УДК 330.42

Василий Михайлович Гончаренко

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20
vgoncharenko@hse.ru

Александр Борисович Шаповал

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20
abshapoval@gmail.com

Лариса Владимировна Липагина

Финансовый университет при Правительстве РФ
125993, Москва, Ленинградский просп., 49
LLipagina@fa.ru

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И МОДЕЛЬ МНОГОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ С МОНОПОЛИСТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИЕЙ

В работе описана многосекторная модель с монополистической конкуренцией и рассмотрены примеры функций полезности, заданных гипергеометрическими функциями, при которых выполняются условия существования и единственности общего равновесия в модели.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, монополистическая конкуренция, общая функция полезности, эластичность замещения.

Введение

В работе [7] была построена и исследована модель многосекорной экономики с монополистической конкуренцией. При некоторых ограничительных условиях было доказано существование симметричного общего равновесия в модели, построенной в предположении, что рабочие мобильны внутри своих секторов, но не могут переходить из сектора в сектор. При этом предпочтения потребителей описывались функцией полезности общего вида. В качестве примеров полезностей, удовлетворяющих условиям существования и единственности равновесия, были рассмотрены гипергеометрические функции.

Основной целью данной работы изложение необходимых сведений из теории гипергеометрических функций, описание экономической модели и изучение примеров, для которых общее равновесие существует и единственно.

Гамма-функция

Для гамма-функции $\Gamma(z), z \in C$ существует несколько известных представлений, которые могут быть использованы в зависимости от области ее применения. Так, можно определить гамма-функцию с помощью интеграла (интегральное представление Эйлера)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

который является аналитической функцией, если действительная часть числа z больше 0, $\operatorname{Re} z > 0$.

Для изучения свойств гамма-функции более удобно (см., например, [7]) представление Вейрштрасса

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \right\}$$

в виде произведения, которое является аналитической фукнцией всюду, кроме точек $z = 0, -1, -2, \ldots$, в которых гамма-функция имеет простые полюса; γ – постоянная Эйлера

$$\gamma = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln m \right) = 0{,}5772157.$$

Среди свойств гамма функции отметим основное рекуррентное соотношение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

в силу которого иногда говорят, что функция $\Gamma(z)$ обобщает понятие факториала на поле комплексных чисел. Так как $\Gamma(1) = 1$, то $\Gamma(n) = n!$.

Кроме этого, можно доказать, что

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Последнее соотношения используется для связи гамма-функции с тригонометрическими. Упомянем также, что интеграл Эйлера первого рода

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

определенный для всех положительных значений p, q, может быть записан через гамма-функции

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Наконец, с помощью равенства $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ и основного реккурентного соотношения легко могут быть получены значения гамма-функции для всех полуцелых значения аргумента.

Гипергеометрическая функция

Гипергеометрическим рядом называется (см., например, [8]) ряд

$$1+\frac{ab}{c}\cdot\frac{z}{1}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\cdot\frac{z^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\cdot\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

Если комплексная плоскость разрезана по лучу $[1;+\infty)$, то этот ряд определяет аналитическую функцию на комплексной плоскости, которая обозначается $F(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)$ и называется *гипергеометрической* функцией. Заметим, что многие элементарные функции могут быть выражены через гипергеометрическую, например,

$$(1+z)^{\alpha}=F(-\alpha,\gamma;\gamma;-z),\ \ln(1+z)=zF(1,1;2;-z),\ \arcsin z=zF(1/2,1/2;3/2;z^2)$$

где γ – произвольная константа.

Для связи с гамма-функцией заметим, что

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

В прикладных экономических задачах (см., например, [1]) часто используются *обобщенные гипергеометрические функции*

$${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{p}(a_1)_n\ldots(a_p)_n}{\prod_{k=1}^{q}(b_1)_n\ldots(b_q)_n}\cdot\frac{z^n}{n!},$$

где $(c)_n$ – символ Похгаммера, который вычисляется согласно правилу

$$(c)_n=\prod_{k=1}^{n}(c+k-1)=c(c+1)\ldots(c+n-1)=\frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}.$$

Легко видеть, что ряд для ${}_0F_0(z)$ представляет из себя экспоненту, а ${}_1F_0(a;z)$ – ряд для $(1-z)^{-a}$. Поэтому гипергеометрическую функцию часто называют обобщением показательной.

Гипергеометрическая функция и ее обобщения находят свое применение в различных областях математики, от алгебраической топологии до теоретической физики (см., например, обзор [5]). Разнообразны ее применения в экономике и финансах. Так, в терминах гипергеометрических функций записываются решения для обобщений модели Соллоу экономического роста [4]. Ключевую роль гипергеометрические функции играют при описании решений модели Узавы-Лукаса эндогенного роста двухсекторной экономики [2]. В области финансов, в качестве примера можно привести работу [3], в которой авторы получили многообразие решений модели Блэка-Шоулза в гипергеометрических функциях, которые содержат в себе все ранее известные аналитически разрешимые случаи, а также новые семейства решений.

