

**Правительство Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»**

Факультет Компьютерных наук  
Департамент больших данных и информационного поиска  
Базовая кафедра Яндекс

УТВЕРЖДАЮ  
Академический руководитель  
образовательной программы  
«Науки о данных»  
по направлению 01.04.02  
«Прикладная математика и информатика»  
С.О. Кузнецов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2015 г.

**Программа дисциплины «Комбинаторная оптимизация»**  
для направления 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" подготовки  
магистра  
для магистерской программы "Науки о данных"

**Автор программы:**

Бабенко М.А., к.ф.-м.н. (maxim.babenko@gmail.com)

Одобрена на заседании базовой кафедры Яндекс «\_\_» \_\_\_\_\_ 2015 г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ М.А. Бабенко

Рекомендована Академическим советом образовательной программы  
«Науки о данных» «\_» \_\_\_\_\_ 2015 г.

Менеджер базовой кафедры Яндекс \_\_\_\_\_ И.И. Алескерова

Москва, 2015

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения разработчика программы.*



## Пояснительная записка

### Автор программы

Бабенко М.А., к.ф.-м.н.

### Требования к студентам

Данный курс предназначен для студентов, успешно освоивших годовой предмет «Алгоритмы и структуры данных для поиска». Для понимания излагаемого материала необходимо обладать знаниями по линейной и матричной алгебре на уровне первого курса вуза, а также знакомство с основными терминами теории графов.

### Аннотация

Дисциплина «Комбинаторная оптимизация» предназначена для подготовки магистров 01.04.02 – Прикладная математика и информатика.

Цель данного курса – познакомить слушателей с типичными классами задач оптимизации, в которых множество допустимых решений имеет явно выраженную "комбинаторную" природу, а также с эффективными способами их решения. Большое число примеров подобных задач возникает, например, в теории графов (паросочетания, пути, упаковки, покрытия и раскраски и т.д.).

Помимо чисто комбинаторных методов в рамках данного курса акцент будет также сделан на применении теории линейного и целочисленного программирования. Помимо стандартных оптимизационных инструментов (таких как симплекс-метод, метод эллипсоидов, метод внутренней точки) ключевыми здесь будут понятия линейной двойственности, а также различные свойства целочисленности линейных программ (тотальная унимодулярность и тотальная двойственная целочисленность). Все вместе это позволит нам единообразно описать широкий класс комбинаторных задач, решаемых за полиномиальное время.

Кроме точных алгоритмов (находящих искомый оптимум за полиномиальное время) мы также остановимся на приближенных методах решения тех задач, для которых точное решение быстро найти, по-видимому, невозможно. Здесь на помощь нам снова придут линейные релаксации, которые позволяют эффективно строить приближенные решения, имеющие гарантированную погрешность.

Программа курса предусматривает лекции (30 часов) и практические занятия (30 часов).

### Учебные задачи курса

Целью данного курса является ознакомление слушателей с типичными классами задач оптимизации, в которых множество допустимых решений имеет явно выраженную "комбинаторную" природу, а также с эффективными способами их решения. Все темы курса снабжены теоретическими заданиями, призванными дать возможность осознать возможности применения разбираемых разделов теории.



Тематический план дисциплины «Комбинаторная оптимизация»

№	Название темы	Всего часов по дисциплине	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Сем. и практика	
1	Линейное программирование и комбинаторные задачи	12	2	2	5
2	Простейшие свойства линейных программ	12	2	2	5
3	Отделимость и критерии разрешимости	12	2	2	10
4	Линейная двойственность	14	2	2	5
5	Задача о кратчайших путях в графе как задача линейного программирования	12	2	2	10
6	Задача о цикле минимального среднего веса	12	2	2	10
7	Задача о циркуляции минимальной стоимости	14	2	2	10
8	TDI-системы	12	2	2	10
9	Цепи и антицепи	12	2	2	10
10	Матроиды	12	2	2	10
11	Паросочетания и линейное программирование	12	2	2	10
12	Паросочетания в регулярных графах	14	2	2	5
13	Теория игр и линейное программирование	16	2	2	10
14	Задача покрытия множества	12	2	2	10
15	Метод эллипсоидов и SDP	12	2	2	10
	Итого	190	30	30	130

## I. Источники информации

### Список литературы

#### Основная литература

1. A. Schrijver: Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency
2. A. Schrijver: Theory of Integer and Linear Programming
3. Корте Б., Фиген Й.: Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы
4. Ловас Л., Пламмер М.: Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии  
A. Rajaraman, J. Ullman, Mining of Massive Datasets



## II. Формы контроля и структура итоговой оценки

Текущий контроль - домашняя работа в первом модуле, контрольная работа в первом модуле.

Итоговый контроль – письменный экзамен (120 мин.)

Итоговая оценка вычисляется следующим образом:

$0,1 \cdot \text{оценка за домашнюю} + 0,2 \cdot \text{оценка за контрольную} + 0,7 \cdot \text{оценка за экзамен}$ .

