Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет компьютерных наук

Департамент программной инженерии

Утверждаю
Академический руководитель
образовательной программы
по направлению 09.03.04
«Программная инженерия»
В. В. Шилов

____
«__»__________ 2017 г.

Программа дисциплины «Алгебра»

для направления 09.03.04 «Программная инженерия»
подготовки бакалавра
(2017—2018 учебный год)

Авторы программы:
к.ф.-м.н, доцент В. Л. Чернышев
vchernyshev@hse.ru,
к.ф.-м.н, доцент И. А. Чубаров
igor.chubaroff@gmail.com.

Одобрена на заседании департамента больших данных и информационного факультета компьютерных наук

«__»__________ 2017 г.

Руководитель департамента — В. В. Подольский

Рекомендована Академическим советом образовательной программы «Программная инженерия»

«__»__________ 2017 г.

Москва 2017

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности. Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 09.03.04 **«Программная инженерия»** подготовки бакалавра, изучающих дисциплину **«Алгебра»**.
Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»;

- Образовательной программой 09.03.04, направление «Программная инженерия» подготовки бакалавра;

- Рабочим учебным планом по направлению 09.03.04 «Программная инженерия» подготовки бакалавра, утвержденным в 2017 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины **«Алгебра»** являются:

- Развитие математического кругозора и алгебраического мышления студентов.

- Обучение студентов важнейшим теоретическим положениям линейной алгебры, началам абстрактной алгебры, матричным методам.

- Выработка у студентов навыков решения конкретных задач, требующих исследования систем линейных уравнений, применения матричных вычислений, многомерной геометрии, линейных операторов.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- **Знать**

– точные формулировки основных понятий, относящихся к теории матриц и определителей, абстрактной алгебре, аналитической геометрии, линейной алгебре;

– основные теоремы о системах линейных уравнений, матрицах и определителях, прямых и плоскостях, линейных пространствах, линейных операторах, квадратичных формах, евклидовых пространствах, простейшие теоремы о группах, кольцах и полях.

- **Уметь**

– решать системы линейных уравнений при помощи алгоритма Гаусса, вычислять ранги матриц, определители матриц, выполнять операции над матрицами;

– выяснять, является ли данное множество группой, кольцом или полем, уметь устанавливать изоморфизмы между ними, исследовать строение групп;

– решать стандартные задачи векторной алгебры, геометрии прямых и плоскостей;

– находить базисы конечномерных линейных пространств и подпространств, координаты векторов, решать задачи о линейных операторах и собственных векторах при помощи матриц, простейшие задачи геометрии евклидовых пространств, приводить к каноническому виду квадратичные формы, исследовать их на знакоопределенность.

- **Владеть** методами теории матриц, линейной алгебры, аналитической геометрии, классической и абстрактной алгебры, основными алгоритмами: алгоритмом Гаусса и базирующимися на нем алгоритмами решения матричных задач и задач линейной алгебры, алгоритмом Лагранжа.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	**Код по ФГОС / НИУ**	**Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)**	**Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции**
Универсальная	УК-1/СК-Б1	Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной.	Стандартные (лекционно-семинарские)
Универсальная	УК-3/СК-Б4	Способен решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза.	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-1	Способен применять основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с информатикой и прикладной математикой при решении научно-исследовательских задач.	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-2	Способен к формализации в своей предметной области с учетом ограничений используемых методов исследования.	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-3	Способен использовать методы и инструментальные средства исследования объектов профессиональной деятельности.	Стандартные (лекционно-семинарские)

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина является обязательной и относится к базовым дисциплинам профессионального цикла. Для освоения учебной дисциплины не требуются знания и компетенции, выходящие за пределы требований к поступающим на программу бакалавриата. Изучение данной дисциплины базируется на школьном курсе алгебры и начал анализа.
Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и

компетенциями:

- знание элементарной алгебры,
- знание простейших понятий теории множеств.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Математический анализ,
- Анализ данных,
- Дискретная математика,
- Теория вероятностей и математическая статистика,
- Статистические и эмпирические методы компьютинга,
- Алгоритмы и структуры данных.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	*Название темы*	*Всего часов*	Аудиторные часы		*Самостоятельная работа*
			Лекции	Семинары	
	1 модуль				
1 2	Системы линейных уравнений, матрицы. Определители.	70	16	16	38
	2 модуль				
3 4 5	Векторная алгебра. Элементы аналитической геометрии. Системы линейных уравнений (продолжение). Комплексные числа. Элементы общей алгебры.	70	16	16	38
	3 модуль				
6 7 8	Элементы общей алгебры (окончание). Линейные пространства. Линейные отображения и операторы. Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства.	88	20	20	48

