюся всех прямых вида $y = px - e^p$.
- 4) Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$ и $2c$ опишите эллипсоид наименьшего объема.
- 5) Вычислите интеграл по единичной окружности, проходимой против часовой стрелки, от функции $(\cos z)/z^3$.
- 6) Решите дифференциальное уравнение $y' = (1 + y^2) \cos x$.
- 7) Колебания пружинного маятника массы m с коэффициентом жесткости пружины k^2 затухают благодаря трению, пропорциональному скорости маятника. При каком коэффициенте трения маятник не дойдет до положения равновесия ни разу за конечное время; пройдет это положение один раз, пройдет положение равновесия бесконечно много раз?
- 8) Пусть Y — топологическое пространство, имеющее форму буквы Y , X — топологическое пространство, имеющее форму буквы X , а $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Докажите, что существуют две различные точки $a, b \in X$, для которых $f(a) = f(b)$.
- 9) Найдите жорданову нормальную форму оператора третьей производной на пространстве многочленов от одной переменной степени не выше n .
- 10) Найдите размерность пространства многочленов от n переменных общей степени k .
- 11) Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ , а минимальный μ , где $\chi(\lambda) = \lambda^6 - 1$, $\mu(\lambda) = \lambda^3 - 1$?
- 12) Докажите, что в евклидовом пространстве равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно лишь в случае, когда векторы x и y отличаются неотрицательным скалярным множителем.
- 13) Что можно сказать про группу, у которой нет нетривиальных собственных подгрупп?
- 14) Постройте изоморфизм групп S_3 и $SL_2(\mathbf{Z}_2)$.
- 15) Докажите, что конечная абелева группа G порядка n является циклической тогда и только тогда, когда для любого d , делящего n , в G существует единственная подгруппа порядка d .
- 16) Вычислите производящие функции для последовательностей
 а) $1^2, 2^2, 3^2, \dots, k^2, \dots$; б) $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \dots, (n+k)^2, \dots$
- 17) Равнобедренный треугольник на плоскости образован единичным вектором вдоль оси абсцисс и единичным вектором в случайном направлении. Найдите распределение длины третьей стороны.
- 18) Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найдите функцию распределения случайной величины $(\xi + |\xi|)/2$.



10 Порядок формирования оценок по дисциплине

Итоговая оценка по дисциплине совпадает с оценкой за экзамен.

Указания по выставлению оценки за экзамен приведены в предыдущем пункте.

11 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

11.1 Основная литература

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. Изд. 3-е, перераб. и доп.–М.: Факториал Пресс, 2002.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.–Изд. 7-е.–М.: Университет, 2007.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 8-е. М.: Едиториал УРСС, 2005.
4. Городенцев А. Л. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1. М.: МЦНМО, 2013.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу (для ВУЗов).–М.: АСТ, 2003.
6. Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу. МИАН, 2004, т. 1, 2.
7. Зорич В.А. Математический анализ: в 2 т. – Изд. 5-е.– М.: МЦНМО, 2007.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
9. Ландо С.К. Введение в дискретную математику. М.: МЦНМО, 2012
10. Прасолов В.В. Наглядная топология. – Изд. 2-е.– М.: МЦНМО, 2006.
11. Прасолов В.В. Задачи по топологии. – М.: МЦНМО, 2008.
12. Рудин У. Основы математического анализа.–Спб.: Лань, 2002.
13. Сборник задач по алгебре/Под ред. А.И.Кострикина. – М.: Физматлит. 2001
14. Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3 томах. – 8-е изд.– М.: Физматлит, 2006.
16. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Либроком, 2011
17. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. – Спб.: Лань, 2002.
18. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004.

11.2 Дополнительная литература

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра – Пер. с нем.–Спб.: Лань, 2004.
2. Вейль Г. Алгебраическая теория чисел.–М.:УРСС, 2003
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру.–В 3-х частях.–Изд. 2-е, испр.–М.: Физматлит, 2001.
4. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия.–3-е изд., стер.–Спб.: Лань, 2005.
5. Львовский С.М. Лекции по математическому анализу. – М.: Издательство МЦНМО, 2008.
6. Прасолов В.В.. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии.– М.: МЦНМО, 2004. Прасолов В.В. Элементы теории гомологий.– М.: МЦНМО, 2006.
7. Рудин У. Функциональный анализ. – Пер. с англ.– М.: Мир, 1978.
8. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. – Изд. 4-е.– М.: Едиториал УРСС, 2007.