Модель

Рассмотрим экономику [7], состоящую из однородного (сельскохозяйственного) сектора (далее – сектор 0) с совершенной конкуренцией и n высокотехнологичных секторов с N_i, $i=1,...,n$ однопродуктовых фирм, монополистически конкурирующих в каждом секторе.

В однородном секторе, в силу совершенной конкуренции, фирмы устанавливают цены на свою продукцию в соответствии с предельными издержками. Предполагая для простоты производительность труда в этом секторе равной 1, получаем, что цены p_0 равны зарплатам w_0.

В i-ом высокотехнологичном секторе постоянные издержки фирмы, производящей товар ξ_i, полагаем равными c_i^{φ}. Переменные издержки фирмы связаны с зарплатами работников $w(\xi_i)$, работающих с обратной производительностью c_i^{v}, однородной в пределах сектора i. Тогда фирмы устанавливают цены $p(\xi_i)$, решая задачу оптимизации

$$\pi(\xi_i)=p(\xi_i)Q(\xi_i)-c_i^{v}Q(\xi_i)w(\xi_i)-c_i^{\varphi}w(\xi_i)\to\max, \tag{1}$$

где $Q(\xi_i)$ – агрегированный спрос на товар от всех потребителей в экономике. Число фирм определяется условием свободного входа на рынок

$$\pi(\xi_i)=0.$$

Пусть $\mathcal{L}$ – общее число работников в экономике. Оно состоит из занятых и безработных рабочих в каждом из высокотехнологичных секторов, а также сельскохозяйственных рабочих:

$$\mathcal{L}=L_0+\sum_{k=1}^{n}(L_k+L_k^{u}),$$

а общее число безработных L_{n+1}, таким образом, находится по формуле

$$L_{n+1}=L_1^{u}+...+L_n^{u}=\sum_{k=1}^{n}L_k^{u}.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что все безработные в экономике образуют “виртуальный” $(n+1)$-ый сектор.

Агрегированный спрос $Q(\xi_i)=\sum_{j=0}^{n} q_j(\xi_i)L_j$, где $q_j(\xi_i)$ – индивидуальный спрос потребителя из j-го сектора на товар ξ_i, зависит от индивидуального выбора потребителей. При этом, в экономике существует n+2 вида доходов $y_0, y_1, ..., y_n, y_{n+1}$, соответствующих сектору, причем индекс n+1 отвечает доходу безработных.

Потребитель с доходом y_i, во-первых, распределяет свои доходы между товарами высокотехнологичных секторов, которые определяются индексами потребления H_i, $i=1,...,n$, и однородным товаром H_0. Максимизируя функцию полезности Кобба-Дугласа верхнего уровня

$$U=H_0^{\beta_0}H_1^{\beta_1}...H_n^{\beta_n}\to\max, \tag{2}$$

где степени β_i, $i=0,1,...,n$ удовлетворяют условиями $0\le\beta_i\le 1$, $\sum_{i=0}^{n}\beta_i=1$, потребитель распределяет свои расходы на продукцию i-го сектора пропорционально β_i.

Во-вторых, потребитель осуществляет выбор из многообразия товаров ξ_i, производимых в i-ом секторе. Потребитель формирует спрос $q_j(\xi_i)$, где индекс $j=0,...,n+1$ отвечает его доходу y_j, максимизируя индекс потребления

$$H_i=\int_{N_i}u_i(q_j(\xi_i))d\xi_i\to\max, \tag{3}$$

с функцией полезности $u_i(\kappa)$, которая отражает предпочтения для i-го дифференцируемого товара, при условии связи

$$\int_{N_i}p(\xi_i)q_j(\xi_i)d\xi_i\le\beta_i y_j. \tag{4}$$

Функция $\sigma_i(\kappa)=-\frac{u_i'(\kappa)}{u_i''(\kappa)\kappa}$, которая интерпретируется как эластичность замещения между товарами высокотехнологичного сектора, является ключевой в задаче поиска оптимального спроса $q_j(\xi_i)$. А именно, условия первого порядка задачи оптимизации (3)–(4) относительно цены $p(\xi_i)$ на товар ξ_i записываются как

$$E_{p(\xi_i)}q_j(\xi_i)=-\sigma_i(q_j(\xi_i)). \tag{5}$$

где $E_x y = \dfrac{y'x}{y}$. Таким образом, эластичность $E_{p(\xi_i)} q_j(\xi_i)$ спроса $q_j(\xi_i)$ относительно цены $p(\xi_i)$ противоположна по знаку эластичности замещения.