	4 модуль				
9 10	Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства (продолжение). Кривые и поверхности второго порядка.	76	20	20	36
	Итого	304	72	72	160

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Параметры
		1	2	3	4	
		неделя проведения в модуле				
Текущий (неделя в модуле)	Контрольная работа	7		8		Письменная работа на 120 минут
	Домашнее задание		7	7		Выполнение домашних заданий.
Промежуточный	Экзамен, Коллоквиум		9		7	Письменная работа на 120 минут во 2-м модуле и коллоквиум в 4-м
Итоговый	Экзамен				10	Письменная работа на 120 минут

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Для прохождения контроля студент должен, как минимум, продемонстрировать знания основных определений и формулировок теорем; умение решать типовые задачи, разобранные на семинарских занятиях.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Предусмотрены 2 контрольные работы (в первом и третьем модулях) и 2 домашних задания (во втором и третьем модулях). Во втором и четвертом модулях проводятся экзамены. В четвертом модуле проводится коллоквиум.
Оценки выводятся по следующим формулам.
Накопленная оценка за 1 – 2 модули: «НО1» $= 0{,}5 \cdot$ «$\text{О}_{\text{Кр-1мод}}$» $+ 0{,}4 \cdot$ «$\text{О}_{\text{Дз-2мод}}$» $+ 0{,}1 \cdot$ «$\text{О}_{\text{сем-1}}$». Здесь «$\text{О}_{\text{сем-1}}$ » — оценка от 0 до 10 баллов, учитывающая регулярность посещения семинаров, активность на семинарах, в том числе решение задач у доски, и выполнение текущих домашних работ в 1 – 2 модулях.
Результирующая оценка за 1 семестр (1-2 модули) «О_1» $= 0{,}4 \cdot$ «НО1» $+ 0{,}6 \cdot$ «$\text{О}_{\text{экз.раб-1}}$».

Накопленная оценка за 3 - 4 модули:
«НО2» $= 0{,}35 \cdot$«$\text{О}_{\text{КР в 3-м модуле}}$»$+0{,}45\cdot$«$\text{О}_{\text{Коллоквиум в 4-м модуле}}$»$+0{,}1\cdot$«$\text{О}_{\text{Семинары в 3-4 модулях}}$»$+$ $+0{,}1\cdot$«$\text{О}_{\text{ДЗ в 3-м модуле}}$».

Здесь «$\text{О}_{\text{Семинары в 3-4 модулях}}$» — оценка от 0 до 10 баллов, учитывающая посещение семинаров, активность на семинарах, в том числе решение задач у доски, и выполнение

текущих домашних работ в 3-м и 4-м модулях.
В конце четвертого модуля проводится письменный экзамен.

Результирующая оценка за курс (в 4-м модуле):
«O_2» = 0,7 · «НО2» + 0,3 · «$O_{\text{Экзамен в конце 4-го модуля}}$» по десятибалльной шкале.

В экзаменационную ведомость выставляются три оценки: накопленная, экзаменационная и результирующая.
При нормальном посещении занятий дробные баллы округляются до целых по правилам арифметики — до ближайшего целого, при систематических пропусках занятий или мероприятий текущего контроля выставляется целая часть соответствующего балла. Оценку посещаемости производит преподаватель, проводящий семинарские занятия.
В экзаменационную ведомость выставляется также оценка по данной дисциплине по пятибалльной шкале, получаемая из оценки по десятибалльной шкале согласно таблице соответствия (см. Приложение к приказу Ректора НИУ ВШЭ № 6.18.1-01/1601-03 от 16 января 2013 г. об утверждении новой редакции ПОЛОЖЕНИЯ ОБ ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ, утвержденного ученым советом НИУ ВШЭ (протокол от 21.12. 2012 г. № 42)).

Таблица соответствия оценок за экзамен
по десятибалльной и пятибалльной системам

5-балльная шкала при проведении экзамена	10- балльная шкала
неудовлетворительно	0
	1
	2
	3
удовлетворительно	4
	5
хорошо	6
	7
отлично	8
	9
	10

7 Содержание программы

(В квадратных скобках указаны номера учебников из списка п. 10)

1 *Системы линейных уравнений, матрицы*

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Определители второго и третьего порядков. Правило Крамера для случая двух и трех переменных. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, транспонирование и умножение. Свойства операций над матрицами: сложения и умножения на скаляр, транспонирования, умножения. Единичная матрица.

