

Правительство Российской Федерации

**Государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования**

**«Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики»**

Факультет компьютерных наук
Департамент анализа данных и искусственного интеллекта

Программа дисциплины

**Рабочая программа дисциплины «Дискретная математика для разработки
алгоритмов и программ»**

для образовательной программы «Науки о данных»
направления подготовки 01.04.02. Прикладная математика и информатика
уровень - магистр

Разработчики программы:

Шапкин П. А., кандидат технических наук, доцент
Большакова Е.И., кандидат физ.-мат. наук, доцент (eibolshakova@hse.ru)

Одобрена на заседании департамента анализа данных и искусственного интеллекта
«__»_____ 2015 г.

Руководитель департамента анализа данных и искусственного интеллекта
С.О. Кузнецов _____

Утверждена Академическим советом образовательной программы
«__»_____ 2015 г., № протокола _____

Академический руководитель образовательной программы
С.О. Кузнецов _____

Москва, 2015

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями
университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.*

1. Аннотация

Адаптационный курс «Дискретная математика для разработки алгоритмов и программ» предназначен для поддержки магистров первого года обучения по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», недостаточно знающих те разделы дискретной математики, которые являются базовыми для освоения дисциплин магистерской программы «Математическое моделирование».

В курсе излагаются базовые понятия алгебры логики, исчисления предикатов, теории множеств, логических исчислений, теории графов, основы теории типов, а также связь указанных формализмов с программированием.

2. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов первого года обучения по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», обучающихся по магистерской программе «Науки о данных» и изучающих дисциплину «Дискретная математика (адаптационный курс)».

Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом ВПО ГОБУ НИУ ВШЭ;
- Образовательной программой «Науки о данных» подготовки магистра направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»;
- Рабочим учебным планом университета подготовки магистра по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденным в 2014 г.

3. Цели освоения дисциплины

Данный адаптационный курс призван систематизировать знания по базовым разделам дискретной математики, необходимые для освоения цикла дисциплин программы «Науки о данных» указанного направления.

4. Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате изучения адаптационного курса студенты должны:

- Знать базовые понятия дискретной математики и связанные с ними основополагающие утверждения, знать основные подходы к оценке сложности вычислений;
- Понимать особенности дискретных объектов и логических теорий, различать функции и отношения, графы и деревья;
- Уметь математически корректно обозначать объекты дискретной математики и записывать логические формулы; определять общие свойства множеств, функций, отношений; вычислять количество комбинаторных объектов;
- Иметь навыки доказательства утверждений методом математической индукции;
- Понимать связь базовых формализмов дискретной математики с языками программирования.

В результате прохождения курса студент осваивает и развивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат	ИК-М7.3 пми	Студент может сформулировать основные понятия и теоремы дискретной математики (ДМ), умеет определять и доказывать свойства объектов ДМ	Изучение и сравнительный анализ базовых понятий ДМ; решение соответствующих упражнений и задач.
Способность описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат прикладной математики при решении междисциплинарных проблем	ИК-М5.1 пми	Студент может математически корректно и адекватно записать логические формулы и другие условия, описывающие дискретные объекты прикладной задачи	Изучение особенностей математических формализмов, включая язык предикатов; решение соответствующих упражнений и задач.

5. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к адаптационным.

Изучение дисциплины базируется на знаниях по дискретной математике, частично полученных студентами в средней школе и на младших курсах университетов. Специфические требования отсутствуют. Студенты должны быть готовы к восприятию сжатого систематизирующего блока, охватывающего основные темы в области дискретной математики.

Основные положения дисциплины будут использованы в дальнейшем при изучении ряда дисциплин магистерской программы, в частности, дисциплины:

- Современные методы анализа данных,
- Упорядоченные множества в анализе данных,
- Прикладная алгебра.