Для дальнейшего исследования модели многосекторной экономики введем *взвешенную эластичность замещения*

$$\aleph(\xi_i) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{q_j(\xi_i) L_j}{Q(\xi_i)} \sigma_i(q_j(\xi_i)),$$

Легко проверить, что условия первого порядка (5) для индивидуального спроса могу быть обобщены на $Q(\xi_i)$:

$$E_{p(\xi_i)} Q(\xi_i) = -\aleph(\xi_i).$$

Производство в экономике характеризуется технологиями, которые меняются от сектора к сектору, но одинаковы для всех фирм в секторе. Фирмы организуют производство, исходя из производительности труда $1/c_i^v$. Чтобы произвести оптимальное количество $Q(\xi_i)$ товара ξ_i, фирма должна нанять

$$l(\xi_i) = c_i^v Q(\xi_i) + c_i^\varphi$$

рабочих. Фирмы и рабочие согласуют заработную плату путем переговоров. В основе соглашения о зарплате лежит равное деление излишков между всеми работниками.

Работники мотивированы найти работу на высокотехнологичных рынках, так как заработная плата там выше, чем в однородном секторе. Однако, для получения работы на одном из них (включая однородный), они должны приобрести определенные навыки, специфические для каждого сектора. Таким образом, чтобы найти работу, рабочие должны выбрать интересующий их сектор, пройти необходимую подготовку, а затем выйти на рынок труда в выбранной отрасли. После того, как сектор для поиска работы выбран, он не может быть изменен. При этом сельскохозяйственный сектор может принять произвольное число работников. Наоборот, в высокотехнологичном секторе фирмы нанимают необходимое количество сотрудников и отказываются от других предложений. Мы предполагаем, что рынок труда в каждом секторе согласован с приобретенными навыками в том смысле, что отвергнутые при найме кандидаты не могут сразу найти работу в другом секторе, включая однородный, так как для этого они не обладают нееобходимой квалификацией. Следуя [6], можно найти зарплаты, которые являются результатом переговоров фирмы с работниками

$$w(\xi_i) = \left(\frac{p(\xi_i)}{c_i^v} + w_0 \right) \frac{l^2(\xi_i) - (c_i^\varphi)^2}{2 l^2(\xi_i)}.$$

Единый (плоский) налог с ставкой $\alpha \in (0,1)$ налагается на заработную плату всех наемных работников, включая занятых на однородном секторе, и распределяется равномерно между безработными как пособие по безработице. Таким образом, мы можем найти чистый доход всех L работников в экономике

$$y_i = (1-\alpha)w_i, y_{n+1} = \frac{\alpha(L_0 w_0 + L_1 w_1 + ... + L_n w_n)}{L_{n+1}}, \ i = 0,...,n.$$

Конструкция равновесия в работе [7] выполнена при следующих условиях:

Условие 1. *Предполагается, что функции $\sigma_i(\kappa)$ являются монотонными и дифференцируемыми, и удовлетворяют условию*

$$\sigma_i(\kappa) > 1, \ i = 1,...,n,$$

Условие 2. *Пусть L_j равновесное число* занятых работников *в секторе j. Предпложим, что $L_j \geq 1$, и*

$$|\sigma_i'(\kappa)| < \frac{L_j}{2C_i}, \ i = 1,...,n, \ j = 0,...,n+1, \ C_i = c_i^{\varphi} / c_i^{\nu}.$$

Условие 3. *Мы также предполагаем, что множество возможных индивидуальных спросов ограничено условиями*

$$\frac{\sigma_i(q_j(\xi_i))}{\sigma_i(q_{j'}(\xi_i))} < 2$$

для $i = 1,...,n$, $j = 0,...,n+1$. Если σ_i возрастает, дополнительно мы предполагаем, что существует $\delta_i > 0$, такое что верны неравенства

$$\sigma_i'(q_j(\xi_i))q_j(\xi_i) < \delta_i < \sigma_i(q_j(\xi_i)) - 1, \ i = 1,...,n,$$

для всех индивидуальных спросов q_{ij}, $i = 1,...,n$, $j = 0,...,n+1$.