2. Некоммутативность умножения матриц. Симметрические матрицы. Ступенчатый вид матрицы и канонический (улучшенный ступенчатый) вид матрицы. Элементарные преобразования строк матрицы. Теорема о методе Гаусса. Совместные и несовместные системы линейных уравнений. Свободные переменные.

Литература по теме: [3], §6.8, с.227-233; [6], гл.1, с.16-29; [1], т.1, гл.1, §3, с. 19-26. [3], §5.1, с.147-155; [6], гл.4, с.71-81; [1], т.1, гл.2, §1,3; с. 19-26, [7], гл.5, §§ 1,2.

2 *Определители*

3. Перестановки и подстановки. Инверсии. Транспозиции. Знак и чётность перестановки и подстановки. Общая формула для определителя произвольного порядка. Свойства определителя, в частности: разложение определителя по строке (столбцу) и фальшивое разложение, вычисление определителя верхнетреугольной матрицы. Утверждение о том, что любая функция от столбцов матрицы является определителем, если она линейна по каждому аргументу, кососимметрична и принимает значение 1 на единичной матрице, для случая квадратной матрицы второго порядка. Определитель произведения двух квадратных матриц. Способы вычисления определителей.

Литература по теме: [3], гл.1, §1.1, с.16-20; [1], т. 1, гл.1, §4, с. 29-32. [3], гл. 6, §6.1-6.3, с.191-204; [1], т.1, гл.3, §§1-2. [3], гл. 6, §6.4, с.205-208; [18].

3 *Системы линейных уравнений, матрицы (продолжение)*

4. Формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Дополняющий минор, алгебраическое дополнение. Союзная матрица. Обратная матрица. Критерий существования и формула для нахождения обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Матричные уравнения $AX = B, XA = B$. Минор. Ранг матрицы. Базисный минор. Определение линейной комбинации строк. Линейная зависимость строк (столбцов).

5. Критерий линейной зависимости. Свойства ранга. Теорема о базисном миноре и её следствия (теорема о ранге матрицы и критерий невырожденности квадратной матрицы). Вычисление ранга матрицы: элементарные преобразования и метод окаймляющих миноров. Свойства решений однородных и неоднородных систем линейных алгебраических уравнений.

6. Теорема Кронекера—Капелли. Критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей. Фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Теорема о существовании ФСР. Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений. Теорема о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

Литература по теме: [3], гл. 6, §6.3, с.191-204 [6], гл.4, с.77-83, [1], т.1, гл.3, §§2-3, с.116-122. [1], т.1, гл.3, §3, с.123; [14].

4 *Векторная алгебра. Элементы аналитической геометрии.*

7. Векторы в трехмерном пространстве, линейные операции над ними и их свойства. Скалярное произведение векторов в трехмерном пространстве и его алгебраические свойства. Выражение ортогональной проекции одного вектора на направление другого.

8. Базис в трехмерном пространстве. Ортогональный и ортонормированный базисы. Правый и левый базисы. Вычисление скалярного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами. Направляющие косинусы. Векторное произведение векторов, его свойства. Вычисление векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. Критерий коллинеарности двух векторов.

9. Смешанное произведение векторов, его свойства. Вычисление смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. Вычисление объема параллелепипеда. Критерий компланарности трех векторов. Прямоугольная декартова система координат. Радиус-вектор точки. Радиус-вектор точки, делящей отрезок в данном отношении, середина отрезка. Уравнение поверхности и его геометрический образ. Прямая и обратная задачи аналитической геометрии. Общее уравнение плоскости в пространстве. Теорема о том, что любое линейное уравнение первого порядка задает плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальное уравнение плоскости.

10. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости. Прямая в пространстве. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых. Критерий принадлежности двух прямых одной плоскости. Вычислений расстояний: от точки до прямой и между двумя прямыми.

Литература по теме: [3], гл. 1-3, [7], гл. 1-2, [6], гл. 9.; [11]; [2].

5 *Комплексные числа*

11. Комплексные числа: алгебраическая и тригонометрическая форма записи. Модуль и аргумент комплексного числа. Главное значение аргумента. Сложение, умножение комплексных чисел и их свойства. Комплексное сопряжение. Деление комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение комплексного корня n-ой степени. Основная теорема алгебры. Теорема Безу. Формула Эйлера. Формулы Виета. Разложение многочленов на неприводимые множители над действительными и над комплексными числами.