6. Тематический план дисциплины «Дискретная математика»

№	Название темы	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1.	Булевы функции и алгебра логики	14	2	2	10
2.	Исчисление предикатов	14	2	2	10
3.	Множества, отношения, функции	28	4	4	20
4.	Логические исчисления	14	2	2	10
5.	Графы и деревья	14	2	2	10
6.	Основы программирования: формализация вычислений и системы типов	14	2	2	10

7.	Основы программирования: объектно-ориентированное программирование	14	2	2	12
	Итого	114	16	16	82

7. Формы контроля знаний студентов

Курс читается в первом модуле.

Тип контроля	Форма контроля	Параметры
Текущий (пятая неделя)	Домашнее задание	Письменная работа 240 минут
Текущий (шестая неделя)	Контрольная работа	Письменная работа 60 минут
Текущий (седьмая неделя)	Курсовой проект	Защита проекта
Итоговый	Экзамен	Устный экзамен

Критерии оценки знаний

Текущий контроль включает несколько заданий (вопросов и задач) по материалу дисциплины, студент должен продемонстрировать уверенное решение не менее трети задач. Целью курсового проекта является разработка комплекса программ, решающих задачи по различным темам курса. Результаты проекта представляются в виде отчета. Итоговый зачет содержит набор задач и теоретических вопросов по различным темам курса.

Порядок формирования оценки по дисциплине

Оценки за домашнее задание, контрольную работу, курсовой проект и экзамен высчитывается по десятибалльной шкале, согласно формуле:

$$O = C / C_{\text{макс}} \times 10,$$

где C — сумма баллов, набранная студентом, $C_{\text{макс}}$ — максимально возможная сумма баллов за работу, и округляется до целого числа арифметическим способом,

Накопленная оценка высчитывается по десятибалльной шкале, согласно формуле:

$$0,3 * C_{\text{КР}} + 0,4 * C_{\text{ДЗ}} + 0,3 * C_{\text{КП}},$$

где $C_{\text{КР}}$ — оценка за контрольную работу, $C_{\text{ДЗ}}$ — оценка за домашнее задание, $C_{\text{КП}}$ — оценка за курсовой проект, и округляется до целого числа арифметическим способом.

Итоговая оценка по дисциплине выставляется по десятибалльной шкале, согласно формуле:

$$0,6 * C_{\text{накоп}} + 0,4 * C_{\text{экс}},$$

где $C_{\text{накоп}}$ — накопленная оценка, $C_{\text{экс}}$ — оценка за экзамен, и округляется до целого числа арифметическим способом.

Таблица соответствия оценок по десятибалльной и системе зачет/незачет

Оценка по 10-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале
1	незачет
2	
3	
4	

5	зачет
6	
7	
8	
9	
10	

Таблица соответствия оценок по десятибалльной и пятибалльной системе

По десятибалльной шкале	По пятибалльной системе
1 – неудовлетворительно 2 – очень плохо 3 – плохо	неудовлетворительно – 2
4 – удовлетворительно 5 – весьма удовлетворительно	удовлетворительно – 3
6 – хорошо 7 – очень хорошо	хорошо – 4
8 – почти отлично 9 – отлично 10 – блестяще	отлично – 5

8. Содержание программы по темам

Тема 1. Булевы функции и алгебра логики

1. Высказывание и высказывательные функции. Таблицы истинности высказывательных функций. Существенные и несущественные переменные. Элементарные функции алгебры логики. Законы алгебры логики.

2. Реализация функций формулами, равносильные формулы. Равносильные преобразования формул, алгебра булевых функций. Булевы алгебры. Замыкание множества булевых функций, замкнутые и полные классы.

3. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы. Совершенные нормальные формы и их построение.

4. Функциональная полнота и базис. Замкнутые классы высказывательных функций. Критерий Поста-Яблонского полноты системы высказывательных функций.

Основная литература

1. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. 6-е изд. – СПб: Издательство «Лань», 2009.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб: Питер, 2009.

Дополнительная литература

3. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2008.
4. Кук В., Бейз Г., Компьютерная математика – М: Наука, 1990.
5. Набебин А.А., Кораблин Ю.П. Математическая логика и теория алгоритмов. – Научный мир, 2008. – 343 с.
6. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика – М.: Академия, 2009.