Примеры

Условиям 1-3 удовлетворяет следующее семейство функций полезности

$$u(\kappa) = \begin{cases} \dfrac{A}{2(A-1)}(\kappa(\kappa+2))^{\frac{A-1}{A}} F\left(1, 2-\dfrac{2}{A}; 2-\dfrac{1}{A}; -\dfrac{\kappa}{2}\right) \text{ для } A > 1, \\ \ln\left(\kappa + 1 + \sqrt{\kappa^2 + 2\kappa}\right) \text{ для } A = 1. \end{cases}$$

с убывающей эластичностью замещения $\sigma(\kappa) = A\left(1 + \dfrac{1}{\kappa+1}\right)$, а также

$$u(\kappa) = \begin{cases} \dfrac{A}{(A-1)} \kappa^{1-\frac{1}{A}} (2\kappa+1)^{1+\frac{1}{2A}} F\left(1, 2-\dfrac{1}{2A}; 2-\dfrac{1}{A}; -2\kappa\right) \text{ для } A > 1, \\ 2\sqrt{2\kappa+1} + \ln\dfrac{\sqrt{2\kappa+1}-1}{\sqrt{2\kappa+1}+1} \text{ для } A = 1. \end{cases}$$

с возрастающей эластичностью замещения $\sigma(\kappa) = A\left(2 - \frac{1}{\kappa + 1}\right)$.

Литература

1. *Abadir, M.K.* An Introduction to Hypergeometric Functions for Economists// Econometric Reviews. – 1999. – С. 287-330.
2. *Boucekkine, R., Ruiz-Tamarit, J. R.* Special functions for the study of economic dynamics: The case of the Lucas-Uzawa model//Journal of Mathematical Economics. – 2008. – Т. 44. – С. 33-54.
3. *Albanese, C., Campolieti, G., Carr, P. and Lipton, A.* Black-Scholes Goes Hypergeometric// Risk. – 2001. – Т. 12. – С. 99-103.
4. *Brida, J. G., Maldonado, E. J. L.* Closed form solutions to a generalization of the Solow growth model//Applied Mathematical Sciences. – 2007. – Т. 1. – №. 40. – С. 1991-2000.
5. *Pham-Gia, T. and Thanh, D.N.* Hypergeometric Functions: From One Scalar Variable to Several Matrix Arguments, in Statistics and Beyond//Open Journal of Statistics. – 2016. – Т. 6. – С. 951-994.
6. *L.A. Stole and J.Zwiebel.* Organizational design and technology choice under intrafirm bargaining//The American Economic Review. – 1996. – С.195-222.
7. *A.B. Shapoval, V.M. Goncharenko*. A Response of the Economy to Changes in Employment Structure//Working paper EERC. – 2016. – №. E16/09. – С. 1-54.
8. *E. T. Whittaker and G. N Watson*. A Course in Modern Analysis//Cambridge University Press. – 1990.

HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND THE MODEL OF MULTISECTOR ECONOMY WITH MONOPOLISTIC COMPETITION

Vasily Goncharenko

National Research University Higher School of Economics
101000, Moscow, Myasnitskaya str., 20, vgoncharenko@hse.ru

Alexander Shapoval

National Research University Higher School of Economics
101000, Moscow, Myasnitskaya str., 20, abshapoval@gmail.com

Larisa Lipagina

Financial University under the Government of the Russian Federation
125993, Moscow, Leningradsky prosp., 49, LLipagina@fa.ru

We describe a multi-sector economy model with monopolistic competition and examples of utility functions given by the set of hypergeometric functions when the conditions of existence and uniqueness of general equilibrium in the model are satisfied.

Keywords: hypergeometric function, monopolistic competition, general utility function, the elasticity of substitution.

References

1. *Abadir, M.K.* An Introduction to Hypergeometric Functions for Economists// Econometric Reviews. – 1999. – P. 287-330.
2. *Boucekkine, R., Ruiz-Tamarit, J. R.* Special functions for the study of economic dynamics: The case of the Lucas-Uzawa model//Journal of Mathematical Economics. – 2008. – Vol. 44. – P. 33-54.
3. *Albanese, C., Campolieti, G., Carr, P. and Lipton, A.* Black-Scholes Goes Hypergeometric // Risk. – 2001. – Vol. 12. – P. 99-103.
4. *Brida, J. G., Maldonado, E. J. L.* Closed form solutions to a generalization of the Solow growth model//Applied Mathematical Sciences. – 2007. – Vol. 1. – № 40. – P. 1991-2000.
5. *Pham-Gia, T. and Thanh, D.N.* Hypergeometric Functions: From One Scalar Variable to Several Matrix Arguments, in Statistics and Beyond//Open Journal of Statistics. – 2016. – Vol. 6. – P. 951-994.

6. *L.A. Stole and J.Zwiebel*. Organizational design and technology choice under intrafirm bargaining // The American Economic Review. – 1996. – P.195-222.
7. *A.B. Shapoval, V.M. Goncharenko*. A Response of the Economy to Changes in Employment Structure//Working paper EERC. – 2016. – №. E16/09. – P. 1-54.
8. *E. T. Whittaker and G. N Watson*. A Course in Modern Analysis//Cambridge University Press. – 1990.