Литература по теме: [1], т.1, гл.5, § 1.

6 *Элементы общей алгебры*

12. Сюръективные, инъективные, биективные отображения*. Композиция отображений*. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Разбиение множества на классы эквивалентности. Бинарные операции. Ассоциативные и коммутативные операции. Полугруппа, магма*. Примеры.

13. Моноид. Обратимые элементы. Группа. Примеры групп: симметрическая группа, общая линейная группа, специальная линейная группа. Абелева группа. Подгруппа. Циклическая группа. Порядок элемента. Связь порядка элемента, порождающего циклическую группу, с порядком группы. Таблица Кэли. Гомоморфизм групп. Изоморфизм групп. Свойства изоморфизма. Теорема о том, что все циклические группы

одного порядка изоморфны. Ядро гомоморфизма. Прямое произведение групп. Разложение конечной циклической группы. *Экспонента. *Критерий цикличности. Примеры групп: группа кватернионов, группа диэдра, знакопеременная группа. Транспозиции.

14. Левый смежный класс по некоторой подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и её следствия. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Транзитивные и свободные действия. Теорема Кэли. Нормальная подгруппа. Определение факторгруппы. Естественный гомоморфизм. Теорема о гомоморфизме групп.

15. Определение кольца. Аддитивная группа кольца. Мультипликативная полугруппа кольца. Подкольцо. Примеры колец: числовые кольца, полное матричное кольцо, кольцо вычетов.

16. Коммутативное кольцо. Делители нуля и обратимые элементы. Целостное кольцо. Критерий целостности для нетривиального коммутативного кольца с единицей. Подкольцо, порожденное множеством. Кольцо многочленов от одной переменной. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя. Выражение для наибольшего общего делителя двух многочленов. Двусторонний идеал. Главный идеал. Гомоморфизм колец. Факторкольца. Теорема о гомоморфизме колец, пример. Поле, подполе: примеры. Простое поле. Два определения характеристики поля. Расширение поля. Расширение поля, полученное с помощью присоединения элемента, пример. Поле частных. Теорема о том, когда факторколько кольца многочленов над полем само является полем.

17. Факториальность колец*. Поле частных*. Алгебры*. Модули*. Автоморфизм Фробениуса и конечные поля*.

Литература по теме: [1], т.1, гл.1,§§ 5,6,7; [1], т.1, гл.4, §1; [1], т.1, гл.4, §2, т.3, гл.1, с.43-45; [1], т.1, гл.1, §8; [1], т.1, гл.4, §3; [1], т.1, гл.5, §2, гл.6, §1,4; [1], т.1, гл.5, §1; [1], т.1, гл.5, §4, т.3, гл.5, §2; [13].

7 *Линейные пространства. Линейные отображения и операторы.*

17. Линейное (векторное) пространство: аксиомы, их простейшие следствия. Примеры. Базис, размерность, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Матрица перехода от старого базиса к новому. Изменение координат вектора при изменении базиса. Утверждение о том, как меняется матрица перехода при двух последовательных переходах. Подпространства в линейном пространстве. Линейная оболочка конечного набора векторов и ее размерность. Изоморфизм линейных пространств. Теорема о том, что ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из столбцов их координат.
    Литература по теме: [3] §§ 7.1 - 7.5; [1] гл.1 §§1,2; [6] гл.3-5.

18. Сумма и прямая сумма подпространств. Пересечение подпространств. Утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств. Линейные отображения и преобразования (операторы) линейных пространств. Матрица линейного оператора. Теорема о том, что действие линейного оператора в конечномерном пространстве полностью определяется матрицей линейного оператора. Утверждение о формуле для матрицы оператора при замене базиса. Действия над линейными отображениями. Сопряженное пространство. Ковекторы. Преобразование координат ковектора. *Сопряженные отображения.
    Литература по теме: [3] §7.3-7.4, 8.1-8.3; [1] т.2 гл.1 §2, гл.2 §§1,2.

19. Ядро и образ (множество значений) линейного отображения. Утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного оператора. Собственный вектор и собственное значение линейного оператора. Собственное подпространство. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы. Инвариантность характеристического многочлена. Утверждение о том, что число принадлежит спектру тогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического многочлена (над алгебраически замкнутым полем). Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения и неравенство, их связывающее (без доказательства). След матрицы. Утверждение о том, что след матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.
Литература по теме: [3] §8.4-8.6; [1] т.2 гл.2 §1,3.

20. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду путем перехода к базису из собственных векторов, условия диагонализируемости. Разложение пространства в прямую сумму корневых подространств. Формулировка теоремы о жордановой нормальной форме матрицы оператора. Теорема Гамильтона-Кэли (формулировка). *Линейная алгебра над тропическим полукольцом. *Тропический спектр. Литература по теме: [3] §8.6; [1] т.2 гл.2 §§3-4; [6] гл.7; [17].

8 *Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства*

21. Евклидово пространство. Примеры. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональный и ортонормированный базисы. Алгоритм ортогонализации Грама–Шмидта. Существование ортонормированного базиса в любом конечномерном пространстве. Матрица Грама и 5 её свойств: 1) критерий невырожденности, 2) симметричность и положительная определенность, 3) формула для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису, 4) положительность определителя, 5) инвариантность определителя матрицы Грама относительно процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональное дополнение. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая.
Литература по теме: [3] §10.1-10.5; [1] т.2 гл.3 §1; [6] гл.10.

22. Ортогональное дополнение к ортогональному дополнению*. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство. Расстояние и угол между вектором и подпространством. Формула для расстояния через определители матриц Грама. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Сопряженный оператор. Теорема о существовании сопряженного оператора. Формула для матрицы сопряженного оператора. Самосопряженные (симметрические) операторы. Критерий самосопряженности оператора. *Ядро и образ сопряженного оператора. *Теоремы Фредгольма.
Литература по теме: [3] §§10.5-10.7; [1] т.2 гл.3 §3; [6] гл.11; [16].

23. Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям. Вещественность собственных значений самосопряженного оператора. Теорема о существовании для самосопряженного оператора ортонормированного базиса из собственных векторов. Доказательство этой теоремы в случае различных вещественных собственных значений. Ортогональные матрицы и их свойства. Ортогональные операторы. Теорема о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный и верно обратное. Критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу. Канонический

вид ортогонального оператора. Теорема Эйлера. Теорема о том, что для любой симметрической матрицы найдется подобная ей диагональная матрица, а подобие будет осуществляется с помощью ортогональной матрицы. Теорема о том, что для любой симметрической матрицы найдется подобная ей диагональная матрица, а подобие будет осуществляется с помощью ортогональной матрицы. Теорема о сингулярном разложении. Утверждение о QR-разложении. LU-разложение. Утверждение о полярном разложении. *Унитарные и эрмитовы операторы.
Литература по теме: [3] §§10.7-10.8; [1] т.2 гл.2 §3 гл.3 §1; [6] гл.11; [16].

24. Билинейные формы. Формула для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса. Квадратичные формы. Формула для преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса. Теорема об инвариантности ранга. Положительно (отрицательная) определенность квадратичной формы, критерий Сильвестра и его следствие. Канонический и нормальный виды квадратичной формы.
Литература по теме: [3] §§9.1-9.3; [1] т.2 гл.1 §4; [6] гл.8.

25. Приведение квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду методом выделения квадратов (алгоритм Лагранжа). Метод Якоби. Индексы инерции. Закон инерции квадратичных форм (формулировка). Приведение квадратичных форм к диагональному виду (к главным осям) при помощи ортогональной замены координат.
Литература по теме: [3] §§9.2-9.3; [1] т.2 гл.1 §4, гл.3 §3; [6] гл.8.

9 *Кривые и поверхности второго порядка*

26. Кривые второго порядка. Определение эллипса, гиперболы, параболы, их параметры (в частности, эксцентриситет). Вывод уравнения эллипса. Вывод уравнения параболы. Исследование алгебраического уравнения второго порядка от двух переменных. Оптические свойства кривых второго порядка. Поверхности второго порядка (обзор). Поверхность вращения, цилиндрическая поверхность, линейчатая поверхность. Эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр. Эллипсоид, однополостной гиперболоид, двуполостной гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид. Нахождение прямолинейных образующих для однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.
Литература по теме: [3] прил.1, 2; [1] т.2 гл.5 §§1,2; [6] дополнение Б; [11]; [19].

8 Образовательные технологии

Проводятся стандартные лекционно-семинарские занятия и регулярные консультации с ответами на вопросы студентов. Применяются индивидуальные домашние задания.