Тема 2. Исчисление предикатов

1. Исчисление предикатов первого порядка (ИП): функциональные и предикатные символы, предметные константы, логические связки и кванторы. Термы и формулы ИП. Свободные и связанные переменные.

2. Аксиомы и правила вывода узкого ИП. Интерпретация ИП, свойства ИП. Логические законы.

Основная литература

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб: Питер, 2009.
2. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. 6-е изд. – СПб: Издательство «Лань», 2009.

Дополнительная литература

3. Д. Гильберт, В. Аккерман. Основы теоретической логики. — М. : Изд-во иностр. лит., 1947.
4. А. В. Идельсон, Г. Е. Минц. Математическая теория логического вывода. — М.: Наука, 1967. — 351 с. Серия «Математическая логика и основания математики».

Тема 3. Множества, отношения, функции

1. Элементы и множества, задание множеств. Сравнение множеств, мощность множества. Операции над множествами, свойства операций. Алгебра множеств. Булеан. Разбиения и покрытия. Множества и кортежи. Декартово произведение множеств.

2. Бинарные и многоместные отношения. Обратное отношение, композиция отношений, степень отношения. Свойства отношений: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, линейность. Отношение эквивалентности, классы эквивалентности, фактор-множество. Отношение порядка. Замыкание отношений.

3. Функциональные отношения. Свойства функций: инъективность, сюръективность, биективность. Монотонные функции. Обратная функция, суперпозиция функций.

Основная литература

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб: Питер, 2009.
2. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. 6-е изд. – СПб: Издательство «Лань», 2009.

Дополнительная литература

3. Кук В., Бейз Г., Компьютерная математика – М: Наука, 1990.
4. Спирина М.С., Спиринов П.А. Дискретная математика – М.: Академия, 2009.
5. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004

Тема 4. Логические исчисления

1. Формализация утверждений и рассуждений. Понятие формальной теории: алфавит, правила построения формул, аксиомы, правила вывода. Выводимость формул, теоремы. Интерпретация формальной теории. Выполнимые и общезначимые формулы. Логическое следствие и эквивалентность. Свойства теории: непротиворечивость, полнота, разрешимость.

2. Исчисление высказываний (ИВ): пропозициональные переменные, логические связки, формулы. Аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний. Теоремы ИВ и производные правила вывода. Свойства ИВ.

4. Правила логического вывода и математические доказательства. Принцип математической индукции. Простая и строгая индукция для натуральных чисел. Обобщенная индукция для вполне упорядоченных множеств.

Основная литература

1. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. 6-е изд. – СПб: Издательство «Лань», 2009.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб: Питер, 2009.
3. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004

Дополнительная литература

4. Набебин А.А., Кораблин Ю.П. Математическая логика и теория алгоритмов. – Научный мир, 2008. – 343 с.
5. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2008.
6. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика – М.: Академия, 2009.

Тема 5. Графы и деревья

1. Вершины и ребра графа, смежность и инцидентность. Изоморфизм графов. Маршруты, пути, циклы. Подграфы. Связность графа, компоненты связности. Полные, ациклические и двудольные графы. Эйлеровы и Гамильтоновы циклы.

2. Графы и бинарные отношения. Матрица смежности и матрица связности. Отношение достижимости для орграфов. Сильная, односторонняя и слабая связность для орграфов.

3. Деревья, их основные свойства. Свободные, ориентированные и упорядоченные деревья. Схемы обхода деревьев.

Основная литература

1. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. 6-е изд. – СПб: Издательство «Лань», 2009.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб: Питер, 2009.

Дополнительная литература

3. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2008.
4. Зыков А.А. Основы теории графов. – М. : Вузовская книга, 2004. – 664 с.
5. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика – М.: Академия, 2009.

Тема 6. Основы программирования: формализация вычислений и системы типов

1. Императивный и функциональный подход в программировании. Программа как композиция функций. Формализация вычислимых функций. Понятие лямбда-терма.

Связанные и свободные переменные. Правила редукции как формализация процесса вычислений.

2. Программы и типы. Правила типизации простого типизированного лямбда-исчисления. Связь систем типизации и логических исчислений, изоморфизм Карри-Говарда.