Таблица соответствия оценок по десятибалльной и системе зачет/незачет

Оценка по 10-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале
1	Незачет
2	
3	
4	Зачет
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Таблица соответствия оценок по десятибалльной и пятибалльной системе

По десятибалльной шкале	По пятибалльной системе
1 – неудовлетворительно	неудовлетворительно – 2
2 – очень плохо	
3 – плохо	
4 – удовлетворительно	удовлетворительно – 3
5 – весьма удовлетворительно	
6 – хорошо	хорошо – 4
7 – очень хорошо	
8 – почти отлично	отлично – 5
9 – отлично	
10 - блестяще	

## III. Программа дисциплины «Комбинаторная оптимизация»

### Тема 1. Линейное программирование и комбинаторные задачи.

Примеры комбинаторных задач: максимальные паросочетания и минимальные вершинные покрытия. Комбинаторная двойственность в оптимизационных задачах.



Комбинаторные препятствия в задачах существования. Целочисленные линейные программы. Линейные релаксации.

### **Тема 2. Простейшие свойства линейных программ.**

Линейные программы, формы записи. Элиминация Фурье-Мощкина. Полиэдры и их вершины. Свойства вершин. Базисные допустимые решения. Вырожденность. Тотально унимодулярные матрицы. Целочисленность полиэдра, задаваемого тотально унимодулярной матрицей. Целочисленность полиэдра паросочетаний. Симплекс метод решения задачи линейного программирования.

### **Тема 3. Отделимость и критерии разрешимости**

Полиэдральные и конечнопорожденные конусы, их эквивалентность. Сертификаты несовместности линейных программ, лемма Фаркаша.

### **Тема 4. Линейная двойственность**

Задача линейного программирования в стандартной форме и двойственная к ней. Слабая и сильная двойственность. Построение двойственной задачи в общей форме. Теорема Кенига-Эгервари как следствие линейной двойственности.

### **Тема 5. Задача о кратчайших путях в графе как задача линейного программирования.**

Двойственная задача. Потенциалы и приведенные длины ребер. Условия дополняющей нежесткости в линейном программировании. Алгоритм наращивания дерева. Консервативные и неконсервативные длины. Критерий консервативности в терминах наличия допустимых двойственных решений. Поиск допустимых решений при отрицательных длинах.

### **Тема 6. Задача о цикле минимального среднего веса.**

Сдвиги длин. Приближенный алгоритм поиска минимального среднего цикла. Алгоритм Карпа для задачи о цикле минимального среднего веса.

### **Тема 7. Задача о взвешенном двудольном паросочетании.**

Прямо-двойственный алгоритм.

### **Тема 8. Задача о циркуляции минимальной стоимости.**

Алгоритм проталкивания вдоль циклов минимального среднего веса. ерс-оптимальные и ерс-точные циркуляции. Оценки количества проталкиваний.

### **Тема 9. TDI-системы.**

Целочисленные векторы в конусе. Базисы Гильберта.



### **Тема 10. Цепи и антицепи.**

Политопы цепей и антицепей. Минимаксные соотношения между цепями и антицепями.

### **Тема 11. Матроиды**

Независимые множества, базы, ранг. Судмодулярность ранга. Жадный алгоритм. Политоп матроида. Полиэдральное доказательство корректности жадного алгоритма. Пересечение политопов двух матроидов. Объединение матроидов. Сведение проверки независимости в объединении к пересечению матроидов. Задача об оптимальном ориентированном дереве.

### **Тема 12. Паросочетания и линейное программирование**

Критерий максимальности паросочетания. Теорема Холла. Теорема Кенига. Целочисленность политопов бистохастических матриц, целочисленность политопов паросочетаний в двудольных графах.

### **Тема 13. Паросочетания в регулярных графах**

Существование совершенного паросочетания в регулярном двудольном графе. Задача о реберной раскраске графа. Формулировка теоремы Визинга. Задача о максимальном потоке в графах, формулировка в виде линейной программы, доказательство тотальной унимодулярности матрицы этой программы. Алгоритм поиска максимального паросочетания в регулярном двудольном графе за  $O(|E| \log d)$ , алгоритм построения реберной раскраски за  $O(|E| \log d)$ . Теорема Петерсона. Поиск регулярных и почти-регулярных подграфов в регулярных графах.

### **Тема 14. Теория игр и линейное программирование**

Игры с нулевой суммой, теорема Неймана.

### **Тема 15. Задача покрытия множества.**

NP-трудность,  $\log(n)$ -приближенный алгоритм. Формулировка в виде линейной программы, построение  $f$ -приближения из решения линейной программы. Эффективный Primal-Dual алгоритм для построения  $f$ -приближения. Рандомизированный алгоритм округления решения для получения  $\log(n)$ -приближения.

### **Тема 16. Метод эллипсоидов и SDP**

Задача о поиске максимального разреза в графе: NP-полнота, 0.5-приближенный алгоритм, 0.87-приближенный алгоритм.



#### **IV. Методические указания студентам**

Самостоятельная работа студента предусматривает выполнение теоретических заданий, направленных на овладение техникой построения алгоритмов, оперирующих большими данными, а также практических заданий по программной реализации этих алгоритмов.

Автор программы: \_

/ <Бабенко М.А.> /