9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

Образцы задач контрольных работ, работ для проверки домашних заданий, экзаменационных работ по алгебре.

Приведенные списки задач являются предварительными. Уточненные списки задач для подготовки высылаются студентам перед проведением контрольных мероприятий.

Типовые задачи для подготовки к контрольной работе за 1 модуль.

1. Исследуйте и решите систему при всех значениях параметра

$$\begin{cases} \alpha x + 3y = \alpha + 1 \\ (\alpha + 2)x + 9\alpha y = 6. \end{cases}$$

2. Выполните действия:

$$(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T,$$
$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Решите систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

4. Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

5. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - \alpha x_4 - x_5 = 2 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -5\beta. \end{cases}$$

6. Подобрать j и i так, чтобы произведение $a_{32}a_{16}a_{2i}a_{53}a_{45}a_{6j}a_{77}$ входило в определитель 7 порядка со знаком минус.

7. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Решить неравенство

$$det \begin{pmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leq -50.$$

9. Вычислите определитель матрицы порядка n:

$$det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Типовые задачи для домашних заданий (2 модуль).

1. Является ли (a) группоидом, (b) полугруппой, (c) моноидом, (d) группой множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции $a \circ b = a + b - 5$? Ответ обосновать.

2. Является ли отображение $\phi : X \to Y$, где $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, Y = \mathbb{Z}, \phi\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = a + b + c$, инъективным, сюръективным, биективным?

3. Является ли отображение $\phi(7^a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ гомоморфизмом (изоморфизмом) групп, если первая группа - это множество $G = \{7^a, a \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения, а вторая группа - множество $H = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \right\}$ с операцией сложения?

4. Решите уравнение $BXA^{-1} = C^{-1}A$ относительно неизвестной подстановки X, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Разложить подстановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ в произведение циклов, транспозиций, выяснить ее четность. Определить порядок этой подстановки, вычислить σ^{744}.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} (-2 + 4i)x + 3yi = -10 + 21i \\ (1 + 5i)x + (1 - 2i)y = 14 + 19i \end{cases}$.

7. Решить уравнение $z^2 - (7 + i)z + (18 + i) = 0$.

8. Пусть $z = -\sqrt{3} - i$. Вычислить значение $\sqrt[7]{z^3}$, для которого число $\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i}$ имеет аргумент $\frac{9\pi}{28}$. Найди модуль этого числа.

9. Найти корни многочлена $3x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 18x - 12$ и разложить его на множители над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

10. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 228 найти
(a) все элементы g такие, что $g^{48} = 1$;
(b) элементы g порядка 48, и в каждом случае подсчитать их количество.

Типовые задачи для подготовки к экзаменационной работе (2 модуль).

1. В ортонормированном базисе даны векторы $a\{1{,}4{,}1\}, b\{2{,}1{,}3\}, c\{-2{,}0{,}3\}$. Найти вектор y такой, что $y \perp a, (y{,}c) = 2, (y{,}b) = 9$

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p + 3q, b = p - 2q$, если $|p| = 2, |q| = 3, (\widehat{p{,}q}) = \frac{\pi}{3}$.

3. Даны вершины треугольника $A(-5{,}3), B(7{,}8), C(-2, -1)$. Составить уравнения медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A.

4. Даны точки $A(2{,}1{,}0)$, $B(0{,}2{,}1)$, $C(1{,}2{,}0)$, $D(1, 0, -2)$. Найти: (а) объем пирамиды $ABCD$; (б) длину высоты, проведенной из вершины D.

5. Проверить, что прямые $a : 2x = y + 1 = z + 2, b : x - 1 = -1 - y = z$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости. Найти расстояние от точки $A(1{,}4,-2)$ до этой плоскости.

6. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 7 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью $3x + y - 4z - 15 = 0$, а также координаты точки их пересечения.

7. a) Найти точку M', симметричную точке $M(-1{,}2{,}0)$ относительно прямой $\frac{x+0{,}5}{1} = \frac{y+0{,}7}{-0{,}2} = \frac{z-2}{2}$.
b) Найти точку M', симметричную точке $M(3{,}3{,}3)$ относительно плоскости $8x + 6y + 8z - 25 = 0$.

8. Даны точки $P(1{,}2{,}0), Q(1{,}0{,}2), R(2{,}1{,}0), S(0,-2{,}1)$. Найти:
a) объем пирамиды $PQRS$;
b) угол между плоскостями (PQS) и (QRS).

9. Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ и $x = 6t + 9, y = -2t, z = -t + 2$. Вычислить расстояние между ними.

10. Решите уравнение $A^{-1}XB = C$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Решите уравнение $A^{-1}XB = C$, A, B, C – подстановки $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

12. Решить неравенство

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & x+4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2x & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$

13. Вычислите матрицу $6A^{-1} - (BA^2 - AB)^T, A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0. \end{pmatrix}$

14. Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

Запишите решение в виде вектора-столбца. Найдите ФСР соответсвующей однородной системы.

15. Является ли отображение $\phi : X \to Y$, где $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z} \right\}, Y = \mathbb{N}, \phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) = a^2 + b^b$ инъективным, сюръективным?

16. Докажите, что множества $G = \{5^a, a \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения и $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ -a & 3a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{Z} \right\}$.

17. Найдите комплексные корни уравнения $z^6 + \frac{\sqrt{2}(i-1)}{\sqrt{3}+i} = 0$, для которых $0 < argz < \frac{\pi}{2}$.

18. Решить систему уравнений $\begin{cases} (5-i)x + (3i-1)y = 4+4i \\ (2+i)x - (3+2i)y = 4-4i \end{cases}$.

Типовые задачи для подготовки к контрольной работе в 3-м модуле.

1. Найти ранг матрицы при всевозможных значениях параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

2. Найти общее решение системы линейных уравнений (представить его как сумму частного решения и линейной комбинации линейно независимых решений соответствующей однородной системы)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2 \\ 5x_1 - 8x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 12x_5 = 3 \end{cases}$$

3. Проверить, что данные векторы $\vec{a}_1 = (1{,}0{,}1{,}1)^T, \vec{a}_2 = (1{,}3{,}1{,}2)^T, \vec{a}_3 = (2{,}0{,}1{,}2)^T, \vec{a}_4 = (1, -1, -1{,}0)^T$ образуют базис в пространстве столбцов. Найти координаты вектора $\vec{b} = (3, -10, -4, -3)^T$ в этом базисе.

4. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов $\vec{a}_1 = (1, -1{,}2{,}1)^T, \vec{a}_2 = (1{,}2{,}1, -1)^T, \vec{a}_3 = (0{,}3, -1, -2)^T, \vec{a}_4 = (3{,}3{,}4, -1)^T, \vec{a}_5 = (1, -4{,}3{,}3)^T$ в $\mathbb{R}^4$, выразить небазисные векторы через базисные.

5. Найти размерность и базис (то есть фундаментальную систему решений) подпространства решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

6. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку векторов $a_1 = (1{,}1{,}2{,}1{,}2)^T, a_2 = (0, -1, -2{,}1, -1)^T, a_3 = (3{,}1{,}2{,}5{,}4)^T$ в $\mathbb{R}^5$

7. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1, V_2 в $\mathbb{R}^4$, $V_1 = \langle a_1,a_2,a_3\rangle$, $V_2 = \langle b_1,b_2\rangle$, где $a_1 = (1,0,-3,-2)^T$, $a_2 = (7,1,9,14)^T$, $a_3 = (-4,1,2,-9)^T$, $b_1 = (10,1,0,8)^T$, $b_2 = (-3,0,1,-3)^T$

8. Линейное преобразование ϕ в $\mathbb{R}^2$ отображает векторы $a_1 = (1,4)^T$, $a_2 = (2,7)^T$ соответственно в векторы $b_1 = (2,-3)^T$, $b_2 = (-4,5)^T$. Определить матрицу этого преобразования.

9. Линейный оператор ϕ в базисе v: $v_1 = (3,2)^T$, $v_2 = (1,1)^T$ имеет матрицу $A_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Какой будет его матрица в базисе u: $u_1 = (-1,-1)^T$, $u_2 = (2,1)^T$?

10. Найти базис ядра и базис образа линейного отображения $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей $A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Является ли отображения сюръективным?

Задачи для подготовки к экзамену в 4-м модуле.

(a) Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение), найдите ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

(b) В циклической группе $G = \langle a\rangle$ порядка 228 найти
(a) все элементы g такие, что $g^{48} = 1$;
(b) элементы g порядка 48, и в каждом случае подсчитать их количество.

(c) Представить невырожденную матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ в виде произведенеия ортогональной матрицы Q на верхнетреугольную матрицу R с положительными элементами на главной диагонали.