Основная литература

1. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. 6-е изд. – СПб: Издательство «Лань», 2009.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб: Питер, 2009.

Дополнительная литература

3. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика // М.: Мир, 1985.
4. Пирс Б. Типы в языках программирования // М.: Лямбда Пресс Добросвет. 2012. 656 с.
5. Вольфенгаген В.~Э. Комбинаторная логика в программировании: Вычисления с объектами в примерах и задачах // М.: АО «Центр ЮрИнфоР», 2003. 342 с.

Тема 7. Основы программирования: объектно-ориентированное программирование

1. Парадигмы программирования. Объектно-ориентированный подход. Правила типизации простого типизированного лямбда-исчисления. Связь систем типизации и логических исчислений, изоморфизм Карри-Говарда.

Основная литература

1. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования / Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влиссидес Дж. — СПб.: Питер, 2007. — 366 с.
2. Бадд Т. Объектно-ориентированное программирование в действии. — СПб.: Питер, 1997. — 464 с.

Дополнительная литература

3. Abadi M., Cardelli L. A theory of objects / M. Abadi, L. Cardelli, Springer Berlin, 1996.

9. Образовательные технологии

В преподавании данной дисциплины упор делается на повторение и практическое осмысление основных понятий дискретной математики, для чего по ходу изложения приводится большое количество примеров, решаются упражнения и задачи.

Методические указания студентам

Из основной и дополнительной литературы для изучения тем курса рекомендуется выбирать те источники, которые по степени формальности изложения материала наиболее соответствуют уровню текущей подготовки студента.

10. Оценочные средства для текущего и итогового контроля

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Тема 1.

1. Какие функции называют высказывательными?

2. Укажите основные законы алгебры логики.
3. Что такое дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма?
4. Как привести формулу к совершенной нормальной форме?
5. Что такое полный класс функций? Приведите примеры.

Тема 2.

1. Дайте определение формулы исчисления предикатов.
2. Дайте определение частных и общих высказываний и методов их формализации при помощи кванторов.
3. Что такое коллизия переменных? Приведите примеры различных видов коллизий переменных.
4. Укажите основные законы исчисления предикатов.

Тема 3.

5. Что такое множество? Какими способами можно задать множество?
6. Укажите основные свойства операций над множествами.
7. Что такое разбиение множества?
8. Чем кортеж отличается от множества?
9. Чем асимметричность отличается от антисимметричности?
10. Какими свойствами обладает отношение эквивалентности?
11. Какими свойствами обладает отношение линейного порядка?
12. Что такое инъективная функция? Сюръективная функция? Биъективная функция?

Тема 4.

13. Как задается формальная теория (система)?
14. Что такое правильно построенная формула?
15. Укажите основные свойства формальных теорий.
16. Опишите язык исчисления высказываний.
17. Что такое выполнимая формула? тавтология?
18. Сформулируйте правило *modus ponens*.
19. Опишите язык исчисления предикатов первого порядка.

Тема 5.

20. Что такое отношение смежности в графе? отношение инцидентности?
21. Какие способы представления графов вы знаете?
22. Чем граф общего вида отличается от орграфа?
23. Определите понятие изоморфизма графов.
24. Является ли отношение изоморфности графов отношением эквивалентности?
25. Что такое связность графа? компонента связности графа?
26. Определите понятия слабой и сильной связности для орграфов.
27. Приведите пример Гамильтонова цикла.
28. Что такое лес и дерево?
29. Определите понятие корневого дерева.
30. Приведите пример ориентированного дерева.

Тема 6.

31. Каково определение понятия терма лямбда-исчисления?
32. Каков набор основных правил редукции термов лямбда-исчисления? Какие свойства вычислений описываются различными правилами?
33. Каков набор правил типизации лямбда-термов?

Тема 7.

34. Дайте определение понятиям класса, экземпляра и метода.
35. Что такое динамическая диспетчеризация сообщений, в чем ее отличие от вызова функции?

36. Определите понятия наследования в объектно-ориентированном программировании, конструктора, деструктора.