(d) Пусть в некотором ортонормированном базисе трёхмерного евклидова пространства заданы векторы $e_1 = (0,1,1)^T$, $e_2 = (-1,-1,1)^T$, $e_3 = (1,0,1)^T$. Пусть оператор f задан матрицей $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ в базисе e_1, e_2, e_3. Найти матрицу A_{f^*} спорженного оператора f^* в том же базисе.

(e) В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ квадратичная форма $Q(x)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу квадратичной формы $Q(x)$ в базисе $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(f) Привести квадратичную форму $2x_1x_1 - 2x_1x_3 - x_2^2 + x_2^2 + 5x_3^2$ к нормальному виду с помощью метода Лагранжа. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.

(g) Привести квадратичную форму $k = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$ к каноническому виду посредством ортогональной замены координат. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.

(h) Исследовать квадратичную форму на положительную или отрицательную определенность в зависимости от параметра: $k = (\alpha - 1)x_1^2 + (2\alpha - 2)x_1x_2 - 2\alpha x_1x_3 + 2\alpha x_2^2 - 2\alpha x_2x_3 + (\alpha - 2)x_3^2$.

(i) Уравнение $5x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 14 = 0$ линии второго порядка на плоскости привести к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и сдвига, указав:

а) одно из преобразований перехода от заданной системы координат к канонической системе координат,

б) канонический вид уравнения линии.

в) Определить тип кривой. На плоскости построить каноническую систему координат, в которой схематично изобразить кривую.

(j) Эллипс проходит через точку $C(0;\ -1 + \sqrt{20})$, его большая ось оканчивается вершинами $A(-2; 5)$, $B(-2; -7)$. Написать уравнение кривой, уравнение нижней части эллипса в системе Oxy. Указать большую и малую полуоси, найти эксцентриситет и сделать эскиз.

(k) Определить тип поверхности второго порядка, назвать её и сделать эскиз:
а) $x^2 + z^2 - y^2 = 1$
б) $y^2 = -2x$

(l) Записать каноническое уравнение эллиптического параболоида вращения, вытянутого вдоль оси OY.

По задачнику [12]:

1557, 1558, 1542, 1586, 1181, 1178, 1175, 1179, 1192, 1202, 1212, 1215, 1207, 1244, 1246, 1249, 1252, 1254, 1250.

По задачнику [11]:

35.23 1), 35.24 10), 35.27 1), 11). 36.5. 37.1. 38.10 1) 38.9 1). 35.27 2), 5), 8), 35.24 1), 14), 35.23 2), 37.11, 38.12 4), 9), 11) 38.12 3), 6) 38.9 2), 8).

Дополнительные задачи (по [11]):

34.1 1), 3) 5), 34.3, 34.5, 34.13 1), 2), 7), 34.16, 34.24, 34.29, 34.57, 34.66.

10 *Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины*

Список литературы

[1] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. Ч. II. Линейная алгебра.Ч. III. Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2009 -2010.

[2] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Аналитическая геометрия. 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.– 388 с.

[3] Умнов А. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: МФТИ, 2006.

[4] Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.– 3-е изд. СПб.: Лань, 2008.

[5] Сборник задач по алгебре под редакцией А. И. Кострикина. М.: МЦНМО, 2009.

[6] Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. Линейная алгебра. М.: Юрайт, 2014.

[7] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2009.

[8] Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Данко С. П. Высшая математика в упражнениях и задачах. 7-е изд. Ч.I. М.: Оникс, 2009.

[9] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2007.

[10] Шевцов Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. М.: Финансы и статистика, 2003.

[11] Ким Г. Д., Крицков Л. В. Алгебра и аналитическая геометрия: Теорема и задачи, Том I. М.: "Планета знаний", 2007. – 469 с.

[12] Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре, М.: БИНОМ. 2002.

[13] Винберг Э. Б., Курс алгебры, М.: изд. МГУ, 2002.

[14] Канатников А. Н., Крищенко А. П. Линейная алгебра. 3-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. –336 с.

[15] Aleskerov F. T., Piontkovski D. I., Ersel H. Linear Algebra for Economists. L., NY, Dordrecht, Heidelberg: Springer Verlag, 2011.

[16] Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2007. – 480 с.

[17] P. Butkovic. Max-Linear Systems: Theory and Algorithms. Springer, 2010.

[18] Городенцев А. Л. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1. М.: МЦНМО, 2013. – 488 с.

[19] Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. Москва: Наука, 1968. – 912 с.