Примеры заданий по итоговому контролю (тесту)

1. Определить свойства (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) отношения R :
 $R = \{ (x, y): x, y - \text{натуральные числа, } x = y^2 \}$;
2. Пусть R – множество вещественных чисел, и Q – отношение на $R \times R$, определенное следующим образом: $(x, y) Q (v, w)$ тогда и только тогда, когда $x < v$ и $y < w$. Является ли Q отношением порядка? Если да, то является ли этот порядок полным?
3. Для булевой функции, заданной формулой $z \wedge (x \rightarrow \neg y)$, построить таблицу истинности, а также эквивалентную совершенную дизъюнктивную нормальную форму.
4. Найти количество булевых функций от n переменных, среди которых k – фиктивных.
5. Последовательность высказываний $\{A_n\}$, $n \geq 1$ определена рекуррентным соотношением:
 $A_n = A_{n-1} \wedge (A_{n-2} \vee A_{n-3})$ при $n > 3$; высказывания A_1 и A_3 истинны, а A_2 – ложно. Истинно или ложно высказывание A_n ? Выразить A_n через A_1, A_2 и A_3 , доказать эту формулу математической индукцией, указав применяемую версию индукции.
6. При каких условиях запись $\exists c (P(S(c, R(y, q), q)) \rightarrow \forall f W(z, f))$ является формулой исчисления предикатов первого порядка (ИП)?
7. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существует такое число C , что $|x_n| < C$ для всех n . Дайте определение неограниченной последовательности.
8. Отношение R из задачи 1 определено на множестве чисел $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Построить соответствующий граф отношения.
9. Сколько существует различных графов с n вершинами?
10. Приведите пример двух неизоморфных свободных деревьев с 5 узлами и двух неизоморфных ориентированных (корневых) деревьев с 7 узлами.
11. Сколько различных цепочек (последовательностей букв) можно составить из букв слова *метаматематика*? (Достаточно указать формулу подсчета).
12. 70 студентов курса изучают английский язык, 50 – немецкий, 40 – французский. Известно, что 30 студентов изучают английский и немецкий языки, 20 студентов – английский и французский, 15 – немецкий и французский, а 10 студентов изучают все три языка. Определить число студентов, изучающих хотя бы один из указанных языков.

11. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Базовый учебник

Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб: Питер, 2009. Главы 1, 3, 4, 5, 7, 9.

Основная литература

1. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. 6-е изд. – СПб: Издательство «Лань», 2009.
2. Кук В., Бейз Г. Компьютерная математика. – М: Наука, 1990.
3. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Дополнительная литература

4. Абрамов С.А. Лекции о сложности алгоритмов. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009.
5. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика – М.: Наука, 1975.
6. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2008.
7. Громкович Ю. Теоретическая информатика. Введение в теорию автоматов, теорию вычислимости, теорию сложности, теорию алгоритмов, рандомизацию, теорию связи и криптографию: пер. с нем. / Под ред. Б.Ф.Мельникова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
8. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
9. Зыков А.А. Основы теории графов. – М. : Вузовская книга, 2004. – 664 с.
10. Набебин А.А., Кораблин Ю.П. Математическая логика и теория алгоритмов. – Научный мир, 2008. – 343 с.
11. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М. : Мир, 1988. – 213 с.
12. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика – М.: Академия, 2009.
13. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика // М.: Мир, 1985.
14. Пирс Б. Типы в языках программирования // М.: Лямбда Пресс Добросвет. 2012. 656 с.
15. Вольфенгаген В.~Э. Комбинаторная логика в программировании: Вычисления с объектами в примерах и задачах // М.: АО «Центр ЮрИнфоР», 2003. 342 с.
16. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования / Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влиссидес Дж. — СПб.: Питер, 2007. — 366 с.
17. Бадд Т. Объектно-ориентированное программирование в действии. — СПб.: Питер, 1997. — 464 с.
18. Abadi M., Cardelli L. A theory of objects / M. Abadi, L. Cardelli, Springer Berlin, 1996.

Автор программы: _____ / Шапкин П. А. /